

Porovnanie stochastických modelov úmrtnosti na údajoch Slovenska

Jana Kútiková¹

Abstrakt

Cieľom príspevku je porovnanie dvoch najznámejších stochastických modelov úmrtnosti – Lee-Carterov model a Cairns-Blake-Dowdov model, s využitím údajov o úmrtnosti populácie Slovenska. Údaje o úmrtnosti pochádzajú zo stránky mortality.org a sledujú obdobie od vzniku Slovenskej republiky (1993) do roku 2017. Na odhad parametrov modelov bola použitá metóda najmenších štvorcov, a tiež metóda Habermana a Russoliloa. Na prognózovanie časovo závislých parametrov bol aplikovaný model autoregresného integrovaného kĺzavého priemeru ARIMA. Prognóza úmrtnosti populácie na Slovensku je stanovená na najbližšie tri roky. Výsledky boli numericky a graficky porovnané a ukazujú rozdiely medzi modelmi, ktoré dokazujú výskyt modelovaného rizika.

Kľúčové slová

Vekovo špecifická centrálna miera úmrtnosti, Lee-Carterov model, CBD model, metóda Habermana a Russoliloa, metóda najmenších štvorcov, ARIMA

Abstract

The aim of the paper is to compare the two most well-known stochastic mortality models – Lee-Carter model and Cairns-Blake-Dowd model, using mortality data of the Slovak population. Mortality data come from mortality.org and cover the period from the establishment of the Slovak Republic (1993) to 2017. The least squares method was used to estimate the parameters of the models, as well as the method of Haberman and Russolilo. The autoregressive integrated moving average model ARIMA was applied to predict time-dependent parameters. The mortality forecast is set for the next three years. The results were compared numerically and graphically showing the differences between the models that prove the existence of the modelled risk.

Key words

Age-specific mortality rates, Lee-Carter model, CBD model, Haberman-Russolilo method, Least Squared method, ARIMA

JEL classification

C52, J11

1 Úvod

Úmrtnosť obyvateľstva sa neustále vyvíja. Kvalita života sa každým rokom zvyšuje, čo sa samozrejme odráža na vývoji úmrtnosti, ktorá sa za posledné desaťročia výrazne zlepšila. Je to okrem iného spôsobené technickým pokrokom v medicíne, sociológii, farmácii a iných vedách, ktoré priamo alebo nepriamo súvisia so smrťou. Úmrtnosť je významným predpokladom aktuárskej bázy. Dramatický pokles úmrtnosti predstavuje veľmi vážne finančné riziká pre životné poisťovne, pre ktoré je znalosť úmrtnostného správania obyvateľstva v závislosti od veku kľúčovým faktorom mnohých poisťno-matematických výpočtov, ako je výpočet poisťného a technických rezerv. Očakávania o úmrtnostnom správaní poisťného kmeňa úzko súvisia s typom produktu životnej poisťovne. Podhodnotenie úmrtnosti má negatívny

¹ Ekonomická univerzita v Bratislave, Fakulta hospodárskej informatiky, Katedra štatistiky, Dolnozemska cesta 1, 852 35 Bratislava, jana.kutikova@euba.sk.

vplyv na dočasné poistenie na úmrtie a naopak, v prípade dôchodkového poistenia môže práve nadhodnotenie úmrtnosti viesť k vysokým stratám poisťovne. Čím presnejšie je možné odhadnúť pravdepodobnosť úmrtia poistencov, tým nižšie je riziko nesprávneho ocenenia poistnej zmluvy (resp. nevhodného uloženia finančných prostriedkov). Poisťovne sa opierajú o dlhodobé pozorovania, ktorých zdrojom sú úmrtnostné tabuľky. Tieto úmrtnostné tabuľky si môže poisťovňa vytvárať sama na základe informácií o úmrtnosti vo svojom poistnom portfóliu alebo pre presnejšie hodnoty môže použiť informácie o úmrtnostnom správaní populácie v danej krajine.

