

Výpočet pravdepodobnosti krachu pri aplikácii LCR zaistenia

Ruin probability calculation in LCR reinsurance

František Slaninka¹, Zsolt Simonka¹

Abstrakt

Zaistenie najvyšších škôd (LCR) patrí k menej frekventovaným typom neproporcionálneho zaistenia hlavne z dôvodu zložitosti správy a reportovania. Umožňuje ale ochranu poisťovne pred potenciálne destabilizačnými vysokými škodami. Významnú úlohu v tomto zaistení hrá nastavenie hodnoty určujúcej, koľko škôd uhradí zaistovateľ. Kľúčovým kontrolným prostriedkom pri jej nastavení je pravdepodobnosť krachu vyjadrujúca, či poisťovňa bude schopná kryť svoje záväzky voči poisteným subjektom. Presný výpočet pravdepodobnosti krachu je v prípade LCR zaistenia problematický, preto je vhodné využiť alternatívne metódy. V článku uvádzame spôsob určenia pravdepodobnosti krachu pri aplikovanom LCR zaistení pomocou Monte Carlo simulácií. Výpočet pravdepodobnosti krachu realizujeme na základe definície kolektívneho modelu rizika a zaistenia LCR v jazyku R.

Kľúčové slová

LCR zaistenie, pravdepodobnosť krachu, Monte Carlo simulácie, jazyk R

Abstract

Largest Claims Reinsurance (LCR) is a less commonly used type of non-proportional reinsurance, mainly due to the complexity of administration and reporting. However, it provides insurer's protection against potentially destabilizing large losses. A crucial factor in this type of reinsurance is setting the value that determines which claims will be covered by the reinsurer. A key control mechanism in setting this value is the probability of ruin, which expresses whether the insurer will be able to meet its obligations to policyholders. Given the challenges in calculating the probability of ruin for LCR reinsurance, alternative methods are recommended. In this article, we present a method for calculating the probability of ruin in the context of LCR reinsurance using Monte Carlo simulations. The calculation of the probability of ruin is based on the definition of the collective risk model and LCR reinsurance definition, implemented in the R programming language.

Key words

LCR reinsurance, Ruin probability, Monte Carlo simulation, R programming language

JEL classification

C15, C69, G22

1 Úvod

Zaistenie je proces, pri ktorom poisťovateľ prenáša časť rizík, ktoré na seba prevzal, na inú poisťovňu, nazývanú zaistovateľ. Hlavným cieľom zaistenia je ochrana poisťovateľa pred nadmernými stratami, ktoré môžu vzniknúť z neočakávaných udalostí alebo veľkých poistných

¹ Ekonomická univerzita v Bratislave, Fakulta hospodárskej informatiky, Katedra matematiky a aktuárstva, Dolnozemska cesta 1/b, 852 35, Bratislava, frantisek.slaninka@euba.sk, zsolt.simonka@euba.sk.

