

## Modelovanie portfólia poistných zmlúv pri poistení pre prípad úmrtia v prostredí jazyka R

Vladimír Mucha<sup>1</sup>

### Abstrakt

Cieľom príspevku je modelovanie poistných plnení na jednotlivých poistných zmluvách poistenia pre prípad úmrtia pomocou metódy Monte Carlo v prostredí jazyka R. V rámci modelovania je možné realizovať aj simuláciu počtu poistných plnení pre jednotlivé prípady vzniku poistnej udalosti, resp. v jednotlivých poistných skupinách. Ich štatistickým spracovaním možno vytvoriť reálnu predstavu o vývoji uvedeného portfólia v uvažovanom období. Príspevok sa ďalej zaoberá analýzou vplyvu počtu poistných zmlúv na presnosť určenia hodnoty  $VaR$  na základe generovania hodnôt celkovej škody v komparácii s aproximáciou normálnym rozdelením.

### Kľúčové slová

Modelovanie, simulácie, individuálny model rizika, životné poistenie, jazyk R

### Abstract

The aim of the paper is to model insurance payments on individual death insurance policies using the Monte Carlo simulation in R language. We use simulation of the number of insurance payments for individual cases of occurrence of insurance event or in individual insurance groups. The statistical processing of the data can give a realistic view of the development of the mentioned portfolio in the period under review. The paper also deals with the analysis of the impact of the number of insurance contracts on the accuracy of the value at risk determination. This is based on generating total claim values in comparison with using normal approximation.

### Key words

Modeling, simulation, individual risk model, life insurance, language R

### JEL classification

C63, G22

## 1 Úvod

Príspevok sa zaoberá problematikou súvisiacou so životným poistením, konkrétne poistením pre prípad úmrtia. Portfólio poistných zmlúv sa môže skladať z rôznych skupín, do ktorých sú poistenci zaradení na základe určitých kritérií (vek poistenca, zdravotné indispozície, povolanie). V rámci poistenia pre prípad úmrtia je v príspevku rozlíšený prípad úmrtia následkom úrazu, resp. iným prípadom ako je úraz. Vytvorením modelu skúmaného portfólia poistných zmlúv a uskutočňovaním experimentov s ním prostredníctvom simulácií sa dá lepšie pochopiť jeho správanie a to v zrýchlenom čase. Doba, ktorá uplynie medzi určitým cieľovým zásahom do modelu a okamihom, kedy môžeme objektívne zhodnotiť dôsledky zásahu, býva v praxi dosť dlhá. Je potrebné poznamenať, že v rámci zostrojenia simulačného modelu dochádza ku konfrontácii matematického, programátorského a štatistického pohľadu. Využitie simulácií je opodstatnené hlavne vtedy, keď vytvorený model reálneho systému nie je možné

---

<sup>1</sup> doc. Mgr. Vladimír Mucha, PhD., Ekonomická univerzita v Bratislave, Fakulta hospodárskej informatiky, Katedra matematiky a aktuárstva, Dolnozemska cesta 1/b, 852 35 Bratislava, vladimir.mucha@euba.sk.

riešiť analytickými postupmi, resp. by to bolo extrémne náročné (Hušek, R., & Lauber, J., 1987). V prípade portfólií s veľkým počtom poistných zmlúv je použitie štandardných prístupov na určenie rozdelenia celkovej škody (Laplaceová transformácia, resp. Fourierová transformácia) numericky a časovo náročné aj v prípade ich počítačovej realizácie. Na druhej strane použitie aproximatívnych prístupov nemusí vždy zabezpečiť presné výsledky (aproximácia normálnym rozdelením), resp. si vyžaduje existenciu aj vyšších začiatočných momentov celkovej škody.

A práve tu sa otvára priestor pre simulácie, ktoré sme v príspevku využili na modelovanie poistných plnení pre jednotlivé poistné zmluvy práve so zámerom určenia rozdelenia celkovej škody. So simuláciami úzko súvisí metóda Monte Carlo, ktorá numericky rieši pravdepodobnostné úlohy pomocou organizovaných štatistických pokusov. Podľa jej princípu sme opakovaným modelovaním vývoja daného portfólia získali na základe štatistického spracovania nasimulovaných dát informácie potrebné pre aktuárske výpočty. Simulácie umožňujú aj modelovanie počtu poistných plnení a to aj pre jednotlivé skupiny, resp. pre jednotlivé príčiny úmrtia počas sledovaného obdobia. Prezentovaným spôsobom získa aktúár reálnejšiu predstavu o portfóliu, ktorú môže podporiť vizualizáciou jednotlivých analyzovaných atribútov.

