Generovanie stochastických modelov zdravotného poistenia s podporou open source systému Maxima

Jozef Fecenko[1], Lea Škrovánková[2]

Abstrakt

Príspevok je zameraný na štúdium stochastických modelov v zdravotnom poistení predovšetkým na využitie Markovových procesov. Táto problematika sa stáva byť dôležitou aj z hľadiska pandémie ochorenia na Covid-19. Hlavným výsledkom príspevku je programový kód v open source systéme Maxima na generovanie stochastických modelov viacstavových modelov zdravotného poistenia. Jeho univerzálnosť je v tom, že dokáže jednak vygenerovať spomínané modely vo forme systému diferenciálnych rovníc so začiatočnými podmienkami a riešiť tento systém v spomínanom softvéri.

Kľúčové slová

zdravotné poistenie, viacstavové modely, Markovove procesy, matica prechodu, matica intenzít prechodu, open source systém Maxima

Abstract

The paper focuses on the study of stochastic models in health insurance, especially on the use of Markov processes. This issue is also becoming important in view of the disease pandemic on Covid-19. The main result of the paper is the program code in the open source system Maxima for generating stochastic models of multistate models of health insurance. Its versatility is that it can generate the mentioned models in the form of a system of differential equations with initial conditions and its solution in the mentioned software.

Key words

health insurance, multistate models, Markov processes, matrix of transition, matrix of transition intensity, Maxima open source system

JEL classification

C4, I1, K3

1 Úvod

Plnohodnotný život človeka súvisí v prvom rade s jeho primeraným zdravotným stavom. Existujú štúdie o tom, ktoré osobnostné črty predlžujú a skvalitňujú život človeka. Vieme, že niektoré sú genetický dané, iné zasa závisia od osobnostných charakteristík jednotlivca.

Za posledných niekoľko rokov sa priemerná dĺžka života predĺžila, a preto sa dá predpokladať, že v nastúpenom trende bude aj naďalej pokračovať. Zároveň môžeme všeobecne konštatovať, že ľudia žijú dlhšie a kvalitnejšie. Avšak bez ohľadu na vek či pohlavie, kvalitu života ľudí čoraz častejšie ohrozujú rôzne tzv. civilizačné choroby a v poslednom období pandémia Civid-19. Tieto ochorenia sa veľmi rozšírili a stávajú sa globálnym

[1] Ekonomická univerzita v Bratislave, Fakulta hospodárskej informatiky, Katedra matematiky a aktuárstva, Dolnozemská cesta 1, 852 35 Bratislava, jozef.fecenko@euba.sk

[2] Ekonomická univerzita v Bratislave, Fakulta hospodárskej informatiky, Katedra matematiky a aktuárstva, Dolnozemská cesta 1, 852 35 Bratislava, skrovankova.euba@gmail.com

problémom pre celé obyvateľstvo. Medzi najčastejšie vyskytujúce sa ochorenia patria obezita, vysoký krvný tlak, cukrovka, srdcový infarkt a v neposlednom rade rakovina ale aj Covid-19 (www.employment.gov.sk/zmeny-od-1.-aprila-2012-posledna-novela.html, 2018). Dôležitým benefitom je absencia nutnosti dokazovať trvalú invaliditu, či práceneschopnosť spôsobenú závažnou chorobou. Na druhej strane sa však toto poistenie môže zdať neúplným, pretože poistenec môže počas doby poistenia ochorieť na niekoľko vážnych chorôb, ktoré nie sú spomenuté v poistnej zmluve. V tomto príspevku ukážeme, akým spôsobom je možné modelovať priebeh vzniku kritického ochorenia využijúc aktuársku matematiku a časovo spojitý model s Markovovou vlastnosťou.

2 Modely zdravotného poistenia v súčasnosti

Pri aplikáciách v operačnej analýze a v ekonómii sa najčastejšie využívajú typy náhodných procesov so spojitým parametrom (časom) a diskrétnymi (nespojitými) stavmi (Potocký, 2012). Ide o procesy s jednoduchou väzbou prebiehajúce v spojitom čase, ktoré nazývame Markovove procesy.