Prvé pokusy o modelovanie úmrtnosti boli založené na deterministických scenároch. To viedlo k vytvoreniu zákonov úmrtnosti, ktoré opisujú úmrtnosť v pevnom časovom okamihu, a tým podceňujú zlepšenie úmrtnosti, pretože skutočná úmrtnosť je stochastická a neustále sa vyvíja. Existuje niekoľko stochastických modelov úmrtnosti, ale všeobecne ich môžeme rozdeliť do troch tried. Prvou je trieda modelov Lee-Carter, ktorej hlavným predstaviteľom je Lee-Carter model (LC). Výhodou tohto modelu je jeho jednoduchosť, vďaka ktorej sa stal veľmi populárnym. Používa sa na modelovanie a predpovedanie úmrtnosti v mnohých krajinách, ako sú USA (Lee a Carter, 1992), Čína (Lin, 1995), Japonsko (Wilmoth, 1996), India (Singh a Ram, 2004 a Yadav et al., 2012), škandinávske krajiny (Kossi et al., 2006) a mnoho ďalších. Nevýhody tejto triedy modelov spočívajú v tom, že nemodelujú vekové efekty a výsledné hodnoty nie sú vyrovnané. Druhou triedou modelov je P-spline, ktorý sa bežne používa vo Veľkej Británii, ale v iných častiach sveta už toľko nie. Posledná je trieda modelov Cairns-Blake-Dowd (CBD) s hlavným zástupcom CBD modelom. V porovnaní s triedou Lee-Carter obsahujú špecifickú funkčnú formu pre každý vekový efekt a okrem toho v rovnakom roku sú hodnoty vyrovnané medzi vekmi. Analýzu kvalitatívnych a kvantitatívnych charakteristík všetkých troch tried modelov vykonal Cairns a kol. (2011). Cieľom príspevku je porovnanie modelov Lee-Carter a Cairns-Blake-Down na populácii Slovenskej republiky. Podobný cieľ mali napríklad Safitri et al. (2019), ktorí aplikovali tieto dva modely na taliansku populáciu.

2 Údajová základňa

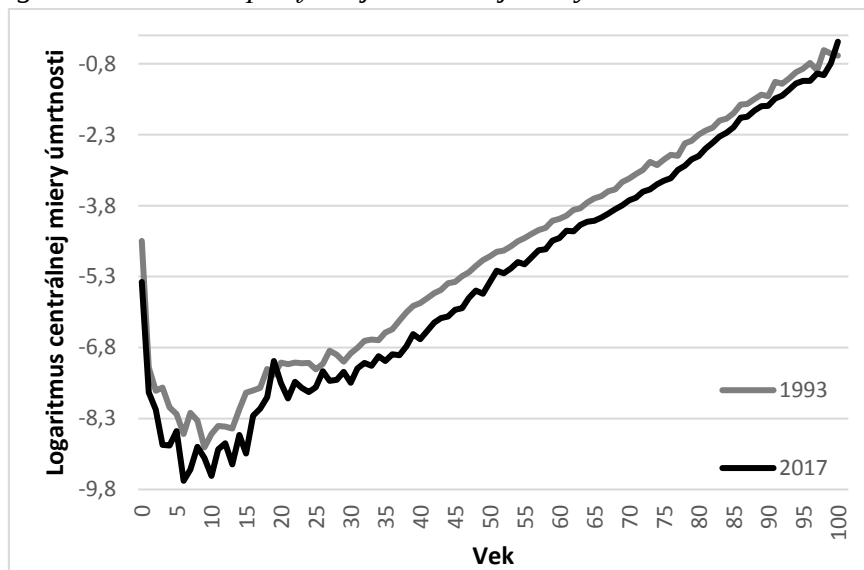
Naša štúdia vychádza z údajov o úmrtnosti obyvateľstva Slovenskej republiky v rokoch 1993 až 2017 získaných z webovej stránky mortality.org. Databáza o ľudskej úmrtnosti (HMD) poskytuje voľný medzinárodný prístup k podrobným údajom o populácii a o úmrtnosti pre 41 krajín. Z tejto databázy sme získali údaje o počte úmrtí v stanovenom veku na Slovensku za určitý čas a zodpovedajúcej rizikovej populácii rovnakého veku v rovnakej geografickej oblasti počas stanoveného časového obdobia štúdie, ktoré sú potrebné na výpočet vekovo špecifickej miery úmrtnosti pre vekové rozpätie od 30 do 100 rokov. Spodnú hranicu 30 rokov sme vybrali preto, lebo pri použití CBD modelu pre celé vekové skupiny je kvalita prispôsobenia pomerne zlá a projekcie sú biologicky neprimerané. Vzorec na výpočet vekovo špecifickej centrálnej miery úmrtnosti je nasledovný:

$$m_{x,t} = \frac{D_{x,t}}{L_{x,t}} \quad (1)$$

kde $D_{x,t}$ je počet zomretých vo veku x v čase t a $L_{x,t}$ predstavuje stredný stav obyvateľstva vo veku x v čase t . Zatiaľ čo Lee-Carterov model využíva pri odhadoch priamo centrálnu mieru úmrtnosti, pre CBD model potrebujeme odvodiť pravdepodobnosť úmrtia. Existujú dva spôsoby aproximácie centrálnej miery úmrtnosti $m_{x,t}$ pomocou pravdepodobnosti úmrtia osoby vo veku x v čase t , ktorú označujeme $q_{x,t}$. Prvý prístup, $q_{x,t} = 1 - e^{-m_{x,t}}$, je založený na predpoklade o konštantnej úmrtnosti medzi dvoma celočíselnými vekmi. Druhý prístup,

$q_{x,t} = \frac{m_{x,t}}{1+0,5m_{x,t}}$, je za predpokladu rovnomerného rozdelenia úmrtí medzi dvoma vekmi. V tomto článku je použitá prvá aproximácia pre transformáciu dát medzi $m_{x,t}$ a $q_{x,t}$.

Obr. 1: Logaritmus vekovo špecifickej centrálnej miery úmrtnosti v rokoch 1993 a 2017



Zdroj: vlastné spracovanie na základne údajov z mortality.org

Pri modelovaní neberieme do úvahy pohlavie ako faktor úmrtnosti z dôvodu právnych predpisov o poistení – Gender smernice (smernica Rady 2004/113 / ES z 13. decembra 2004, ktorou sa zavádza zásada rovnakého zaobchádzania s mužmi a ženami v prístupe k tovaru a službám a k ich poskytovaní). Príklad údajov o vekovo špecifickej centrálnej miere úmrtnosti je uvedený na obr. 1. Graficky je tu znázornený prirodzený logaritmus miery úmrtnosti bez ohľadu na pohlavie v rokoch 1993 a 2017. Vidíme, že úmrtnosť sa skutočne zlepšila za posledných 25 rokov pozdĺž celého vekového intervalu.

3 Stochastické modely a odhad parametrov

3.1 Lee-Carter model

Lee a Carter predstavili prvý stochastický model úmrtnosti v roku 1992. Model spočíva v kombinácii demografického modelu úmrtnosti s metódami prognózovania časových radov. Lee a Carter predpokladali, že logaritmy centrálnych mier úmrtnosti vyhovujú vzťahu:

$$\ln(m_{x,t}) = \beta_x^{(1)} + \beta_x^{(2)} \kappa_t^{(2)} + \varepsilon_{x,t} \quad (2)$$

Parameter $\beta_x^{(1)}$ opisuje všeobecný tvar logaritmu centrálnej miery úmrtnosti cez všetky veky. Tento parameter nie je závislý od času a predstavuje priemernú úmrtnosť ľudí v konkrétnom veku x . Jediný prvok závislý od času je parameter $\kappa_t^{(2)}$, ktorý charakterizuje fluktuáciu úrovne úmrtnosti v závislosti od času. Ak poklesne, znamená to, že úmrtnosť sa zlepšila a naopak ak vzrastie, svedčí to o zhoršujúcej sa úrovni úmrtnosti. $\beta_x^{(2)}$ určuje, ako táto zmena úrovne úmrtnosti ovplyvní centrálnu mieru úmrtnosti $m_{x,t}$ v konkrétnom veku x . Ak je vysoká v porovnaní s určitým vekom, znamená to, že úmrtnosť sa v tomto veku zlepšuje rýchlejšie ako v iných vekových skupinách. Naopak, ak by bol tento parameter negatívny, znamenalo by to,

že úmrtnosť sa v týchto vekoch zhoršuje. $\varepsilon_{x,t}$ predstavuje náhodnú zložku spôsobenú historickými vplyvmi, ktoré model nezachytil.