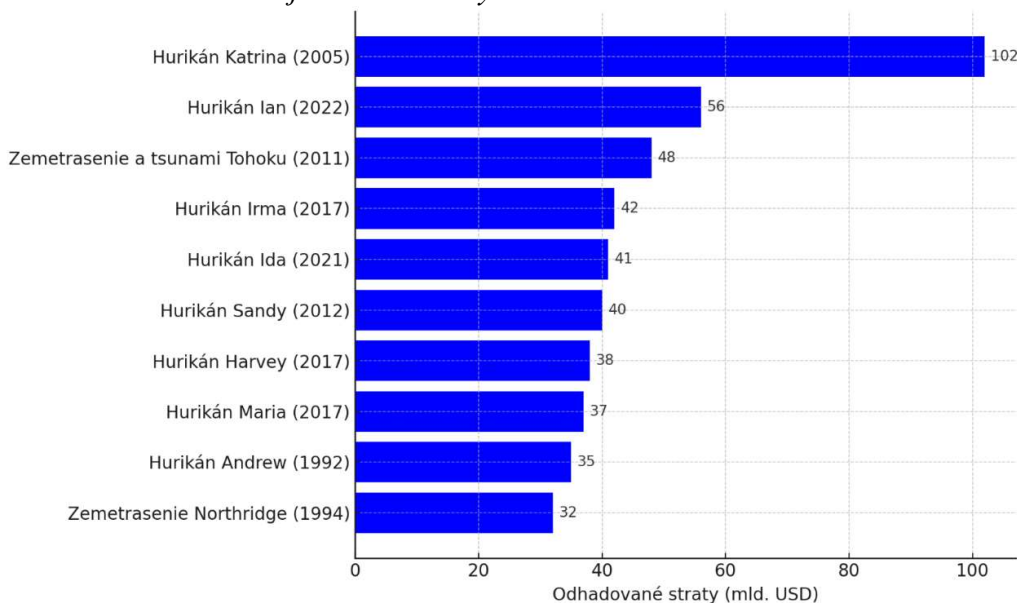
nárokov. To umožňuje poisťovateľovi udržať si finančnú stabilitu a schopnosť kryť veľké škody bez ohrozenia solventnosti. Medzi najdôležitejšie funkcie zaistenia patrí (Cipra, 2004):

- *Rozloženie rizika:* Poisťovňa prenáša časť prevzatého rizika na zaistovateľa, čo jej pomáha zvládať veľké straty, napríklad v prípade katastrofických udalostí (záplavy, zemetrasenia).
- *Homogenizácia poistného kmeňa:* Voľba vhodného zaistenia umožňuje veľký poistný kmeň orezať do homogénnej podoby.
- *Zvýšenie kapacity:* Zaistenie umožňuje poisťovni prijímať viac poistných zmlúv alebo pokrývať riziká s vyššími poistnými sumami, ktoré by inak bez zaistenej ochrany nebola schopná zvládnuť.
- *Stabilizácia finančných výsledkov:* Zaistenie pomáha vyhladzovať výkyvy v ziskovosti poisťovne, ktoré môžu byť spôsobené nepredvídateľnými udalosťami a veľkými stratami.
- *Ochrana solventnosti:* Pomocou zaistenia si poisťovňa môže zachovať svoju finančnú stabilitu aj v prípade veľkých škôd. Zaistovatelia kompenzujú časť strát, čím sa znižuje tlak na kapitál poisťovne.
- *Optimalizácia rizikového manažmentu:* Zaistenie dovoľuje poisťovni efektívnejšie riadiť riziká, poisťovňa môže využiť odborné znalosti a skúsenosti zaistovateľa, napríklad pri modelovaní katastrofických rizík.
- *Plnenie regulačných požiadaviek:* Zaistenie môže poisťovni pomôcť splniť požiadavky regulačných orgánov, ktoré stanovujú minimálne kapitálové rezervy potrebné na krytie rizík.

Zaistenie zohráva významnú úlohu v rámci smernice Solvency II (účinnosť nadobudla v roku 2016), ktorá predstavuje európsky regulačný rámec pre poisťovne a zaistovacie spoločnosti so zameraním na posilnenie ochrany spotrebiteľov a zabezpečenie finančnej stability poisťovacích trhov. Zaistenie v tomto kontexte pomáha poisťovni efektívne riadiť riziká, znižovať kapitálové požiadavky a plniť regulačné požiadavky stanovené smernicou.

Graf na Obr. 1 zobrazuje 10 najväčších škodových udalostí v rokoch 1900 – 2023. Väčšina týchto udalostí viedla k rekordným nárokom na zaistenie, pričom zaistovacie spoločnosti zohrali kľúčovú úlohu pri vyplácaní škôd.