V súčasnosti poisťovne využívajú rôzne aktuárske modely založené na stochastických Markovových procesoch. V druhej polovici minulého storočia sa v poisťovníctve začali používať viacstavové modely, ktoré sa s jednotlivými obmenami používajú až dodnes. Základom modelovania je voľba množiny stavov, v ktorom sa môže osoba v priebehu života nachádzať a ďalej určenie, akým spôsobom dochádza k prechodu medzi jednotlivými stavmi.

Majme konečnú množinu stavov $S(x) = \{1,2,\dots,n\}$, kde x predstavuje vek poistenca. Pravdepodobnosť toho, že v čase $x+t$ sa osoba nachádza v stave j, za predpokladu, že v čase x bola v stave i označíme:

$$p_{ij}(x,x+t) = P\left[S(x+t) = \frac{j}{S(x)} = i\right] \text{ pre } \quad i,j \in \{1,2,\dots,n\}\,. \tag{1}$$

Pravdepodobnosti $p_{ij}(x,x+t)$ závisia len od x a nezávisia od informácie o čase pred x. Hovoríme o pravdepodobnosti prechodu zo stavu i do stavu j. Vzhľadom na to, že systém sa zo stavu i v čase x musí dostať v čase $x+t$ do niektorého z existujúcich stavov, musí platiť

$$\sum_{j=1}^{n} p_{ij}(x,x+t) = 1, \text{pre } \forall x,t \geq 0 \text{ a pevné ale ľubovoľné } i\,. \tag{2}$$

Teda

$$[S(x) = x : 0 \leq x < \omega] \tag{3}$$

s vlastnosťou (1) predstavuje nehomogénny Markovov proces s konečným počtom n možných stavov so spojitým časom x, kde ω je jeho horné ohraničenie.

Definujeme intenzitu pravdepodobnosti prechodu zo stavu S_i do stavu S_j:

$$\mu_{ij}(x) = \begin{cases} \lim\limits_{t\to 0^+} \frac{p_{ij}(x,x+t)}{t} = \mu_{ij}(x) & \text{ak } \ i \neq j \\ \lim\limits_{t\to 0^+} \frac{1-p_{ii}(x,x+t)}{t} = \mu_{ii}(x) & \text{ak } \ i = j \end{cases} \tag{4}$$

Vyjadríme $p_{ij}(x, x+t+h)$ pomocou $p_{ik}(x, x+t)$ a $p_{kj}(x+t, x+t+h)$ pre pevné zvolené i a j, využijúc vetu o úplnej pravdepodobnosti

$$p_{ij}(x, x+t+h) = \sum_{k=1}^{n} p_{ik}(x, x+t) p_{kj}(x+t, x+t+h) \tag{5}$$

.

Pre $i = j$ dostávame:

$$p_{jj}(x+t, x+t+h) = 1 - \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq j}}^{n} p_{js}(x+t, x+t+h). \tag{6}$$

Pre $i \neq j$ z definície intenzity prechodu (4) dostaneme:

$$p_{ij}(x+t, x+t+h) \cong h\mu_{ij}(x+t) + o_{ij}(h), \tag{7}$$

pričom $o_{ij}(h)$ reprezentuje funkciu, ktorá konverguje k nule rýchlejšie ako lineárna funkcia. Ide o tzv. funkciu rádu nula (symbol „o" sa v matematike tiež nazýva Landauov symbol), pre ktorý platí:

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{o_{ij}(h)}{h} = 0. \tag{8}$$

Potom pomocou vzťahov (6) a (7) vyjadríme $p_{jj}(x+t, x+t+h)$:

$$p_{jj}(x+t, x+t+h) \cong 1 - h \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq j}}^{n} \left[\mu_{js}(x+t) + \frac{o_{js}(h)}{h} \right] \tag{9}$$

.