Pri odhadovaní parametrov musíme brať do úvahy obmedzenia, ktorých výber nemá vplyv na kvalitu modelu, preto je ich stanovenie individuálne. V literatúre sa však najčastejšie stretávame s obmedzeniami, ktoré navrhli samotní autori modelu, a teda $\sum_x \beta_x^{(2)} = 1$ a $\sum_t \kappa_t^{(2)} = 0$.

Atraktivita tohto modelu pramení najmä z jeho jednoduchosti, avšak má aj nejaké slabé stránky. Hlavná nevýhoda modelu spočíva v tom, že má iba jeden faktor, čo vedie k dokonalej korelácii vývoja úmrtnosti vo všetkých vekových skupinách (triviálna korelačná štruktúra). Lee-Carterov model neobsahuje kohortný efekt a v prípade krajín, kde bol tento efekt pozorovaný v minulosti, tento model nie je vhodný na modelovanie, pretože nezodpovedá historickým údajom. Aj napriek nevýhodám tohto modelu, jeho jednoduchosť viedla k tomu, že sa považuje za meradlo, na základe ktorého je možné hodnotiť ďalšie stochastické modely úmrtnosti.

3.2 Odhad parametrov Lee-Carter modelu

S použitím blízkej aproximácie singulárneho rozkladu matice (SVD) za predpokladu, že rezíduá sú homoskedastické, a že sú splnené obmedzenia $\sum_x \beta_x^{(2)} = 1$ a $\sum_t \kappa_t^{(2)} = 0$ pomocou aplikovania metódy najmenších štvorcov prišli Haberman a Russolilo (2005) k postupu odhadu parametrov. Podľa nich je postup výpočtu parametrov Lee-Carter modelu nasledovný:

1. Výpočet $\beta_x^{(1)}$ – vzhľadom na fakt, že tento parameter je fixný v čase, ale rozdielny naprieč vekovým skupinám, je vhodné ho vypočítať ako priemer všetkých $\beta_x^{(1)}$ v priebehu času.

$$\beta_x^{(1)} = \frac{1}{T} \sum_t \ln(m_{x,t}) \quad (3)$$

2. Ak nájdeme $\beta_x^{(1)}$ pre každý vek, môžeme vypočítať $\kappa_t^{(2)}$. Vo všeobecnosti odhadujeme hodnoty parametra $\kappa_t^{(2)}$ pre každý rok t podľa vzťahu:

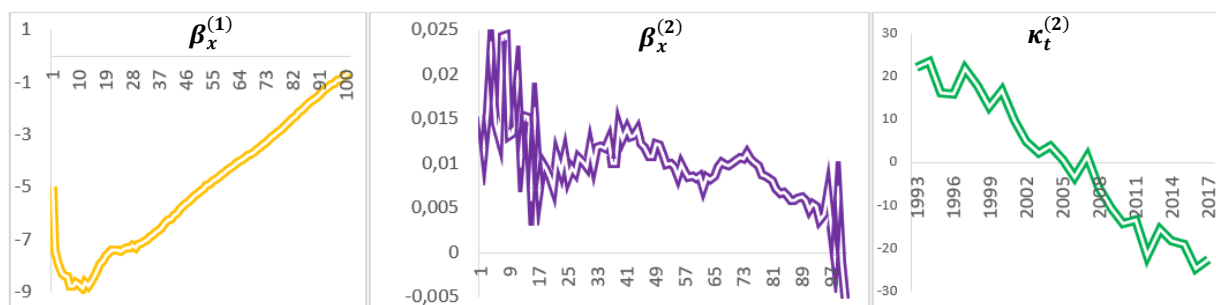
$$\kappa_t^{(2)} = \sum_x (\ln(m_{x,t}) - \beta_x^{(1)}) \quad (4)$$

3. $\beta_x^{(2)}$ v rovnici Lee-Carterovho modelu (2) vyjadruje vlastne sklon rozdielu medzi logaritmom miery úmrtnosti a $\beta_x^{(1)}$ v čase t v konkrétnom veku x a hodnotami parametra $\kappa_t^{(2)}$.

$$\beta_x^{(2)} = \frac{\sum_t \kappa_t (\ln(m_{x,t}) - \beta_x^{(1)})}{\sum_t \kappa_t^{(2)}} \quad (5)$$

4. V poslednom kroku sa odporúča prehodnotiť parametre $\kappa_t^{(2)}$ takým spôsobom, aby skutočná pozorovaná úroveň úmrtnosti bola v súlade s parametrami $\beta_x^{(1)}$ a $\beta_x^{(2)}$ získanými pre každý vek x .