Z pohľadu aktúára je dôležitým aspektom v riadení rizika zabezpečenie solventnosti daného portfólia prostredníctvom vytvorenia určitej kapitálovej požiadavky. Jednou z možností pre kvantitatívne meranie rizika je odhad najhoršej možnej škody, ktorá môže vzniknúť za uvažované obdobie s predpokladanou pravdepodobnosťou pomocou miery rizika  $VaR$ . Vzhľadom na fakt, že rozdelenia celkovej škody nie je symetrické, použitie aproximácie normálnym rozdelením by na chvoste rozdelenia hodnotu  $VaR$  mohlo podhodnotiť. V prípade portfólia s malým počtom zmlúv by bola nepresnosť dosiahnutých výsledkov ešte výraznejšia (Kaas, R., Goovaerts, M., Dhaene, J., Denuit, M., 2008). V nasledujúcej časti príspevku si predstavíme individuálny model rizika, ktorý je vhodný na popísanie uvedeného portfólia poistných zmlúv životného poistenia.

## 2 Individuálny model rizika

Uvažujeme o portfóliu  $n$  nezávislých poistných zmlúv, pričom ich počet sa počas sledovaného obdobia nemení a na každú poistnú zmluvu môže nastať najviac jedno poistné plnenie. Potom celkovú škodu z daného portfólia popíšeme náhodnou premennou  $S^{IND}$ , pre ktorú platí

$$S^{IND} = X_1 + X_2 + \dots + X_n, \quad (1)$$

kde náhodná premenná  $X_i$  popisuje výšku škody z  $i$ -tej poistnej zmluvy,  $i = 1, 2, \dots, n$ , pričom ju môžeme vyjadriť pomocou dvoch ďalších premenných  $Y_i, N_i$  a to vzťahom

$$X_i = N_i \cdot Y_i, \quad (2)$$

kde

- náhodná premenná  $Y_i$  predstavuje výšku poistného plnenia z  $i$ -tej poistnej zmluvy, za predpokladu, že nastala poistná udalosť.
- náhodná premenná  $N_i$  popisuje počet škôd z  $i$ -tej poistnej zmluvy a na základe predpokladov sa riadi alternatívnym rozdelením  $N_i \sim A(q_i)$ , nadobúda teda hodnotu 0 s pravdepodobnosťou  $1 - q_i$  a hodnotu 1 s pravdepodobnosťou  $q_i$ .
- náhodné premenné  $Y_1, \dots, Y_n, N_1, \dots, N_n$  sú nezávislé (Horáková, G., Páleš, M., & Slaninka, F., 2015).

Pre základné charakteristiky celkovej škody  $E(S^{IND})$  a  $D(S^{IND})$  platí

$$E(S^{IND}) = E(X_1) + E(X_2) + \dots + E(X_n) \quad (3)$$

$$D(S^{IND}) = D(X_1) + D(X_2) + \dots + D(X_n) \quad (4)$$

Individuálny model rizika je určený pre životné poistenie napríklad pre poistenie pre prípad úmrtia poistenca počas sledovaného obdobia. V príspevku budeme uvažovať o dvoch možnostiach vzniku poistnej udalosti a to úmrtie následkom úrazu s vyplácanou poistnou sumou  $b_{i1}$ , resp. úmrtie iným spôsobom ako úrazom s poistnou sumou  $b_{i2}$ . Potom rozdelenie náhodnej premennej  $X_i$  popisujúcej výšku škody je dané pravdepodobnostnou funkciou  $p_{X_i}(x)$ , tabuľka 1, kde  $q_i = q_{i1} + q_{i2}$  je pravdepodobnosť úmrtia poistenca.

Tab.1: Pravdepodobnostná funkcia  $p_{X_i}(x)$

|              |           |          |          |
|--------------|-----------|----------|----------|
| $x$          | 0         | $b_{i1}$ | $b_{i2}$ |
| $p_{X_i}(x)$ | $1 - q_i$ | $q_{i1}$ | $q_{i2}$ |

Zdroj: Vlastné spracovanie

### 3 Modelovanie poistných plnení a ich počtu v prostredí jazyka R

Na generovanie výšky poistného plnenia na jednotlivých poistných zmluvách využijeme v prostredí jazyka R funkciu `sample`, ktorá nám umožní realizovať simuláciu hodnôt  $\{0, b_{i1}, b_{i2}\}$  z požadovaného diskretného rozdelenia náhodnej premennej  $X_i$  na základe opakovaného náhodného výberu. V prípade hodnoty 0 budeme v rámci uvedeného kontextu hovoriť o nulovom poistnom plnení a hodnotu škody  $b_{i1}$ , resp.  $b_{i2}$  prezentovať ako poistné plnenie. Pre naše potreby si predstavíme základnú syntax funkcie `sample` (Páleš, M., 2017).