Po postupnom dosadení vzťahov (6), (7) a (9) do (5) dostávame:

$$p_{ij}(x, x+t+h) = p_{ij}(x, x+t) p_{jj}(x+t, x+t+h) + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n} p_{ik}(x, x+t) p_{kj}(x+t, x+t+h)$$

$$\cong p_{ij}(x, x+t) \left\{ 1 - h \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq j}}^{n} \left[\mu_{js}(x+t) + \frac{o_{js}(h)}{h} \right] \right\} + h \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n} p_{ik}(x, x+t) \left[\mu_{kj}(x+t) + \frac{o_{kj}(h)}{h} \right] \tag{10}$$

Po odčítaní z oboch strán rovnice (10) $p_{ij}(x, x+t)$ a predelení h máme:

$$\frac{p_{ij}(x, x+t+h) - p_{ij}(x, x+t)}{h}$$

$$\cong -p_{ij}(x, x+t) \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq j}}^{n} \left[\mu_{js}(x+t) + \frac{o_{js}(h)}{h} \right] + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n} p_{ik}(x, x+t) \left[\mu_{kj}(x+t) + \frac{o_{kj}(h)}{h} \right]$$

Predpokladáme, že funkcia $p_{ij}(x, x+t)$ je diferencovateľná, potom limitným prechodom pre $h \to 0^+$ dostaneme systém diferenciálnych rovníc v tvare:

$$\frac{\partial}{\partial t} p_{ij}(x, x+t) = -p_{ij}(x, x+t) \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq j}}^{n} \mu_{js}(x+t) + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n} p_{ik}(x, x+t) \mu_{kj}(x+t), \tag{12}$$

$i, j = 1,2, \dots, n$

Uvedený systém diferenciálnych rovníc predstavuje matematický stochastický model uvažovaného modelu nemocenského poistenia..

V praxi sa veľmi často využívajú štvor a viacstavové modely poistenia (Škrovánková, L., Škrovánková, P., 2010). Ide hlavne o modelovanie v rámci dôchodkového, či nemocenského poistenia. Aktuárske modely založené na stochastických Markovových procesoch však možno využiť aj pri modelovaní poistenia kritických chorôb, ktoré poskytuje poistenému jednorazové plnenie v prípade rôznych rizikových ochorení uvedených v poistnej zmluve. V súčasnosti existujú rôzne modifikácie modelov pre tento druh poistenia (podrobne napr. v (Baione, F., Levantesi, S. 2014) a (Kováč, E. (2008)).

3 Ilustrácia generovania viacstavového stochastického modelu s podporou Maximy

V tejto časti príspevku budeme ilustrovať techniku generovania stochastického modelu s piatimi stavmi, ktorý znázorňuje priebeh určitej konkrétnej kritickej choroby, napr. rakovina v niekoľkých štádiách. V ňom sú taktiež uvedené aj možné prechody medzi jednotlivými stavmi. Je nutné poznamenať, že v prípade opustenia nejakého stavu osoby vo veku x, neexistuje už možný návrat späť.

Budeme uvažovať tieto stavy:

stav 1 – rizikový stav, počiatočné štádium choroby, ktoré je liečiteľné,

stav 2 - rozvinuté štádium choroby,

stav 3 - posledné, nevyliečiteľné štádium choroby,

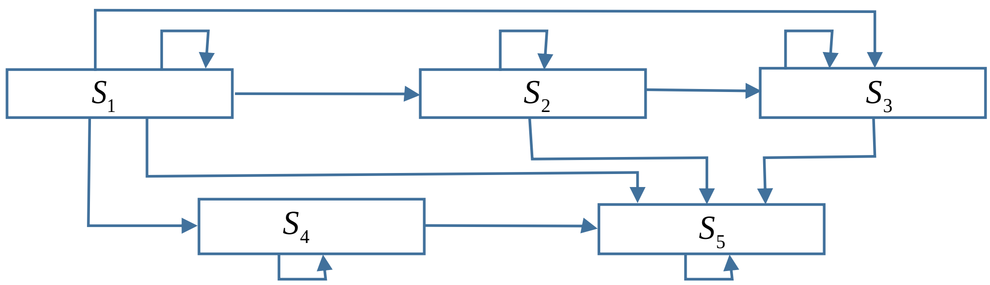
stav 4 - zdravý,

stav 5 - mŕtvy.

