Využitie centrálnej limitnej vety pri výpočte poistného v životnom poistení

Lenka Smažáková[1]

Abstrakt
Existuje viacero metód výpočtu poistného v životnom poistení. Niektoré sú využívané pre svoju jednoduchosť, ako napríklad metóda súčasnej hodnoty a iné zase pre svoju komplexnosť. Príspevok sa zaoberá výpočtom poistného pomocou centrálnej limitnej vety pri spojitých poisteniach, hlavne spojitých dôchodkoch. Definujeme si pri základných typoch poistenia spojitú náhodnú premennú, ktorá bude vyjadrovať súčasnú hodnotu poistných plnení a vypočítame si jej strednú hodnotu a rozptyl. Navyše si stanovíme predpoklady tak, aby sa centrálna limitná veta dala použiť. Záverom príspevku je zhodnotenie použitia tejto metódy.

Kľúčové slová
centrálna limitná veta, metóda súčasnej hodnoty, spojité poistenia, rozptyl

Abstract
There are several methods of calculating premiums in life insurance. Some are used for their simplicity, such as the present value method, and others for their complexity. This paper deals with the calculation of premiums of continuous insurances, mainly annuities, by using the central limit theorem. We define a continuous random variable for the basic types of insurance that will express the present value of claims and we will calculate its mean value and variance. In addition, we set the assumptions so that the central limit theorem can be used. The conclusion of the paper is to determine, whether this method is useful.

Keywords
Central limit theorem, The present value method, Continuous insurance, Variance

JEL classification
G22

1 Úvod

Poznáme viaceré spôsoby na výpočet poistného v životnom poistení. Jednou zo základných metód je metóda súčasnej hodnoty, ktorá je často využívaná pre svoju jednoduchosť a pre možnosť použiť pri výpočte komutačné čísla. Netto poistné týmto spôsobom určíme z rovnice ekvivalencie, kde na jednej strane sa nachádza súčasná hodnota poistného a na strane druhej súčasná hodnota poistných plnení. V prípade brutto poistného pripočítavame k poistným plneniam aj súčasnú hodnotu nákladov. Výplata poistných plnení môže byť buď jednorazová ako v prípade napr. poistenia na úmrtie, na dožitie či zmiešaného poistenia alebo opakovaná ako v prípade dôchodkov.

Medzi ďalšie možnosti výpočtu poistného patrí výpočet pomocou centrálnej limitnej vety, ktorý si v práci predstavíme. Ukážeme si ho na všeobecnom a následne aj na konkrétnom prípade pri niektorých spojitých dôchodkoch, pričom nás bude zaujímať, či a ako bude výsledné poistné odlišné od toho, ktoré si vieme vypočítať metódou súčasnej hodnoty. Na to, aby sme túto metódu mohli použiť musíme si definovať náhodnú premennú vyjadrujúcu súčasnú

[1] Ing. Lenka Smažáková, Ekonomická univerzita v Bratislave, Fakulta hospodárskej informatiky, Katedra matematiky a aktuárstva, Dolnozemská cesta 1/b, 852 35 Bratislava, lenka.smazakova@gmail.com

hodnotu dávok, určiť jej strednú hodnotu a disperziu. Ďalej budú musieť byť zabezpečené predpoklady, aby platilo znenie centrálnej limitnej vety.

V úvode práce predstavím deterministický a stochastický model, kde si definujeme funkcie a výrazy, ktoré budeme používať neskôr. Následne si predstavíme náhodnú premennú, ktorá vyjadruje súčasnú hodnotu dávok pri jednotlivých typoch spojitých poistení. Potom si vo všeobecnosti vyjadríme poistné pomocou centrálnej limitnej vety a na záver, po stanovení si predpokladov, porovnáme vyššie opísané dve metódy výpočtu a zhodnotíme, či je vhodné použiť výpočet pomocou centrálnej limitnej vety.