`sample(x, size, replace, prob)`

`x` - je vektor, ktorého zložky sú hodnotami danej diskretnéj náhodnej premennej  $X_i$ , resp. vo všeobecnosti vektor položiek, z ktorých budeme náhodne vyberať.

`size` - je počet vygenerovaných hodnôt danej diskretnéj náhodnej premennej, resp. vo všeobecnosti veľkosť vytvorenej vzorky po náhodnom výbere zo zadaných položiek.

`replace` - v prípade hodnoty `True` budú jednotlivé hodnoty náhodnej premennej vyberané s možnosťou ich opakovania, v prípade hodnoty `False` sa hodnoty vo vytvorenej vzorke neopakujú.

`prob` - je vektor, ktorého zložky sú hodnotami pravdepodobnostnej funkcie náhodnej premennej  $X_i$ . Tieto hodnoty sú podľa poradia priradené k jednotlivým hodnotám vektora `x` a určujú realizáciu náhodného výberu jeho jednotlivých hodnôt na základe príslušnej pravdepodobnosti.

Portfólio poistných zmlúv je v praxi rozdelené do skupín podľa veku poistenca, jeho zdravotných indispozícií, prípadne typu povolania. To znamená, že je v jednej skupine výška škody popísaná na každej poistnej zmluve rovnakou náhodnou premennou  $X_i$ .

Na opakovanie generovania hodnôt náhodnej premennej  $X_i$  v tejto skupine využijeme funkciu `replicate`. Pre naše potreby si predstavíme základnú syntax tejto funkcie.

`replicate(n, expr, simplify)`

$n$  - je počet vygenerovaných hodnôt náhodnej premennej  $X_i$ , resp. počet opakovaní generovania poistných plnení z danej skupiny.

`expr` - výraz, ktorý sa opakovane vyhodnocuje, v našom prípade ho zastupuje generovanie hodnôt náhodnej premennej  $X_i$ .

`simplify` - predvolená hodnota `True` znamená, že funkcia `replicate` vráti výsledok v podobe vektora.

V prípade portfólia rozdeleného do skupín  $a, b, \dots, z$ , t. j.

$$S^{IND} = \underbrace{X_1 + \dots + X_A}_a + \underbrace{X_{A+1} + \dots + X_B}_b + \dots + \underbrace{X_{V+1} + \dots + X_n}_z, \quad (5)$$

by sme opakovaným generovaním poistného plnenia na jednotlivých poistných zmluvách získali v prvej simulácii  $n$  hodnôt poistných plnení, ktorých súčtom je prvá hodnota celkovej škody, resp. celkového poistného plnenia, len pripomíname, že nulovú hodnotu škody  $X_i$  označujeme ako nulové poistné plnenie

$$s_1 = \underbrace{X_1 + \dots + X_A}_a + \underbrace{X_{A+1} + \dots + X_B}_b + \dots + \underbrace{X_{V+1} + \dots + X_n}_z. \quad (6)$$

Popísaný algoritmus realizujeme  $m$  krát v prostredí jazyka R a získame tak  $m$  simulovaných hodnôt celkovej škody, resp. celkového poistného plnenia  $s_1, s_2, \dots, s_m$ .

V rámci modelovania daného portfólia je možné uskutočniť aj analýzu počtu poistných plnení so špecifikáciou pre jednotlivé skupiny, resp. pre celé portfólio so zameraním sa na príčiny vzniku poistnej udalosti. Na modelovanie počtu poistných plnení využijeme popísaný simulačný prístup doplnený o funkcie `subset` a `length` z prostredia jazyka R, ktoré zabezpečia registráciu počtu poistných plnení. Pre naše potreby si predstavíme základnú syntax funkcie `subset` a `length`

`subset(x, subset)`

$x$  - je vektor hodnôt, z ktorého funkcia `subset` získa podsúbor na základe splnenia danej podmienky, t. j.

$$x = \left( \underbrace{X_1, \dots, X_A}_a, \underbrace{X_{A+1}, \dots, X_B}_b, \dots, \underbrace{X_{V+1}, \dots, X_n}_z \right).$$

`subset` - je podmienka, na základe ktorej vytvárame daný podsúbor.

`length(podsubor)`

`podsubor` - je vektor hodnôt, funkcia `length` určí počet jeho zložiek.