Stav rizikový je vstupný stav pre každého jedinca prichádzajúceho do modelu. Postupne sa osoba môže vyliečiť alebo sa choroba zhorší. Samozrejme, pre jednotlivca v stave 1 až 4 je možnosť úmrtia, t. j. prechod do stavu 5. Vzhľadom na konštantnosť intenzít prechodu, doba, ktorú osoba strávi v nejakom stave, nemá vplyv na budúce obdobie, počas ktorého ešte osoba zotrvá v danom stave.

Uvažujme päťstavový systém dôchodkového poistenia, ktorý je daný schémou na obr. 1.

Obr. 1. Päťstavový Markovovský model



Aktuárske funkcie, napríklad dôchodky, poistenia na úmrtie alebo rezervy počítané pre osobu vo veku x, sú zložitými funkciami intenzít prechodu vo viacstavovom modeli. Ich citlivosť na zmeny intenzít môže byť vysvetlená pomocou výpočtov vedených v rôznych počítačových programoch, niektorým sa venujeme aj v tomto príspevku.

Na matematické vyjadrenie daného modelu opäť využijeme systém Kolmogorových diferenciálnych rovníc, kde $p_{ij}(x, x+t)$ je pravdepodobnosť toho, že x- ročná osoba, ktorá sa nachádza v stave i, po uplynutí t rokov bude v stave j.

Matica pravdepodobností prechodu má tvar:

$$P(x,x+t) = \begin{pmatrix} p_{11}(x,x+t) & p_{12}(x,x+t) & p_{13}(x,x+t) & p_{14}(x,x+t) & p_{15}(x,x+t) \\ 0 & p_{22}(x,x+t) & p_{23}(x,x+t) & 0 & p_{25}(x,x+t) \\ 0 & 0 & p_{33}(x,x+t) & 0 & p_{35}(x,x+t) \\ 0 & 0 & 0 & p_{44}(x,x+t) & p_{45}(x,x+t) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Nulový prvok matice $p_{ij}(x,x+t) = 0$ reprezentuje skutočnosť, že zo stavu S_i nie je možný pramy prechod do stavu S_j.

Matica intenzít prechodu má tvar:

$$A(x) = \begin{pmatrix} -\mu_{12}(x)-\mu_{13}(x)-\mu_{14}(x)-\mu_{15}(x) & \mu_{12}(x) & \mu_{13}(x) & \mu_{14}(x) & \mu_{15}(x) \\ 0 & -\mu_{23}(x)-\mu_{25}(x) & \mu_{23}(x) & 0 & \mu_{25}(x) \\ 0 & 0 & -\mu_{35}(x) & 0 & \mu_{35}(x) \\ 0 & 0 & 0 & -\mu_{45}(x) & \mu_{45}(x) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Z modelu vyplýva že:

$$p_{ij}(x,x+t) = 0 \text{ pre } i > j$$

podobne:

$$p_{24}(x,x+t) = p_{34}(x,x+t) = 0.$$

3.1 Zdrojový kód na generovanie viacstavového stochastického modelu – hlavný výsledok

Zápis systému diferenciálnych rovníc zjednodušíme skráteným zápisom vhodnejším pre Maximu. Namiesto označenia funkcií $p_{ij}(x,x+t)$ použijeme jednoduchší zápis $pij(t)$, $i,j = 1,2,\dots,n$, ktorý je vhodnejší pre zadávanie funkcií do systému Maxima.

Požiadavkou pre vygenerovania matematického stochastického modelu je zadanie typu matice pravdepodobnosti prechodu s uvedením pravdepodobnosti medzi ktorými je prechod nemožný a zadanie matice intenzít prechodu.

Prepíšme príkazy z Maximy do aktuálneho textového súboru.