2 Deterministický model

Majme populáciu osôb $l_0$vo veku 0, ktorá sa riadi ročnou úmrtnostnou mierou $q_x$danou úmrtnostnou tabuľkou a ktorá je uzavretá, čiže neuvažujeme vstup a výstup je len následkom úmrtnosti. Uvažujme spojitú funkciu $l_x$definovanú pre všetky $x > 0$, ktorá vyjadruje počet osôb dožívajúcich sa veku x z počtu l_0. Potom podiel $p_x = \frac{l_{x+1}}{l_x}$ nazývame ročnou mierou prežitia a teda je to pravdepodobnosť, že osoba vo veku x sa dožije veku $x + 1$. Taktiež platí pre pravdepodobnosť, že x ročná osoba sa dožije veku $x + n$, ${}_np_x$, je rovn~~á~~ ${}_np_x = \frac{l_{x+n}}{l_x}$. Počet osôb, ktoré sa nedožili veku $x + 1$ sa označuje d_x a platí$d_x = l_x - l_{x+1}$. Potom ročná miera úmrtnosti q_x predstavuje $q_x = 1 - p_x = \frac{d_x}{l_x}$.

Podľa frekvencie výplaty delíme poistné produkty na tie s jednorazovou výplatou adôchodky.

2.1 Poistenia s jednorazovou výplatou

Jedným zo základných typov poistení s jednorazovou výplatou je poistenie na dožitie, kde súčasnú hodnotu 1 peňažnej jednotky vyplatenej v čase dožitia sa poistenej osoby veku $x + n$ označujeme ${}_nE_x$a určíme zo vzťahu $l_x\, {}_nE_x = l_{x+n}v^n$, kde x je vek osoby v čase uzavretia poistnej zmluvy a n je počet rokov, ktoré musí poistený prežiť, aby mu bola vyplatená poistná suma. Súčasná hodnota takéhoto poistenia je rovná

$${}_nE_x = \frac{D_{x+n}}{D_x},$$

kde $D_x = v^x l_x$ a nazývame ho prvé komutačné číslo. Vyjadruje oddiskontovaný počet osôb dožívajúcich sa veku x. Ďalej definujeme poistenie na úmrtie a to podľa doby trvania môže byť doživotné alebo dočasné. Doživotné poistenie na úmrtie, A_x, vyjadruje súčasnú hodnotu 1 peňažnej jednotky vyplatenej na konci roka úmrtia poistenej osoby. Pokiaľ ide o dočasné poistenie na úmrtie na n rokov, tak poisťovňa vyplatí 1 peňažnú jednotku pozostalým v prípade, že poistený zomrie do veku $x + n$ a súčasná hodnota takéhoto poistenia sa označuje $A^1_{x:n]}$. Diskontovaný počet zomretých vo veku x označujeme ako C_x, čo sa tiež nazýva druhé komutačné číslo a je vyjadrené ako $C_x = v^{x+1}d_x$. Definujeme ďalšie komutačné čísla:$M_x = \sum_{t=0}^{\infty} C_{x+t}$,$R_x = \sum_{t=0}^{\infty} M_{x+t}$,$N_x = \sum_{t=0}^{\infty} D_{x+t}$ a $S_x = \sum_{t=0}^{\infty} N_{x+t}$. Potom platí

$$A_x = \frac{M_x}{D_x}, A^1_{x:n]} = \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x}.$$

Ďalej definujeme zmiešané poistenie ako poistenie osoby vo veku x, kde 1 peňažná jednotka je vyplatená poistenej osobe, pokiaľ sa dožije veku $x+n$ alebo pozostalým, pokiaľ sa tohto veku nedožije. Súčasnú hodnotu učíme ako

$$A_{x:n]} = A^1_{x:n]} + {}_nE_x = \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{D_x}.$$

2.2 Poistenie dôchodku

Medzi základné typy dôchodkov na základe doby výplat dávok patrí doživotný a dočasný dôchodok na rokov n, kde pri doživotnom predlehotnom dôchodku označenom ako $\ddot{a}_x$ určíme súčasnú hodnotu dávky, čiže 1 peňažnej jednotky vyplatenej na začiatku každého roka, pokiaľ je osoba nažive ako

$$\ddot{a}_x = \frac{N_x}{D_x}.$$

Pri dočasnom dôchodku je doba výplaty dávky n rokov, pokiaľ poistená osoba je nažive a vieme jeho súčasnú hodnotu stanoviť ako

$$\ddot{a}_{x:n]} = \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x}.$$

3 Stochastický model

Rozdiel medzi deterministickým a stochastickým modelom je v tom, že stochastický alebo náhodný model používa tvrdenia pravdepodobnosti a štatistiky a teda prihliada na náhodný charakter poistných udalostí. V tomto modeli hodnotu finančného toku považujeme za náhodnú premennú.