Obr. 1: 10 najväčších škodových udalostí v rokoch 1900 – 2023



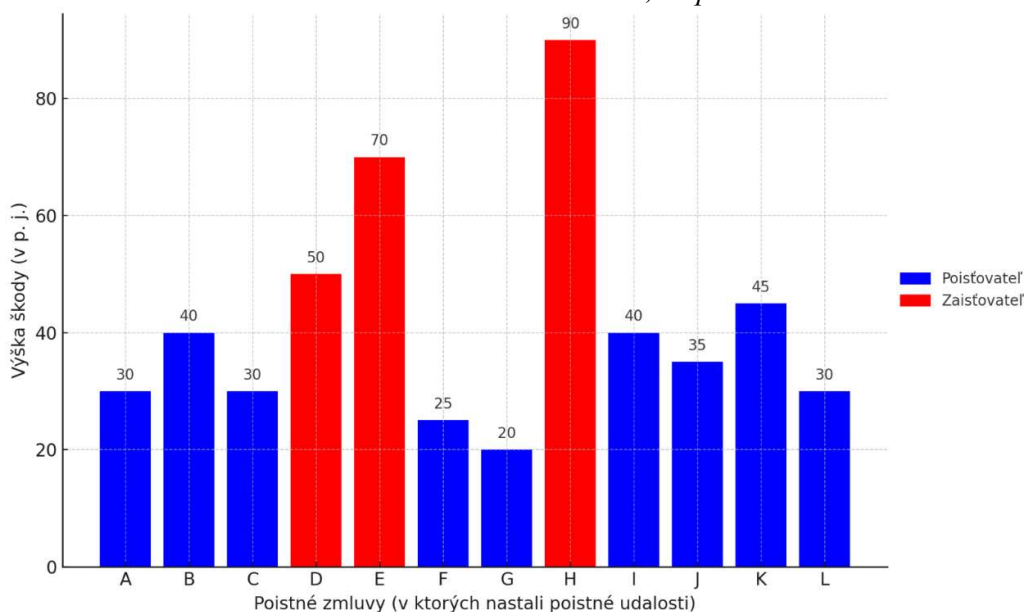
Zdroj: <https://www.statista.com/statistics/207424/insured-losses-of-the-largest-world-natural-catastrophes/>

2 LCR zaistenie v kontexte kolektívneho modelu rizika

Zaistenie najvyšších škôd, označované v praxi $LCR(p)$ je zaistenie, pri ktorom zaisťovateľ uhradza p najvyšších škôd z n vzniknutých (p je prirodzené číslo, $p < n$), ktoré nastali v priebehu platnosti zaisťovanej zmluvy (Cipra, 2004).

Na Obr. 2 je zobrazené LCR zaistenie aplikované pre poisťovacie zmluvy, v ktorých došlo k poisťovým udalostiam ak $p = 3$, t. j. zaisťovateľ uhradza 3 najvyššie škody (označené červenou farbou), zvyšné škody (označené modrou farbou) hradí poisťovateľ.

Obr. 2: Příklad LCR zaistenia, ak $p = 3$



Zdroj: vlastné spracovanie podľa (Cipra, 2004)

Uvažujme ďalej postupnosť po sebe idúcich škôd $\{x_1, x_2, \dots\}$, ktorá je výsledkom realizácie postupnosti nezávislých a identicky rozdelených náhodných premenných $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$. Celkovú škodu možno vyjadriť ako súčet všetkých po sebe idúcich vzniknutých individuálnych škôd $\{x_1, x_2, \dots\}$.

Predpokladajme, že po sebe idúce škody vzniknú realizáciou načítacieho procesu škôd $\{N_t, t \geq 1\}$, nezávislého od premenných $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$, kde N_t opisuje počet škôd vzniknutých do času t . Potom náhodnú premennú opisujúcu celkovú škodu do času t vyjadríme vzťahom

$$S_t = \sum_{i=1}^{N_t} X_i, \quad t > 0 \quad (1)$$

Náhodná premenná, ktorá spĺňa uvedené predpoklady má zložené rozdelenie (Horáková et al., 2015), čo zapíšeme v prípade, ak nešpecifikujeme ani jedno z rozdelení ako