Zadanie matice pravdepodobnosti prechodu v Maxime:

```
/* Matica pravdepodobnosti prechodu */
P: matrix( [p11(t),p12(t),p13(t),p14(t),p15(t)],
 [0,p22(t),p23(t),0,p25(t)],
 [0,0,p33(t),0,p35(t)],
```

```
[0,0,0,p44(t),p45(t)],
[0,0,0,0,1] );
```

$$\begin{bmatrix} p11(t) & p12(t) & p13(t) & p14(t) & p15(t) \\ 0 & p22(t) & p23(t) & 0 & p25(t) \\ 0 & 0 & p33(t) & 0 & p35(t) \\ 0 & 0 & 0 & p44(t) & p45(t) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Zadanie matice intenzít prechodu v Maxime:

```
/* Matica intenzít prechodu */
A: matrix( [-(µ12+ µ13+µ14+µ15),µ12, µ13,µ14,µ15],
           [0,-(µ23+µ25),µ23,0,µ25],
           [0,0,-µ35,0,µ35],
           [0,0,0,-µ45,µ45],
           [0,0,0,0,0]);
```

$$\begin{bmatrix} -\mu 15-\mu 14-\mu 12 & \mu 12 & \mu 13 & \mu 14 & \mu 15 \\ 0 & -\mu 25-\mu 23 & \mu 23 & 0 & \mu 25 \\ 0 & 0 & -\mu 35 & 0 & \mu 35 \\ 0 & 0 & 0 & -\mu 45 & \mu 45 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Hlavným výsledkom príspevku je zdrojový kód open source systému Maxima, ktorý umožňuje vygenerovať matematický stochastický model. V našom prípade situáciu ilustrujeme na 5-stavovom modeli zdravotného poistenia. Predkladaný softvér je univerzálny v tom, že vytvorí model ľubovoľného stavového modelu tým, že načíta do vstupných hodnôt rozmer matice prechodu, resp. matice intenzít a načíta prvky matice pravdepodobnosti prechodu, ktoré nie sú nulové a načíta prvky matice intenzít prechodu.

```
/* Vstupné softvérové  hodnoty  softvéru generujúceho stochastický model  */
  r:1$ eqns:[]$ pijs:[]$ n:first(matrix_size(P))$
/* Zdrojový kód v Maxime generujúci stochastických model zdravotného poistenia so
začiatočnými podmienkami */
  for i:1 thru n do (for j:1 thru n  do (
/* Generovanie diferenciálnej rovnice */
    drov:sconcat(" 'diff(",P[i,j], ",t)=", -P[i,j]*sum(A[j,s]*abs(signum(s-j)),s,1,n)+
    sum(P[i,k]*A [k,j]*abs(signum(k-j)),k,1,n)),
   tst: (-P[i,j]*sum(A[j,s]*abs(signum(s-j)),s,1,n)+sum(P[i,k]*A[k,j]*abs(signum(k-j)),k,1,n)),
   if (tst # 0 and P[i,j] # 0)  then  (print (sconcat(eqn,r,":",drov)),
   eqns:append(eqns,[concat(eqn,r)]),
    pijs:append(pijs,[concat(" p",i,j,"(t)") ] ),r:r+1,
```

```
/* Generovanie začiatočnej podmienky */
  if i#j then print(sconcat("atvalue(",P[i,j],",t=0,",0,")")) else
  print(sconcat("atvalue(",P[i,j],",t=0,",1,")")))))$
/* Generovanie príkazu na riešenie systému diferenciálnych rovníc */
  print("desolve(",eqns,",",pijs,")");
```

Výstupom realizácie programu je matematický stochasicky model. Generované diferenciálne rovnice so začiatočnými podmienkami sú textové reťazce. Na nasledujúcom obrázku, ktorý je sken (výstrižok) výstupu z realizácie programu, textové reťazce (s úvodzovkami) nevidieť.