Obr. 2: Parametre Lee-Carter modelu pre Slovensko



Zdroj: vlastné spracovanie

Všeobecný tvar krivky úmrtnosti reprezentovaný parametrom $\beta_x^{(1)}$ vykazuje vysokú dojčenskú úmrtnosť, havarijný hrb okolo veku 22 rokov a takmer exponenciálny nárast u starších vekových skupín. Citlivosť úmrtnosti $\beta_x^{(2)}$ naznačuje vyšší pokles úmrtnosti v ranom štádiu života okolo 5 – 15-teho roku ako v iných vekových skupinách. Index úmrtnosti $\kappa_t^{(2)}$ má klesajúci trend, čo naznačuje zlepšovanie (pokles) úmrtnosti v čase.

3.3 Cairns-Blake-Dowd model

V roku 2006 Cairns a kol. predstavili stochastický model, ktorý obsahuje dva časovo závislé parametre. Využíva relatívnu jednoduchosť (t. j. takmer lineárnosť logaritmu $q_{x,t}$) krivky úmrtnosti vo vyššom veku. Hlavná nevýhoda modelu CBD spočíva v tom, že bol navrhnutý pre vyšší vek, a preto ignoroval modelovanie úmrtnosti v nižšom veku (napríklad havarijný hrb alebo dojčenskú úmrtnosť). Cairns a kol. (2009) tvrdia, že značné náklady týkajúce sa úmrtnosti sú spojené s vyšším vekom, a preto sa ich modelovanie zameriavalo na tento vek. Model priamo využíva pravdepodobnosť úmrtia $q_{x,t}$ namiesto centrálnej miery úmrtnosti $m_{x,t}$. Model CBD možno vyjadriť ako:

$$\text{logit}(q_{x,t}) = \ln\left(\frac{q_{x,t}}{1-q_{x,t}}\right) = \kappa_t^{(1)} + \kappa_t^{(2)}(x - \bar{x}) + \varepsilon_{x,t} \quad (6)$$

kde

- x je vek ($x = x_1, x_2, \dots, x_p$),
- t je obdobie ($t = t_1, t_2, \dots, t_q$),
- $q_{x,t}$ je pravdepodobnosť úmrtia, presnejšie pravdepodobnosť, že osoba vo veku x v čase t zomrie v priebehu jedného roka,
- $\kappa_t^{(1)}$ a $\kappa_t^{(2)}$ sú dva stochastické procesy a predstavujú dva časové indexy modelu,
- $\bar{x}$ je priemerný modelovaný vek,
- $\varepsilon_{x,t}$ odráža náhodnú zložku spôsobenú historickými vplyvmi, ktoré model nezachytil.

Časový index $\kappa_t^{(1)}$ je úrovňovou konštantou modelu, ktorá predstavuje úroveň úmrtnosti v čase t a ovplyvňuje každý vek rovnakým spôsobom. Presnejšie povedané, ak sa časom znižuje, znamená to, že úmrtnosť sa v čase znižovala u všetkých vekových skupín. Časový index $\kappa_t^{(2)}$ predstavuje sklon modelu. Každý parameter je týmto parametrom ovplyvnený inak. Model nevyžaduje ďalšie obmedzenia. Parametre modelu CBD možno odhadnúť pomocou metódy najmenších štvorcov. Presnosť odhadovaných parametrov rastie so zväčšovaním rozsahu vstupných údajov.