$$S_t \sim Co(p_{N_t}(n); F_X(x)) \quad (2)$$

Označme ďalej $(X_1^*, X_2^*, \dots, X_{N_t}^*)$ vzostupne usporiadané štatistiky náhodného vektora $(X_1, X_2, \dots, X_{N_t})$ po sebe idúcich individuálnych škôd do času t . V prípade aplikovania LCR zaistenia zaistovateľ uhradí posledných p najvyšších škôd, poisťovateľ uhradí zvyšných $N_t - p$ vzniknutých škôd. V kontexte vyššie uvedeného celkovú škodu zaistovateľa možno vyjadriť v tvare (Ladoucette & Teugels, 2005)

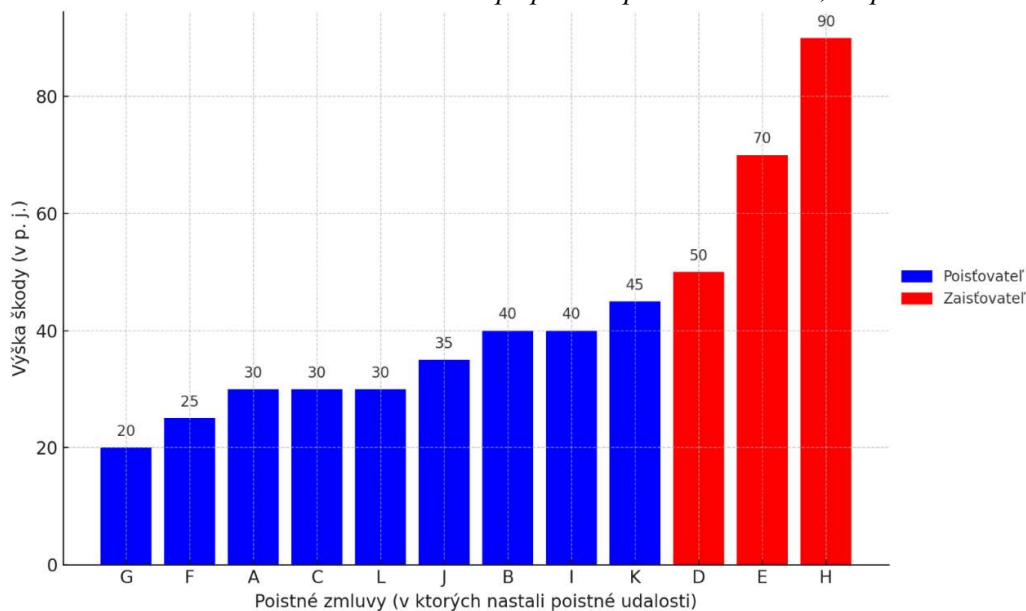
$${}^z S_t = \sum_{i=1}^p X_{N_t-i+1}^*, \quad 1 \leq p \leq N_t, t > 0 \quad (3)$$

Celková škoda poisťovateľa je daná vzťahom

$${}^p S_t = \sum_{i=1}^{N_t-p} X_i^*, \quad 1 \leq p \leq N_t, t > 0 \quad (4)$$

Na Obr. 3 je zobrazené LCR zaistenie aplikované pre vzostupne usporiadané poistné zmluvy, v ktorých došlo k poistným udalostiam ak $p = 3$, t. j. zaistovateľ uhradza 3 najvyššie škody (označené červenou farbou), zvyšné škody (označené modrou farbou) hradí poisťovateľ.

Obr. 3: Príklad LCR zaistenia v prípade usporiadania škôd, ak $p = 3$



Zdroj: vlastné spracovanie podľa (Cipra, 2004)

Vyjadrenie rozdelenia celkovej škody, pri špecifikácii rozdelení počtu a výšky škody v prípade využitia usporiadaných štatistík predstavuje náročný proces, viac o problematike čitateľ nájde napríklad v (Fan et al., 2017) a (Ladoucette & Teugels, 2005). Na určovanie pravdepodobnosti krachu pri aplikácii LCR zaistenia na uvažované riziko preto využijeme metódu Monte Carlo simulácií.