Obr. 2. Sken (výstrižok) z výstupu z realizácie programu

```
eqn1: 'diff(p11(t),t)=-p11(t)*(µ15+µ14+µ13+µ12)
atvalue(p11(t),t=0,1)
eqn2: 'diff(p12(t),t)=p11(t)*µ12-p12(t)*(µ25+µ23)
atvalue(p12(t),t=0,0)
eqn3: 'diff(p13(t),t)=(-p13(t)*µ35)+p12(t)*µ23+p11(t)*µ13
atvalue(p13(t),t=0,0)
eqn4: 'diff(p14(t),t)=p11(t)*µ14-p14(t)*µ45
atvalue(p14(t),t=0,0)
eqn5: 'diff(p15(t),t)=p14(t)*µ45+p13(t)*µ35+p12(t)*µ25+p11(t)*µ15
atvalue(p15(t),t=0,0)
eqn6: 'diff(p22(t),t)=-p22(t)*(µ25+µ23)
atvalue(p22(t),t=0,1)
eqn7: 'diff(p23(t),t)=p22(t)*µ23-p23(t)*µ35
atvalue(p23(t),t=0,0)
eqn8: 'diff(p25(t),t)=p23(t)*µ35+p22(t)*µ25
atvalue(p25(t),t=0,0)
eqn9: 'diff(p33(t),t)=-p33(t)*µ35
atvalue(p33(t),t=0,1)
eqn10: 'diff(p35(t),t)=p33(t)*µ35
atvalue(p35(t),t=0,0)
eqn11: 'diff(p44(t),t)=-p44(t)*µ45
atvalue(p44(t),t=0,1)
eqn12: 'diff(p45(t),t)=p44(t)*µ45
atvalue(p45(t),t=0,0)
desolve( [ eqn1,eqn2,eqn3,eqn4,eqn5,eqn6,eqn7,eqn8,eqn9,eqn10,eqn11,eqn12] ,
[ p11(t), p12(t), p13(t), p14(t), p15(t), p22(t), p23(t), p25(t), p33(t), p35(t), p44(t), p45(t)] )
```

Posledný dvoj-riadok je príkaz na riešenie systému diferenciálnych rovníc so začiatočnými podmienkami.

Našou ďalšou úlohou je zmeniť textové reťazce na príkazy systému Maxima. Po skopírovaní z Maximy (spomínaný výstup) príkazom Copy a opätovnom vložení do Maximy je vidieť, že výstup je vo forme textových reťazcov. Toto zobrazenie kvôli obmedzenému rozsahu príspevku neuvádzame. Odstránime úvodzovky a pridáme znak dolár ($) na konci každého riadku, využijúc príkaz Upraviť/Hľadať – Nahradiť. Na konci posledného riadku pridáme bodkočiarku (;). Dostaneme súbor príkazov systému Maxima, ktorý je spustiteľný v Maxime. Túto úpravu môžeme urobiť pohodlne ja v akomkoľvek textovom editore.

```
eqn1: 'diff(p11(t),t)=-p11(t)*(μ15+μ14+μ13+μ12)$
atvalue(p11(t),t=0,1)$
eqn2: 'diff(p12(t),t)=p11(t)*μ12-p12(t)*(μ25+μ23)$
atvalue(p12(t),t=0,0)$
eqn3: 'diff(p13(t),t)=(-p13(t)*μ35)+p12(t)*μ23+p11(t)*μ13$
atvalue(p13(t),t=0,0)$
eqn4: 'diff(p14(t),t)=p11(t)*μ14-p14(t)*μ45$
atvalue(p14(t),t=0,0)$
eqn5: 'diff(p15(t),t)=p14(t)*μ45+p13(t)*μ35+p12(t)*μ25+p11(t)*μ15$
atvalue(p15(t),t=0,0)$
eqn6: 'diff(p22(t),t)=-p22(t)*(μ25+μ23)$
atvalue(p22(t),t=0,1)$
eqn7: 'diff(p23(t),t)=p22(t)*μ23-p23(t)*μ35$
atvalue(p23(t),t=0,0)$
eqn8: 'diff(p25(t),t)=p23(t)*μ35+p22(t)*μ25$
atvalue(p25(t),t=0,0)$
eqn9: 'diff(p33(t),t)=-p33(t)*μ35$
atvalue(p33(t),t=0,1)$
eqn10: 'diff(p35(t),t)=p33(t)*μ35$
atvalue(p35(t),t=0,0)$
eqn11: 'diff(p44(t),t)=-p44(t)*μ45$
atvalue(p44(t),t=0,1)$
eqn12: 'diff(p45(t),t)=p44(t)*μ45$
atvalue(p45(t),t=0,0)$
desolve( [eqn1,eqn2,eqn3,eqn4,eqn5,eqn6,eqn7,eqn8,eqn9,eqn10,eqn11,eqn12],
[ p11(t), p12(t), p13(t), p14(t), p15(t), p22(t), p23(t), p25(t), p33(t), p35(t), p44(t), p45(t)]);
```