Takto získané hodnoty môžeme štatisticky spracovať a získať tak potrebné informácie o danom portfóliu poistných zmlúv pre aktuárske analýzy. Napríklad pomocou funkcie

quantile určíme kvantil  $x_{1-\varepsilon}$  náhodnej premennej, resp. hodnotu miery rizika  $VaR_{1-\varepsilon}(S^{IND})$ , pre ktorú platí

$$VaR_{1-\varepsilon}(S^{IND}) = x_{1-\varepsilon} = \inf \{x \in R : F_{S^{IND}}(x) \geq (1-\varepsilon)\}. \quad (7)$$

$VaR_{1-\varepsilon}(S^{IND})$  interpretujeme ako maximálnu škodu, resp. poistné plnenie, ktoré nastane s pravdepodobnosťou  $1-\varepsilon$  za určité obdobie (Cipra, T., 2015).

Funkcia quantile má nasledovnú syntax

quantile(x, probs)

$x$  - je vektor vygenerovaných hodnôt celkovej škody  $S^{IND}$ , z ktorých chceme určiť daný kvantil.

probs - je vektor pravdepodobností, ktoré určujú odhadovaný kvantil.

#### 4 Praktická realizácia

Táto časť príspevku sa zaoberá modelovaním portfólia poistných zmlúv životného poistenia pre prípad úmrtia v danom období využitím prostredia jazyka R. V prvej časti rozdelíme poistencov do dvoch skupín.

$$S^{IND} = \underbrace{X_1 + \dots + X_{4000}}_a + \underbrace{X_{4001} + \dots + X_{10000}}_b \quad (8)$$

V prípade vzniku poistnej udalosti bude vyplatená príslušná poistná suma podľa príčiny úmrtia. Uvažujeme teda, že v prvej skupine je zaradených 4000 poistencov s pravdepodobnosťou úmrtia následkom úrazu 0,0005 a poistnou sumou 10000 p.j., resp. s pravdepodobnosťou úmrtia z iného dôvodu 0,002 a poistnou sumou 5000 p.j.. V druhej skupine je zaradených 6000 poistencov s pravdepodobnosťou úmrtia následkom úrazu 0,001 a poistnou sumou 4000 p.j., resp. s pravdepodobnosťou úmrtia z iného dôvodu 0,007 a poistnou sumou 2000 p.j.. Údaje o pravdepodobnostiach úmrtia  $q_i$ , resp. o poistných sumách  $b_{i1}, b_{i2}$  popísaných v kapitole 2 pre dve uvedené skupiny sú zapísané v tabuľkách pravdepodobnostných funkcií výšky škody, tabuľka 2 a tabuľka 3.

Tab. 2: Pravdepodobnostná funkcia výšky škody  $X_i$  zo skupiny **a**

|              |        |       |        |
|--------------|--------|-------|--------|
| $x$          | 0      | 5000  | 10000  |
| $p_{X_i}(x)$ | 0,9775 | 0,002 | 0,0005 |

Zdroj: Vlastné spracovanie

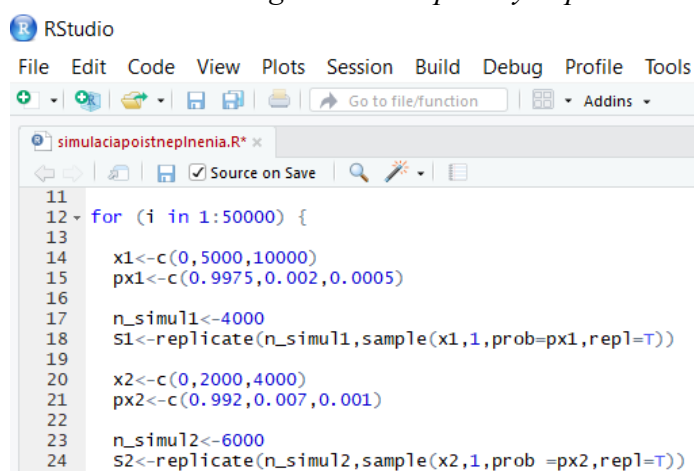
Tab. 3: Pravdepodobnostná funkcia výšky škody  $X_i$  zo skupiny **b**

|              |       |       |       |
|--------------|-------|-------|-------|
| $x$          | 0     | 2000  | 4000  |
| $p_{X_i}(x)$ | 0,992 | 0,007 | 0,001 |

Zdroj: Vlastné spracovanie

Na modelovanie poistných plnení v tomto portfóliu využijeme simulačný princíp popísaný v predchádzajúcej kapitole, ktorý zrealizujeme v prostredí RStudio. V tejto časti sa sústreďíme na modelovanie počtu poistných plnení a vytvoríme si prehľad z rôznych aspektov, napríklad určíme počet poistných plnení v prípade úmrtia následkom úrazu, resp. počet poistných plnení v rámci jednotlivých skupín. V rámci modelovania zrealizujeme využitím jazyka R 50 000 simulačných scenárov možného vývoja portfólia počas uvažovaného obdobia, obrázok 1.