Pri Monte Carlo simuláciách nahradíme reálny systém jeho simulačným modelom s rovnakými pravdepodobnostnými charakteristikami a opakovanne simulujeme správanie reálneho systému na vytvorenom modeli. Ak vykonáme dostatočný počet simulácií, ich výsledky poskytujú veľmi presné odhady rizikových mier pre rôzne kombinácie primárnych

a sekundárnych rozdelení v rámci zložených rozdelení. Monte Carlo simulácie v prostredí R sú účinným a výkonným nástrojom pri určovaní rozdelenia celkovej škody. Počet simulácií je potrebné zvoliť starostlivo, pričom platí, že $E(S)_{simul} \cong E(S)_{exakt}$ a zároveň zohľadniť variabilitu jednotlivých rozdelení (napríklad lognormálneho). Napriek vysokému počtu simulácií softvér R poskytuje výsledky veľmi rýchlo, zvyčajne v rozpätí 1 až 60 sekúnd (Páleš & Slaninka, 2021).

Pri aplikovaní LCR zaistenia na uvažované riziko je hlavným problémom konštrukcia celkovej škody zaistovateľa a poisťovateľa. Inými slovami budeme konštruovať hodnoty náhodnej premennej rozdelenia celkovej škody zaistovateľa, aj poisťovateľa.

Predpokladajme znalosť rozdelenia počtu škôd aj výšky individuálnej škody. Budeme simulovať množiny individuálnych škôd, ktoré budeme následne triediť podľa zvoleného p medzi zaistovateľa a poisťovateľa. Situácia jednej usporiadanej množiny vzniknutých škôd pre dané p je zobrazená na Obr. 3. Celková škoda zaistovateľa v tomto prípade bude súčtom 3 posledných najvyšších škôd, na grafe zobrazených červenými stĺpcami. V jazyku R na uvedené konštrukcie využijeme vstavané funkcie

- *replicate* – realizuje opakovanie určitého výrazu alebo výpočtu a zhromažďuje výsledky týchto opakovaní s výstupom vo forme vektor, matica alebo zoznam v závislosti od typu vrátených údajov a nastavení,
- *sort* - slúži na usporiadanie prvkov vektora od najmenšieho po najväčší, ale pomocou parametrov je možné zmeniť poradie triedenia,
- *tail* – zobrazuje posledných n prvkov z vektora, alebo dataframe,
- *head* – zobrazuje prvých n prvkov z vektora, alebo dataframe.

Kód v jazyku R simulujúci nastatie jednej škodovej udalosti a realizujúci delenie škody medzi zaistovateľa a poisťovateľa pri aplikácii LCR zaistenia a výpočet výšky škody, ktorú musia uhradiť môžeme zapísať takto (uvažujeme počet škôd $N \sim Po(20)$, výška individuálnej škody $X \sim E(0,1)$, $p = 5$):

```
X<- rexp(rpois(1,20),0.1)           # vzniknuté škody v rámci
                                   # jednej škodovej udalosti

X_usp<- sort(X,decreasing=FALSE)   # usporiadanie vektora X
X_usp

X_z<- tail(X_usp,5)                # škody hradené zaistovateľom
X_z

X_p<- head(X_usp,length(X_usp)-5)  # škody hradené poisťovateľom
X_p
```

Škody hradené zaistovateľom (všetky škody a škody hradené poisťovateľom určíme podobne) získame aj príkazom:

```
X_z<- tail(sort(rexp(rpois(1,20),0.1),decreasing=FALSE),5)
```