Posledný príkaz (desolve) je príkaz, ktorý spustí riešenie modelu – vygenerovaného systému diferenciálnych rovníc so zadanými začiatočnými podmienkami. Jednotlivé diferenciálne rovnice sú očíslované. Zadáme príkaz na realizáciu programu. Ak chceme spustiť len tento súbor príkazov, nastavíme sa kurzorom do niektorého riadku týchto príkazov a zadáme príkaz CTRL+Enter (ak už bola načítaná v Maxime matica prechodu a matica intenzít prechodu). Ak chceme spustiť realizáciu všetkých príkazov v Maxime zadáme príkaz CTRL+Shift+Enter alebo CTRL + R.

Vygenerované riešenie systému diferenciálnych rovníc môžeme z Maximy skopírovať pomocou rôznych poskytovaných typov príkazov na kopírovanie. Pre ilustráciu uvedieme napr. čiastočné riešenie, ktoré sme získali v Maxime riešením systému diferenciálnych rovníc

$$p25(t) = \frac{\mu23\, \%e^{-t\,\mu35}}{\mu35 - \mu25 - \mu23} - \frac{\%e^{-t\,(\mu25 + \mu23)}\,(\mu35 - \mu25)}{\mu35 - \mu25 - \mu23} + 1$$

Príkazom Copy môžeme vložiť do MS Wordu. Dostaneme formát rovnice v Office Mat ML[3].

$$\mathrm{p25}(t) = \frac{\mu 23\%\mathrm{e}^{-t\mu 35}}{\mu 35 - \mu 25 - \mu 23} - \frac{\%\mathrm{e}^{-t(\mu 25+\mu 23)}(\mu 35 - \mu 25)}{\mu 35 - \mu 25 - \mu 23} + 1$$

Výsledné vzorce si môžeme podľa potreby graficky upraviť do prijateľného požadovaného tvaru, napríklad tak, že $pij(t)$ upravíme na $p_{ij}(x, x+t)$ a vyjadrenia μij upravíme na $\mu_{ij}(x)$. Teda napríklad na tvar

$$\mathrm{p}_{25}(x, x+t) = \frac{\mu_{23}(x)\mathrm{e}^{-t\mu_{35}(x)}}{\mu_{35}(x) - \mu_{25}(x) - \mu_{23}(x)} - \frac{\mathrm{e}^{-t(\mu_{25}(x)+\mu_{23}(x))}\big(\mu_{35}(x) - \mu_{25}(x)\big)}{\mu_{35}(x)\mu_{25}(x) - \mu_{23}(x)} + 1$$

Poznamenajme, že výsledné riešenie systému diferenciálnych rovníc v mnohých prípadov Maxima dokáže vyjadriť všeobecne aj keď nie sú zadané číselné hodnoty matice intenzít.

Maticu intenzít môžeme interpretovať na intervale $(x, x+t)$ ako konštantnú funkciu pre dané prirodzené číslo x a kladné t, napríklad $t = 1$ (jeden rok).

Na základe správnych a komplexných informácií a pri zohľadnení miestnych podmienok možno získať dôležité informácie pri oceňovaní rizika a pri kalkulácii poistného daného poistného produktu.

4 Záver

Za hlavný prínos príspevku považujeme kreovaný softvérov produkt, ktorý dokáže z typu matice prechodu a matice intenzít prechodu vygenerovať systém Kolmogorovských diferenciálnych rovníc, ktorý je matematickým modelom riešeného viacstavového modelu zdravotného poistenia, resp. penzijného poistenia a pod. Navyše systém Maxima dokáže aj riešiť takýto systém diferenciálnych rovníc. Vypočítané pravdepodobnosti predstavujú dôležité informácie pri kalkulácii poistného daného poistného produktu. Pomáhajú pri oceňovaní rizika a pri plnení záväzkov poisťovne, ktorá dokáže a potrebuje nasimulovať očakávaný počet poistných udalostí. Výsledky príspevku môžu byť využite v poistnej praxi ale jeho veľké vyžitie vidíme v pedagogickom procese na študijnom programe Aktuárstvo. Vzhľadom na to, že využívaný systém Maxima, v ktorom bol zdrojový kód vytvorený je open source a zdrojový kód sa dá jednoducho skopírovať z elektronickej publikácie príspevku v časopise a vložiť do Maximy, neobmedzuje jeho použitie v pedagogickom procese alebo v poistnej praxi.