Obr. 1: Ukážka časti kódu na generovanie poistných plnení v RStudio



```

11
12 for (i in 1:50000) {
13
14   x1<-c(0,5000,10000)
15   px1<-c(0.9975,0.002,0.0005)
16
17   n_simul1<-4000
18   S1<-replicate(n_simul1,sample(x1,1,prob=px1,rep1=T))
19
20   x2<-c(0,2000,4000)
21   px2<-c(0.992,0.007,0.001)
22
23   n_simul2<-6000
24   S2<-replicate(n_simul2,sample(x2,1,prob =px2,rep1=T))

```

Zdroj: Vlastné spracovanie

Na základe spracovania nasimulovaných hodnôt poistných plnení sme zaznamenali počet výskytov nulového poistného plnenia v každej z 50 000 simulácií, obrázok 2 a zobrazili ho graficky, obrázok 3, resp. aj vo výstupe vo forme tabuľky, obrázok 4.

Obr. 2: Časť kódu pre zaznamenanie počtu nulového poistného plnenia

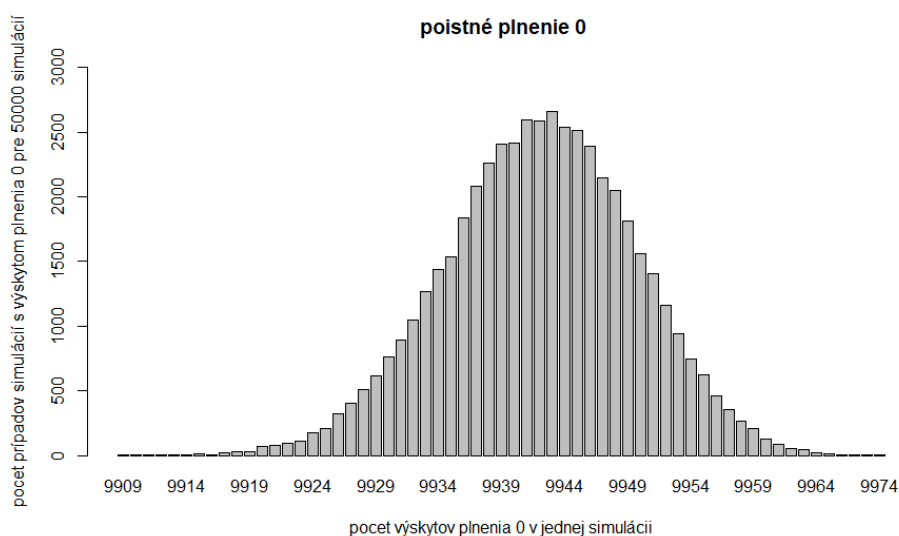
```

16 as0[i]<-length(subset(S1,S1==0))
17 bs0[i]<-length(subset(S2,S2==0))
18 nul[i]<-as0[i]+bs0[i]

```

Zdroj: Vlastné spracovanie

Obr. 3: Počet simulácií pre zaznamenané výskyty nulového poistného plnenia



Zdroj: Vlastné spracovanie

Obr. 4: Výstup vo forme tabuľky pre počet simulácií pre zaznamenané výskyty nulového poistného plnenia

```
> table(nul)
nul
9909 9910 9911 9912 9913 9914 9915 9916 9917 9918 9919 9920 9921 9922 9923 9924 9925 9926 9927 9928 9929 9930 9931
   3    2    2    1    3    7    9    7   19   29   28   67   74   98  110  176  212  322  405  507  614  763  890

9932 9933 9934 9935 9936 9937 9938 9939 9940 9941 9942 9943 9944 9945 9946 9947 9948 9949 9950 9951 9952 9953 9954
1044 1266 1435 1537 1840 2078 2258 2411 2415 2594 2584 2657 2536 2511 2387 2149 2051 1814 1557 1402 1159  940  746

9955 9956 9957 9958 9959 9960 9961 9962 9963 9964 9965 9966 9967 9969 9974
 627  462  353  265  210  129   87   56   43   22   15    6    4    1    1

Zdroj: Vlastné spracovanie
```

Na základe spracovania 50000 modelovaných scenárov portfólia sme určili priemerný počet výskytu jednotlivých alternatív poistného plnenia (0, 2000, 4000, 5000 a 10000) pre jednu simuláciu vývoja daného portfólia, ktoré je zložené z 10000 poistných zmlúv, tabuľka 4.