Výstupy nasimulovaných individuálnych škôd v rámci jednej škodovej udalosti celkovo X , hradených zaistovateľom X_z a poisťovateľom X_p sú nasledovné:

```

> X
[1] 0.08414212 1.12502589 1.71927269 1.80926344 2.55724180
2.82579898 3.33400143 3.47873264
 [9] 3.61822205 4.28239895 4.71532900 5.29980866 5.37007592
5.48357223 5.52260637 5.97872837
[17] 6.35608871 6.66035761 7.87248398 9.80332463 10.16816903
11.63120387 13.12400168 14.51484418

> X_z
[1] 9.803325 10.168169 11.631204 13.124002 14.514844

> X_p
[1] 0.08414212 1.12502589 1.71927269 1.80926344 2.55724180
2.82579898 3.33400143 3.47873264 3.61822205
[10] 4.28239895 4.71532900 5.29980866 5.37007592 5.48357223
5.52260637 5.97872837 6.35608871 6.66035761
[19] 7.87248398

```

Graficky situáciu zobrazíme príkazmi

```

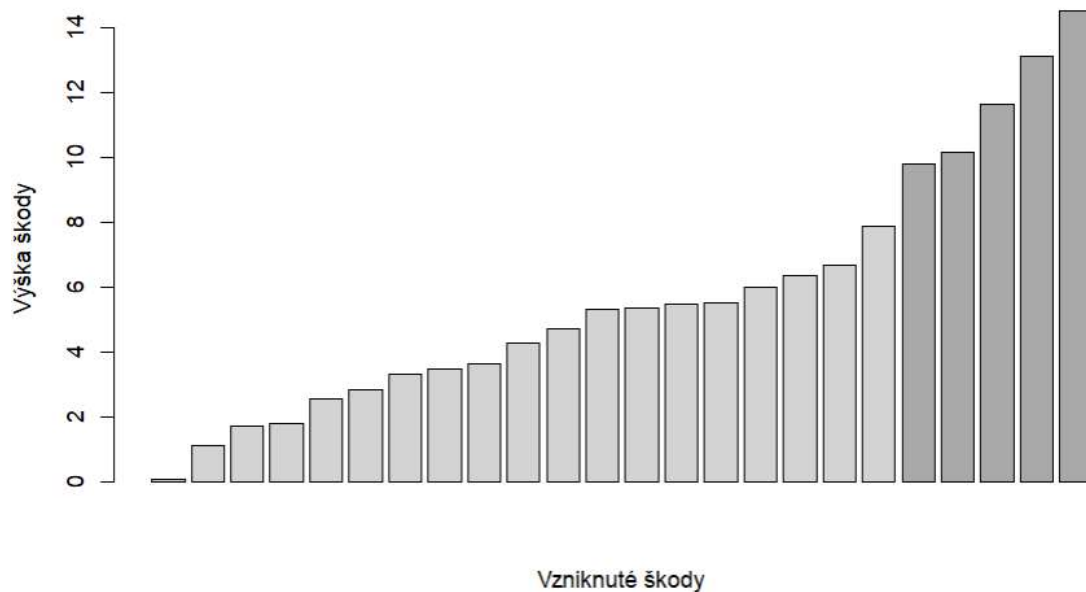
colors<- c(rep("lightgray", length(X_usp) - 5), rep("darkgray",
5))

barplot(X_usp, col = colors, xlab = "Vzniknuté škody", ylab =
"Výška škody")

```

s výstupom v R (Obr. 4)

Obr. 4: Grafické zobrazenie nasimulovaných individuálnych škôd



Zdroj: vlastné spracovanie v jazyku R

Celkovú vzniknutú škodu, škodu, ktorú uhradza zaist'ovateľ a poisťovateľ (aj s výstupom) získame príkazom

```
data.frame(sum(X_n), sum(X_p), sum(X_z))

sum.X_n. sum.X_p. sum.X_z.
1 137.3347 78.09315 59.24154      # výstup v jazyku R
```

3 Pravdepodobnosť krachu pri aplikácii LCR zaistenia

Definujme prebytok poisťovne počas jednej časovej periódy náhodnou premennou $U_1 = U + RP - S$, kde

- U - vyjadruje začiatkové rezervy na začiatku sledovaného obdobia,
- RP - je celkové prijaté rizikové poisťné za jednu časovú periódu,
- S - predstavuje celkovú škodu za jednu časovú periódu.