Príspevok bol spracovaný v rámci riešenia grantovej úlohy VEGA 1/0647/19: Moderné nástroje na riadenie a modelovanie rizík v neživotnom poistení a grantovej úlohy VEGA č. 1/0120/18: Moderné nástroje riadenia rizika v interných modeloch poisťovní v kontexte direktívy Solvency II.

[3] Poznamenajme, že ak by sme chceli vkladať vzorce z Maximy do MS Word do formátu MS Equation Editor 3.0 použijeme editor Math Type Equation, do ktorého vložíme vzorec z Maximy tak, že ho skopírujeme ako Copy as LaTeX.

Literatúra

[1] Baione, F., Levantesi, S. (2014). *A health insurance pricing model based on prevalence rates: Application to critical illnes insurance.* Insurance: Mathematics and Economics.
[2] Fecenko, J. (2018). *Teória pravdepodobnosti II v MAXIME.* Bratislava: Letra Edu.
[3] Huťka, V. (2002). *Teória pravdepodobnosti II.* Bratislava: Ekonóm.
[4] Kováč, E. (2008). *Zdravotné poistenie.* Bratislava: Ekonóm.
[5] Lamoš, F. P. (1998). *Pravdepodobnosť a matematická štatistika. 2. vyd.* . Bratislava: UK.
[6] Mojžišová, E., Škrovánková, P. (2010). Transformačné kroky v zdravotnom poistení a analýza zdravotnej starostlivosti v SR. *Ekonomika a informatika*.
[7] Páleš, M. (2015). Využitie a konštrukcia úmrtnostných tabuliek v životnom poistení. . *Slovenská štatistika a demografia 2015(1)*.
[8] Potocký, R. (2012). *Modely v životnom a neživotnom poistení.* Bratislava: STATIS.
[9] Rievajová, E. a. (2011). *Sociálne zabezpečenie.* Bratislava: Ekonóm.
[10] Rovný, I. (2009). *Verejné zdravotníctvo.* Bratislava: Ekonóm.
[11] Sekerová, V., Bilíková, M. (2005). *Poistná matematika.* Bratislava: Ekonóm.
[12] Simonka, Zs., Kaderová, A., Škrovánková, L. (2017). Actuarial modeling of random processes in the health insurance using differential equations. *MITAV: 4. ročník konference.* Brno: FVT UO.
[13] Slaninka, F., Simonka, Zs. (2017). Probability distributions in maxima software. *MITAV: 4. ročník konference.* Brno: FVT UO.
[14] Škrovánková, L. (2013). *Zdravotné a nemocenské poistenie.* Bratislava: Ekonóm.
[15] Škrovánková, L., Fecenko,J. (2018). *Stochastické modely nemocenského poistenia a ich riešenie v open source systéme Maxima*. Bratislava: Letra Edu.
[16] Škrovánková, L., Škrovánková, P. (2010). *Dôchodkové, zdravotné a nemocenské poistenie*. Bratislava: Ekonóm.
[17] Škrovánková, P. (2011). Modely prerozdelenia poistného v zdravotnom poistení. *Ekonomika a informatika* .
[18] Šoltés, M., Delina, R. (2004). Analýza online poisťovníctva. *Ekonomie a management 7(4).*
[19] www.employment.gov.sk/zmeny-od-1.-aprila-2012-posledna-novela.html. (2018).
[20] www.fmed.uniba.sk/fileadmin/user_upload/admin/Veda-vyskum/zdravotna_starostlivost. (2018).
[21] www.hpi.sk. (2018).
[22] www.socpoist.sk. (2017).
[23] www.unipo.sk/public/media/17467/Syst%C3%A9m%starostlivost. (2017).