Tab. 4: Priemerný počet jednotlivých alternatív poistného plnenia v danom portfóliu

| poistné plnenie                            | 0    | 2000 | 4000 | 5000 | 10000 |
|--------------------------------------------|------|------|------|------|-------|
| priemerný počet výskytu v jednej simulácii | 9942 | 42   | 6    | 8    | 2     |

Zdroj: Vlastné spracovanie

*Poznámka 1:* Hodnoty priemerného počtu poistných plnení uvedené v tabuľke 4 sú zaokrúhlené na celé čísla a ich súčet je rovný počtu poistných zmlúv t. j.

$$9942 + 42 + 6 + 8 + 2 = 10000$$

Zo získaných údajov odhadneme očakávanú celkovú škodu, resp. celkové poistné plnenie  $E(S^{IND})$

$$E(S^{IND}) \approx 9942 \cdot 0 + 42 \cdot 2000 + 6 \cdot 4000 + 8 \cdot 5000 + 2 \cdot 10000 = 168000.$$

Táto hodnota korešponduje s očakávanou hodnotou celkovej škody, resp. celkového plnenia  $E(S^{IND})$  určenej na základe vzťahu (3)

$$E(S^{IND}) = 4000 \cdot 15 + 6000 \cdot 18 = 168000$$

Ak by sme potrebovali odhadnúť očakávané celkové poistné plnenie pre prípad úmrtia následkom úrazu, resp. úmrtia z iného dôvodu ako úraz, dostali by sme tieto výsledky

$$E(S_{\text{úraz}}^{IND}) \approx 6 \cdot 4000 + 2 \cdot 10000 = 44000 \quad E(S_{\text{iný}}^{IND}) \approx 42 \cdot 2000 + 8 \cdot 5000 = 124000.$$

Podobne by sme mohli odhadnúť participáciu oboch uvedených skupín **a**, **b** na očakávanom celkovom poistnom plnení

$$E(S_a^{IND}) \approx 8 \cdot 5000 + 2 \cdot 10000 = 60000 \quad E(S_b^{IND}) \approx 42 \cdot 2000 + 6 \cdot 4000 = 108000.$$

Modelovanie počtu poistných plnení môže prispieť k vytvoreniu reálnejšej predstavy o správaní sa analyzovaného portfólia a zároveň potvrdzuje správnosť navrhnutého simulačného algoritmu. V druhej časti sa zameriame na určenie hodnoty  $VaR$  pre rôzne veľké portfólia poistných zmlúv, ktoré sa budú tiež skladať z dvoch skupín ako v prvej časti praktickej ukážky. Rozdiel bude iba v rôznych počtoch poistných zmlúv v uvedených skupinách. Naším cieľom je analýza presnosti dosiahnutých výsledkov v kontexte komparácie simulácií s aproximáciou normálnym rozdelením. Uvedieme si pre lepšie pochopenie tejto problematiky podstatnú myšlienku jednej z centrálnych limitných viet, na základe ktorej je možné rozdelenie celkovej škody aproximovať normálnym rozdelením (Klugman, S., A., Panjer, H. H., & Willmot, G. E., 2012).

Predpoklad, že náhodná premenná celkovej škody  $S^{IND}$  je súčtom nezávislých náhodných premenných  $X_i, i = 1, \dots, n$

$$S^{IND} = X_1 + X_2 + \dots + X_n$$

s konečnou strednou hodnotou  $E X_i$  a disperziou  $D X_i$  je v uvažovanom portfóliu splnený. V prípade dostatočne veľkého počtu poistných zmlúv  $n$  sa podľa Lindeberg – Fellerovej vety rozdelenie normovanej náhodnej premennej  $Z = \frac{S^{IND} - E(S^{IND})}{\sqrt{D(S^{IND})}}$  má asymptoticky normované normálne rozdelenie, čo zapíšeme

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P Z \leq z = \Phi z, \quad (9)$$

s podmienkou regularity, podľa ktorej sú disperzie jednotlivých náhodných premenných  $X_i$  v porovnaní s ich súčtom veľmi malé, čo môžeme zapísať

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{D(X_i)}{D(S^{IND})} = 0, i = 1, \dots, n. \quad (10)$$