Cieľom poisťovne je, aby prebytok v čase $t = 1$, t. j. na konci časovej periódy bol kladný, respektíve, aby platilo s veľmi malou pravdepodobnosťou

$$P(U + RP - S < 0) = \varepsilon \quad (5)$$

Čo po úprave možno vyjadriť v tvare

$$F_S(U + RP) = 1 - \varepsilon \quad (6)$$

Uvažujme načítací proces počtu škôd $\{N_t\}_{t \geq 0}$, kde náhodná premenná N_t opisuje počet škôd v časovom intervale $\langle 0, t \rangle$. V klasickom načítacom procese je to náhodná premenná s Poissonovým rozdelením a načítací proces sa nazýva Poissonov proces. Proces prebytku $\{U_t\}_{t \geq 0}$ vyjadríme pomocou náhodných premenných opisujúcich prebytok poisťovne do času t

$$U_t = U + RP \cdot t - S_t \quad (7)$$

Pre celkovú škodu S_t čase t podľa (1), (2) a (7) platí

$$S_t \sim CoPo(\lambda \cdot t; F_X(x)) \quad (8)$$

a pravdepodobnosť krachu do času t môžeme vyjadriť v tvare

$$P(U + RP \cdot t - S_t < 0) = \varepsilon \quad (9)$$

respektíve

$$F_{S_t}(U + RP \cdot t) = 1 - \varepsilon \quad (10)$$

V prípade, ak budeme uvažovať, že na prijaté riziko je aplikované zaistenie, prebytok poisťovne do času t je daný vzťahom

$$U_t = U + RP \cdot t - NZ \cdot t - {}^P S_t \quad (11)$$

kde NZ vyjadrujú náklady na zaistenie za jednu časovú periódu a ${}^P S_t$ opisuje škodu poisťovateľa do času t . Pravdepodobnosť krachu v čase t , vyjadruje na základe (10) a (11) vzťah

$$P(U + RP \cdot t - NZ \cdot t - {}^P S_t < 0) = \varepsilon \quad (12)$$

po úprave

$$F_{P, S_t}(U + RP \cdot t - NZ \cdot t) = 1 - \varepsilon \quad (13)$$

Predpokladajme, že počet škôd sa riadi Poissonovým rozdelením $N \sim Po(100)$ a výška individuálnej škody Paretoovým rozdelením I. typu $X \sim Par(3,2)$. Na príslušné riziko aplikujeme LCR zaistenie s parametrom $p=10$, t. j. zaistovateľ hradí 10 najvyšších vzniknutých škôd. Našou úlohou bude určiť pravdepodobnosť krachu pri daných začiatočných rezervách U . Rizikové poistné aj náklady na zaistenie budeme počítat podľa princípu strednej hodnoty s prirážkami $a=0,1$, respektíve $b=0,12$. Kvôli jednoduchosti uvažujeme jednu časovú periódu, t. j. $t=1$.

Výpočet pravdepodobnosti krachu realizujeme simuláciami Monte Carlo v jazyku R pomocou funkcie *replicate*. Hodnoty náhodnej premennej celkovej škody sú simulované v súlade s definíciou kolektívneho modelu rizika a triedenie individuálnych škôd medzi zaistovateľa a poisťovateľa je realizované podľa kódu v Kapitole 2 (Páleš & Slaninka, 2021).

```
p<- 10          # p = 10, parameter LCR zaistenia
lambda<- 100   # parametre rozdelení
scale<- 3
shape<- 2

U<- 50         # začiatočné rezervy
a<- 0.1        # prirážky
b<- 0.12

S<- replicate(10000, sum(sort(rpareto(rpois(1, lambda),
scale, shape), decreasing=FALSE))) # hodnoty premennej
                                   celkovej škody

S_z<- replicate(10000, sum(tail(sort(rpareto(rpois(1, lambda),
scale, shape), decreasing=FALSE), p))) # celková škoda zaistovateľa

S_p<-replicate(10000, sum(head(sort(rpareto(a<-rpois(1, lambda),
```



```

scale, shape), decreasing=FALSE), a-p))) # celková škoda
                                         # poisťovateľa

RP<- mean(S)+a*mean(S)                   # rizikové poistné
NZ<- mean(S_z)+b*mean(S_z)              # náklady na zaistenie

PK<- 1-length(subset(S, S<U+RP))/length(S)
                                         # pravdepodobnosť krachu
                                         # bez zaistenia

PK_LCR<- 1-length(subset(S_p, S_p<U+RP-NZ))/length(S_p)
                                         # pravdepodobnosť krachu po
                                         # aplikácii LCR zaistenia