V tomto prípade definujeme budúcu dĺžku života novonarodenej osoby ako náhodnú premennú T_0 a jej distribučnú funkciu ako $F_0(t) = P(T_0 \leq t)$,vyjadrujúcu pravdepodobnosť, že novonarodená osoba zomrie najneskôr vo veku t. Taktiež definujeme funkciu prežitia ako$S_0(t) = 1 - F_0(t)$. Potom zodpovedajúca distribučná funkcia budúcej dĺžky života osoby vo veku x,T_x, je

$$F_x(t) = P(T_x \leq t) = P(T_0 \leq x + t | T_0 > x) = \frac{F_0(x+t) - F_0(x)}{1 - F_0(t)}.$$

Podobne potom pre funkciu prežitia osoby vo veku x platí

$$S_x(t) = \frac{S_0(x+t)}{S_0(x)}.$$

Z uvedeného platí, že ${}_tp_x = S_x(t)$ a ${}_tq_x = F_x(t)$.

Ďalej definujeme intenzitu úmrtnosti μ_{x+t} ako pravdepodobnosť, že osoba vo veku x zomrie najneskôr vo veku $x + dx$, pričom dx je ľubovoľne krátky časový úsek. Potom

$$\mu_{x+t} = \lim_{dx \to 0} \frac{P(T_0 \leq x + dx | T_0 > x)}{dx} = \frac{(F_0(t))'}{1 - F_0} = -\frac{(S_0(t))'}{S_0(t)} = -\frac{\mathrm{d}ln\ {}_tp_x}{\mathrm{d}t}.$$

Hustota budúcej dĺžky života bude

$$f_x(t) = \frac{\mathrm{d}F_x(t)}{\mathrm{d}t} = \ {}_tp_x\mu_{x+t}.$$

Z predchádzajúcich vzťahov plynie, že

$${}_tq_x = \int_0^t {}_up_x\, \mu_{x+u} du.$$

Budúcu dĺžku života osoby vo veku x vieme tiež vyjadriť ako $T_x = K_x + Y_x$, kde K_x predstavuje celočíselnú časť T_x a Y_x zlomok roku, ktorý poistená osoba vo veku x prežije v roku smrti. K_x sa nazýva skrátená dĺžka života.Keď uvažujeme, že $T_x = K_x + Y_x$, tak sa jedná o spojitý prípad a teda poistná suma sa vypláca, pri poistení na úmrtie, bezprostredne po úmrtí poistenej osoby. Definujeme v tomto prípade spojitú náhodnú premennú Z ako súčasnú hodnotu 1 peňažnej jednotky vyplatenej bezprostredne po tom, ako nastala poistná udalosť (v prípade dočasného resp. doživotného poistenia na úmrtie a zmiešaného poistenia) alebo ako spojite vyplácanú dávku v prípade dôchodkov (dávka sa vypláca m krát ročne, pričom $m \to \infty$) . Náhodné premenné a ich stredné hodnoty pre vybrané typy poistenia sú uvedené v tabuľke č. 1.

Tab. 1: súčasná hodnota poistných plnení pri základných spojitých poisteniach

Spojité poistenia	**Náhodná premenná Z**	$\boldsymbol{E(Z)}$
Doživotné poistenie na úmrtie	$Z = v^{T_x}$	$\int_0^\infty v^t f_x(t)dt = \int_0^\infty v^t\ {}_tp_x\mu_{x+t}dt = \overline{A}_x$
Dočasné poistenie na úmrtie	$Z = \begin{cases} v^t, ak\ T_x = t \le n \\ 0, \quad inak \end{cases}$	$\int_0^n v^t f_x(t)dt = \int_0^n v^t\ {}_tp_x\mu_{x+t}dt = \overline{A}^{1}_{x:n\rceil}$
Zmiešané poistenie	$Z = \begin{cases} v^t, ak\ T_x = t \le n \\ v^n, ak\ \ T_x > n \end{cases}$	$\int_0^n v^t\ {}_tp_x\mu_{x+t}dt\ +\ v^n\ {}_np_x = \overline{A}^{1}_{x:n\rceil}\ +\ {}_nE_x = \overline{A}_{x:n\rceil}$
Dočasný dôchodok[2]	$Z = \begin{cases} \overline{a}_{t\rceil}, ak\ T_x = t \le n \\ \overline{a}_{n\rceil}, akT_x > n \end{cases}$	$\int_0^n \overline{a}_{t\rceil} f_x(t)dt + \overline{a}_{n\rceil}\int_n^\infty f_x(t)dt = \frac{1}{\delta}\left(\int_0^n (1-v^t)f_x(t)dt\right) + \overline{a}_{n\rceil}\ {}_np_x = \int_0^n v^t\ {}_tp_x dt = \overline{a}_{x:n\rceil}$
Doživotný dôchodok	$Z = \overline{a}_{T_x\rceil}$	$\int_0^\infty \overline{a}_{t\rceil} f_x(t)dt = \frac{1}{\delta}\left(\int_0^\infty (1-v^t)f_x(t)dt\right) = \int_0^\infty v^t\ {}_tp_x dt = \overline{a}_x$