Aproximáciu rozdelenia celkovej škody  $S^{IND}$  normálnym rozdelením môžeme realizovať na základe tejto vety podľa vzťahu

$$F_{S^{IND}}(x) = P(S^{IND} \leq x) = P\left(\frac{S^{IND} - E(S^{IND})}{\sqrt{D(S^{IND})}} \leq \frac{x - E(S^{IND})}{\sqrt{D(S^{IND})}}\right) \approx \Phi\left(\frac{x - E(S^{IND})}{\sqrt{D(S^{IND})}}\right) = F_N(x), \quad (11)$$

čo zapíšeme

$$S^{IND} \approx N(E(S^{IND}); D(S^{IND})). \quad (12)$$

V prostredí RStudia sme vygenerovali 50 000 hodnôt celkovej škody a pomocou funkcie *quantile* sme určili hodnoty  $VaR_{0,95}(S^{IND})$  a  $VaR_{0,99}(S^{IND})$  pre rôzne veľké portfólia, ktoré sú rozdelené na dve skupiny **a**, **b**, ich popis je uvedený v tabuľke 5.



Tab. 5: Informácie o počte poistných zmlúv v skúmaných portfóliách

| počet zmlúv<br>v portfóliu | počet zmlúv<br>v skupine <b>a</b> | počet zmlúv<br>v skupine <b>b</b> | $E(S^{IND})$ | $D(S^{IND})$ |
|----------------------------|-----------------------------------|-----------------------------------|--------------|--------------|
| 500                        | 200                               | 300                               | 8400         | 33397800     |
| 1000                       | 400                               | 600                               | 16800        | 66795600     |
| 2000                       | 800                               | 1200                              | 33600        | 133591200    |
| 5000                       | 2000                              | 3000                              | 84000        | 333978000    |
| 10000                      | 4000                              | 6000                              | 168000       | 667956000    |

Zdroj: Vlastné spracovanie

*Poznámka 2:* Rozdelenie výšky škody  $X_i$  v skupine **a** je identické s rozdelením definovaným v tabuľke 2 a v skupine **b** s rozdelením definovaným v tabuľke 3 vo všetkých portfóliách.

Porovnanie hodnôt  $VaR_{0,95}(S^{IND})$  a  $VaR_{0,99}(S^{IND})$  odhadnutých na základe simulácií s hodnotami určenými pomocou aproximácie normálnym rozdelením je pre predstavené portfólia uvedené v tabuľke 6.

Tab. 6: Porovnanie simulácií a aproximácie normálnym rozdelením pri určení hodnôt  $VaR_{0,95}(S^{IND})$  a  $VaR_{0,99}(S^{IND})$  pre jednotlivé portfólia

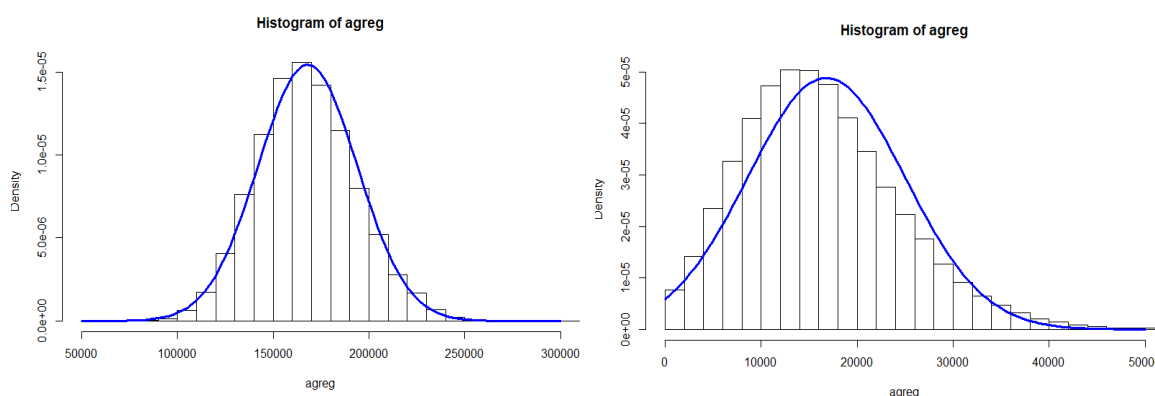
| počet zmlúv<br>v portfóliu | $VaR_{0,95}^{sim}(S^{IND})$ | $VaR_{0,95}^{norm}(S^{IND})$ | $VaR_{0,99}^{sim}(S^{IND})$ | $VaR_{0,99}^{norm}(S^{IND})$ |
|----------------------------|-----------------------------|------------------------------|-----------------------------|------------------------------|
| 500                        | 19000                       | 17905,74559                  | 25000                       | 21844,15739                  |
| 1000                       | 32000                       | 30243,15433                  | 40000                       | 35812,90971                  |
| 2000                       | 54000                       | 52611,49117                  | 64000                       | 60488,31477                  |
| 5000                       | 115000                      | 114059,8069                  | 131000                      | 126514,1586                  |
| 10000                      | 211000                      | 210510,9866                  | 231000                      | 228124,0996                  |