```

Odhady pravdepodobnosti krachu bez aj po aplikovaní LCR zaistenia získame v jazyku R nasledujúcim príkazom a výstupom:

```

data.frame(U, PK, PK_LCR)

  U      PK  PK_LCR
1 50 0.1127 0.0551 # výstup v jazyku R

```

Z uvedeného výstupu vidíme, že pri začiatkových rezervách $U = 0$ je odhadovaná pravdepodobnosť krachu bez zaistenia 0,1127, LCR zaistenie s parametrom $p = 10$ pravdepodobnosť krachu redukuje na hodnotu 0,0551.

4 Záver

Neproporcionálne LCR zaistenie sa javí ako vhodný prostriedok na ochranu poisťovateľa hlavne v prípadoch, že výška škody je opísaná pomocou rozdelení s tzv. ťažkým chvostom (Paretovo, Weibullovo, lognormálne, alebo napríklad log-gama rozdelenie). V takom prípade poisťovateľ môže vhodne nastaveným parametrom p preniesť časť nebezpečných škôd na zaistovateľa. Pravdepodobnosť krachu je dôležitou mierou, ktorá môže pomôcť pri nastavovaní parametra p . Článok uvádza spôsob odhadu pravdepodobnosti krachu, ak na riziko aplikujeme LCR zaistenie. Výpočet sme realizovali pomocou simulácií Monte Carlo s využitím programovacieho jazyka R. S dosiahnutých výsledkov vidieť, že napríklad v prípade, ak uvažujeme výšku škody opísanú Paretovým rozdelením, LCR zaistením a vhodnou voľbou parametra p dokážeme škodu poisťovateľa efektívne eliminovať.

Príspevok bol spracovaný v rámci riešenia grantovej úlohy VEGA 1/0431/22 Implementácia inovatívnych prístupov modelovania rizík v procese ich riadenia v interných modeloch poisťovní v kontexte s požiadavkami direktívy Solvency II.

Literatúra

1. Cipra, T. (2004). *Zajištění a přenos rizik v pojišťovnictví*. Grada Publishing.
2. Fan, Y., Griffin, P. S., Maller, R., Szimayer, A., & Wang, T. (2017). The effects of Largest claim and Excess of loss reinsurance on company's ruin time and valuation. *Risks*. MDPI. <https://www.mdpi.com/2227-9091/5/1/3>

3. Horáková, G., Páleš, M., & Slaninka, F. (2015). *Teória rizika v poistení*. Wolters Kluwer.
4. Ladoucette, S. A., & Teugels, J. L. (2005). Reinsurance of large claims. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 186, 163–190. <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0377042705001950>
5. Mucha, V., & Páleš, M. (2018). *Teória pravdepodobnosti pre ekonómov (S podporou jazyka R)*. Letra Edu.
6. Páleš, M., & Slaninka, F. (2021). *Teória rizika v poistení (Riešené príklady v jazyku R a Maxima)*. Letra Edu.
7. Statista. (n.d.). *Insured losses of the largest world natural catastrophes*. [Online]. Dostupné na: <https://www.statista.com/statistics/207424/insured-losses-of-the-largest-world-natural-catastrophes/>