Zdroj: Potocký, 2012

[2] Pri výpočtoch sme použili vzorec na určovanie súčasnej hodnoty istého finančného spojitého dôchodku v tvare $\overline{a}_{t\rceil} = \frac{1-e^{-\delta t}}{\delta} = \frac{1-v^t}{\delta}$, kde $\delta = -ln(v)$ (Bilíková, 2003).

4 Výpočet jednorazového netto poistného spojitých dôchodkov pomocou centrálnej limitnej vety

V nasledujúcej časti si opíšeme výpočet jednorazového netto poistného pomocou centrálnej limitnej vety s tým, že ho porovnáme s výpočtom pomocou metódy súčasnej hodnoty.

Základným princípom pri výpočte metódou súčasnej hodnoty je, že poistné sa touto metódou určí z rovnice ekvivalencie, v ktorej sa na jednej strane nachádza súčasná hodnota poistného a na druhej strane súčasná hodnota poistných plnení (v prípade netto poistného) plus súčasná hodnota nákladov (v prípade brutto poistného) (Sakalová, 2000). Keďže v našom prípade uvažujeme jednorazové netto poistné, tak poistné bude pri jednotlivých typoch spojitých dôchodkov pri použití tejto metódy rovné strednej hodnote náhodnej premennej Z.

Ďalšiu metódu, ktorú si predstavíme je výpočet pomocou centrálnej limitnej vety (CLV). Lévy – Lindeberg centrálna limitná veta hovorí, že keď máme náhodnú premennú X takú, že je súčtom n nezávislých rovnako rozdelených náhodných premenných $X_1, X_2, \dots, X_n$, s konečnou strednou hodnotou $E(X_i) = \mu$ a konečným rozptylom $D(X_i) = \sigma^2$, tak pre normovanú náhodnú premennú Y

$$Y = \frac{X - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}}$$

platí

$$\lim_{n\to\infty} P(Y < p) = \Phi(p),$$

kde $\Phi(y)$ je distribučná funkcia normovaného normálneho rozdelenia, čiže $Y \overset{as.}{\to} N\sim(0,1)$. Odvodíme si teraz všeobecne vzťah pre výpočet jednorazového netto poistného pomocou CLV.

Budeme uvažovať stratu poisťovne na poistných zmluvách. Nech L je súčet M nezávislých, rovnako rozdelených náhodných premenných, kde$L$ bude vyjadrovať celkovú stratu poisťovne z M rovnakých poistných zmlúv. Poistné P určíme tak, aby pravdepodobnosť $\mathrm{P}(L > 0)$ bola menšia ako p, ktoré si vopred stanovíme. Budeme uvažovať jednorazové poistné zaplatené na začiatku poistnej doby.

Stratu poisťovne z j-tej poistky pre $j = 1,2,\dots,M$ vieme vyjadriť ako $L_j = Z - P$, kde P je jednorazové netto poistné a Z sú poistné plnenia na jednu poistnú zmluvu. Potom

$$E(L_j) = E(Z - P) = E(Z) - E(P) = E(Z) - P.$$

Pravdepodobnosť, že celková strata poisťovne bude kladná vyjadríme ako

$$\mathrm{P}(L > 0) = \mathrm{P}\left(\sum_{j=1}^{M} L_j > 0\right) = \mathrm{P}\left(\frac{\sum_{j=1}^{M} L_j - E\left(\sum_{j=1}^{M} L_j\right)}{\sqrt{D\left(\sum_{j=1}^{M} L_j\right)}} > \frac{0 - E\left(\sum_{j=1}^{M} L_j\right)}{\sqrt{D\left(\sum_{j=1}^{M} L_j\right)}}\right).$$