Zdroj: Vlastné spracovanie

Z výsledkov uvedených v tabuľke 6 je zrejmé, že v prípade portfólia s malým počtom poistných zmlúv (napríklad 1000) sú hodnoty  $VaR_{0,95}(S^{IND})$  a  $VaR_{0,99}(S^{IND})$  získané aproximáciou normálnym rozdelením viac podhodnotené ako v prípade portfólia s veľkým počtom poistných zmlúv (napríklad 10000). Pre portfólio zložené z 2000 poistných zmlúv hodnota  $VaR_{0,99}^{norm}(S^{IND}) = 60488,31477$  predstavuje najväčšie možné poistné plnenie, ktoré môže vzniknúť za sledované obdobie s pravdepodobnosťou 0,99. V porovnaní s hodnotou  $VaR_{0,99}^{sim}(S^{IND}) = 64000$ , ktorá bola určená simuláciou, je evidentne podhodnotená.

Pre názornosť si v rámci modelovania celkovej škody, resp. celkového poistného plnenia zobrazíme histogram relatívnej početnosti jeho vygenerovaných hodnôt spolu s grafom hustoty pravdepodobnosti daného normálneho rozdelenia  $N(E(S^{IND}), D(S^{IND}))$  pre dva počty poistných zmlúv v portfóliách, obrázok 5.

Obr. 5: Histogram z vygenerovaných 50 000 hodnôt celkovej škody pre portfólio zložené z 10 000 poistných zmlúv (vľavo) a pre portfólio zložené z 1000 poistných zmlúv (vpravo)



Zdroj: Vlastné spracovanie

Na základe vizuálneho posúdenia oboch situácií na obrázku 5 môžeme konštatovať, že normálne rozdelenie pre portfólio s malým počtom zmlúv nie je vhodným modelom na popisovanie rozdelenia celkovej škody, resp. celkového poistného plnenia.

## 5 Záver

Príspevok prezentuje modelovanie poistných plnení portfólia poistných zmlúv v rámci poistenia pre prípad úmrtia využitím jazyka R. Je zameraný na modelovanie počtu poistných plnení v rámci celého portfólia alebo skupiny, resp. z pohľadu príčiny úmrtia. Simulácia 50 000 scenárov a určenie priemerného počtu poistných plnení pre jednotlivé alternatívy vzniku poistnej udalosti tak vytvára reálnejšiu predstavu o správaní sa skúmaného portfólia. Na druhej strane modelovanie celkového poistného plnenia umožňuje realizovať aktuárske výpočty zamerané na riadenie rizika v rámci zabezpečenia solventnosti poisťovne. Vytvorenie frekvenčného histogramu z vygenerovaných hodnôt celkového poistného plnenia nám poskytuje vizuálnu predstavu o jeho rozdelení. Realizáciou dostatočného počtu simulácií sa vieme dopracovať k presným výsledkom aj v prípade portfólií s veľkým počtom poistných zmlúv. V tomto prípade v porovnaní s inými metódami vystupujú simulácie ako efektívny riešiteľský nástroj.

**Príspevok bol spracovaný v rámci riešenia grantovej úlohy VEGA č. 1/0120/18 *Moderné nástroje riadenia rizika v interných modeloch poisťovní v kontexte direktívy Solvency II.***

## Literatúra

- [1] Cipra, T. (2015). *Riziko ve financích a pojišťovnictví: Basel III a Solvency II*. Praha: Ekopress.
- [2] Horáková, G., Páleš, M., & Slaninka, F. (2015). *Teória rizika v poistení*. Bratislava: Wolters Kluwer.
- [3] Hušek, R., & Lauber, J. (1987). *Simulační modely*. Praha: STNL.
- [4] Kaas, R., Goovaerts, M., Dhaene, J., Denuit, M. (2008), *Modern actuarial risk theory using R*, Berlin: Springer.
- [5] Klugman, S., A., Panjer, H. H., & Willmot, G. E. (2012). *Loss Models (From Data to Decision)*. New York: John Wiley & Sons.
- [6] Páleš, M. (2017). *Jazyk R v aktuárskych analýzach*. Bratislava: Ekonóm.