Označme si náhodnú premennú Y ako

$$Y = \frac{\sum_{j=1}^{M} L_j - E\left(\sum_{j=1}^{M} L_j\right)}{\sqrt{D\left(\sum_{j=1}^{M} L_j\right)}},$$

potom platí

$$\mathrm{P}\left(Y > \frac{0 - ME(L_j)}{\sqrt{MD(L_j)}}\right) = \mathrm{P}\left(Y > -\sqrt{M}\frac{E(L_j)}{\sqrt{D(L_j)}}\right).$$

Použitím CLV dostaneme

$$\Phi\left(-\sqrt{M}\frac{E(L_j)}{\sqrt{D(L_j)}}\right) = \Phi\left(-\sqrt{M}\frac{E(Z) - P}{\sqrt{D(L_j)}}\right),$$

z čoho vieme všeobecne vyjadriť jednorazové netto poistné ako

$$P = -\frac{u_{1-p}\sqrt{D(L_j)}}{\sqrt{M}} + E(Z),$$

pričom z vlastností rozptylu vieme, že

$$D(L_j) = D(Z - P) = D(Z),$$
$$\text{pričom } D(Z) = E(Z^2) - E^2(Z),$$

a teda jednorazové netto poistné potom bude

$$P = -\frac{u_{1-p}\sqrt{D(Z)}}{\sqrt{M}} + E(Z).$$

Na to, aby sme vedeli použiť odvodený vzorec na stanovenie jednorazového netto poistného budeme potrebovať poznať rozptyl pri jednotlivých typoch skúmaných poistení, ktorý nevieme aktuálne zovšeobecniť. Všeobecné stanovenie rozptylu bude v úvode nasledujúcich statí. Následne, budeme porovnávať výstupy metódy súčasnej hodnoty s metódou využívajúcou CLV.

Konkrétne výpočty poistného budeme ilustrovať pri použití predpokladov uvedených v tabuľke č. 2.

Tab. 2: predpoklady použité pri výpočtoch

Úmrtnostné tabuľky	ÚT SR z 2012
x	30
i	0,70%
n	10
p	5%
$u_{0,95}$	1,645
M	10.000

Zdroj: vlastné spracovanie

4.1 Spojitý doživotný dôchodok

Rozptyl náhodnej premennej Z, ktorá je vyjadrená v tabuľke č. 1, vieme pri spojitom doživotnom dôchodku vyjadriť ako

$$\begin{aligned} D(Z) &= \int_0^\infty \left(\frac{1-v^t}{\delta}\right)^2 f_x(t)dt - \left(\int_0^\infty \frac{1-v^t}{\delta} f_x(t)dt\right)^2 \\ &= \frac{1}{\delta^2}\left(\int_0^\infty (1-v^t)^2 f_x(t)dt - \left(1-\int_0^\infty v^t f_x(t)dt\right)^2\right) \\ &= \frac{1}{\delta^2}\left(1-2\bar{A}_x - {}^2\bar{A}_x - 1 + 2\bar{A}_x - \bar{A}_x{}^2\right) \\ &= \frac{1}{\delta^2}\left({}^2\bar{A}_x - \bar{A}_x{}^2\right), \end{aligned}$$

kde ${}^2\bar{A}_x$ znamená, , že používame diskontný faktor v^2 a teda úroková miera je rovná $2i + i^2$.[3] Potom na základe vopred stanovených predpokladov a pri aproximáciách takých, že $\bar{a}_x \approx \ddot{a}_x - \frac{1}{2}$ a $\bar{A}_x \approx \left(1+\frac{i}{2}\right)A_x$, bude $D(Z) = 101{,}728$ a $E(Z) = 35{,}7317$. Potom poistné stanovené jednotlivými metódami bude

Tab. 3: poistné stanovené oboma metódami

Metóda	**Poistné**
Prítomnej hodnoty ($\boldsymbol{E(Z)}$)	35,7317
CLV	35,5658

Zdroj: vlastné spracovanie

V tabuľke č. 3 môžeme vidieť, že rozdiel v poistnom medzi jednotlivými metódami je malý a teda je vhodné použiť výpočet pomocou centrálnej limitnej vety.

4.2 Spojitý dočasný dôchodok na n rokov

Rozptyl náhodnej premennej Z, ktorá je vyjadrená v tabuľke č. 1, vieme pri spojitom dočasnom dôchodku vyjadriť ako

$$\begin{aligned} D(Z) &= \int_0^n \left(\frac{(1-v^t)}{\delta}\right)^2 f_x(t)\,dt + \int_n^\infty \left(\frac{(1-v^n)}{\delta}\right)^2 f_x(t)\,dt \\ &- \left(\int_0^n \frac{1-v^t}{\delta} f_x(t)dt + \int_n^\infty \frac{1-v^n}{\delta} f_x(t)dt\right)^2 \\ &= \frac{1}{\delta^2}\left(1 - 2\int_0^n v^t f_x(t)dt + \int_0^n v^{2t} f_x(t)dt - 2v^n\,{}_np_x + v^{2n}\,{}_np_x\right) \\ &- \frac{1}{\delta^2}\left(1-\int_0^n v^t f_x(t)dt - v^n\,{}_np_x\right)^2 = \frac{1}{\delta^2}\left({}^2\bar{A}_{x:n]} - \left(\bar{A}_{x:n]}\right)^2\right). \end{aligned}$$

[3] Potocký (2012). Dané označenie predstavuje použitú diskontnú mieru v^2 a budeme ju používať aj v ďalších častiach.

Opäť ako v predchádzajúcom prípade s použitím obdobných aproximácií si vypočítame $D(Z) = 338{,}1403$ a $E(Z) = 9{,}1287$. Potom poistné stanovené jednotlivými metódami bude

Tab. 4: poistné stanovené oboma metódami

Metóda	**Poistné**
Prítomnej hodnoty ($\boldsymbol{E(Z)}$)	9,1287
CLV	9,1265

Zdroj: vlastné spracovanie

kde opäť vidíme len malé rozdiely vo výslednom poistnom. Keby sme zmenili predpoklady použité pri výpočtoch, tak rozdiely v poistnom by mohli byť, samozrejme, väčšie. Podstatný vplyv na veľkosť rozdielu by mal počet poistných zmlúv.

5 Záver

Existuje viacero spôsobov výpočtu jednorazového netto poistného. My sme porovnávali metódu súčasnej hodnoty, najčastejšie používanú pri výpočtoch poistného, pretože umožňuje pracovať s komutačnými číslami s výpočtom pomocou centrálnej limitnej vety. Obe sme použili pri poistení spojitých dôchodkov a zistili, že rozdiely v poistnom sú malé. Keby sme zmenili predpoklady použité pri výpočtoch, tak rozdiely v poistnom by mohli byť, samozrejme, väčšie. Podstatný vplyv na veľkosť rozdielu by mal počet poistným zmlúv, a preto znížením počtu poistných zmlúv by poistné vypočítané pomocou centrálnej limitnej vety bolo nižšie. Avšak keby sme toto urobili, tak by sme porušili jeden zo základných predpokladov CLV a teda by sme ju nemohli použiť. Záverom teda je, že výpočet poistného pomocou CLV je vhodný a rozdiely medzi touto metódou a metódou súčasnej hodnoty sú malé.

Príspevok bol spracovaný v rámci riešenia grantovej úlohy VEGA 1/0120/18 *Moderné nástroje riadenia rizika v interných modeloch poisťovní v kontexte direktívy Solvency II* a grantovej úlohy VEGA 1/0221/17 *Investičné modelovanie v prostredí katastrofického poistného rizika*

Literatúra

[1] Bilíková, M. (2003). *Spojité metódy v poistnej matematike*. Bratislava: Ekonóm.
[2] Gerber, H.U. (1997). *Life insurance mathematics.* New York: Springer.
[3] Janková, K., Pázman, A. (2011). *Pravdepodobnosť a štatistika.* Bratislava: Vydavateľstvo Univerzity Komenského.
[4] Potocký, R. (2000). *Finančná matematika.* Bratislava: Vydavateľstvo Univerzity Komenského
[5] Potocký, R. (2012). *Modely v životnom a neživotnom poistení*. Bratislava: STATIS
[6] Sakálová, K. (2000). *Oceňovanie poistných produktov v životnom poistení*. Bratislava: Ekonóm