3.4 Odhad parametrov CBD modelu

Metóda najmenších štvorcov sa používa na odhad parametrov pomocou minimalizácie súčtu štvorcových rezíduí. Aplikácia metódy najmenších štvorcov pre model CBD je nasledovná:

$$J = \sum_{x=x_1}^{x_p} \sum_{t=t_1}^{t_q} \left(\ln \left(\frac{q_{x,t}}{1-q_{x,t}} \right) - \kappa_t^{(1)} - \kappa_t^{(2)}(x - \bar{x}) \right)^2$$

Ďalej vypočítame parciálne derivácie podľa $\kappa_t^{(1)}$ a $\kappa_t^{(2)}$, aby sme minimalizovali J .

$$\frac{\partial J}{\partial \kappa_t^{(1)}} = \sum_{x=x_1}^{x_p} 2 \left(\ln \left(\frac{q_{x,t}}{1-q_{x,t}} \right) - \kappa_t^{(1)} - \kappa_t^{(2)}(x - \bar{x}) \right) = 0$$

$$\frac{\partial J}{\partial \kappa_t^{(2)}} = \sum_{x=x_1}^{x_p} 2(x - \bar{x}) \left(\ln \left(\frac{q_{x,t}}{1-q_{x,t}} \right) - \kappa_t^{(1)} - \kappa_t^{(2)}(x - \bar{x}) \right) = 0$$

Riešením systému lineárnych rovníc sa získajú najmenšie štvorcové odhady parametrov modelu CBD v tvare

$$\hat{\kappa}_t^{(1)} = \frac{\sum_{x=x_1}^{x_p} \ln \left(\frac{q_{x,t}}{1-q_{x,t}} \right) - \kappa_t^{(2)} \sum_{x=x_1}^{x_p} (x - \bar{x})}{p} \quad (7)$$

$$\hat{\kappa}_t^{(2)} = \frac{p \sum_{x=x_1}^{x_p} (x - \bar{x}) \ln \left(\frac{q_{x,t}}{1-q_{x,t}} \right) - \sum_{x=x_1}^{x_p} \ln \left(\frac{q_{x,t}}{1-q_{x,t}} \right) \sum_{x=x_1}^{x_p} (x - \bar{x})}{p \sum_{x=x_1}^{x_p} (x - \bar{x})^2 - \left(\sum_{x=x_1}^{x_p} (x - \bar{x}) \right)^2} \quad (8)$$

Výsledky odhadu parametrov $\kappa_t^{(1)}$ a $\kappa_t^{(2)}$ nahradíme v rovnici (6). A následne sa odhadovaná úmrtnosť porovná so skutočnou úmrtnosťou, aby sa zistila vhodnosť modelu. Chyba odhadu sa dá vypočítať pomocou priemerného súčtu štvorcov rezíduí MSE a štandardnej odchýlky rezíduí RMSE.

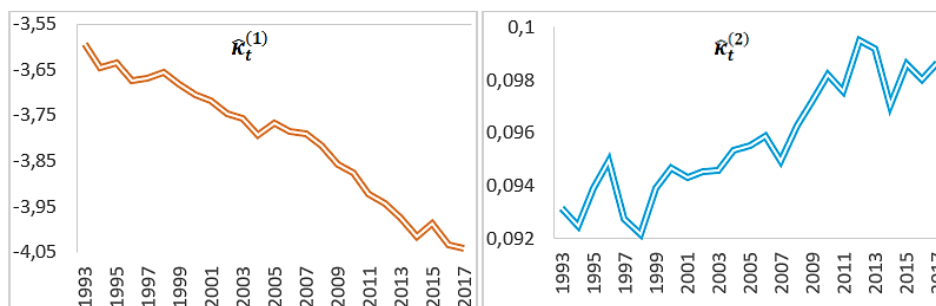
$$MSE = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - y_i)^2 \quad (9)$$

$$RMSE = \sqrt{MSE} \quad (10)$$

kde $\hat{y}_i$ je odhadovaná hodnota, y_i je skutočná hodnota a n je rozsah súboru.

Ako je uvedené na obr. 3, trend odhadovaného parametra $\kappa_t^{(1)}$ z roka na rok klesá, čo potvrdzuje myšlienku, že celková úroveň úmrtnosti sa v priebehu uvažovaného časového intervalu (medzi rokmi 1993 a 2017) zlepšila. Na druhej strane trend parametra $\kappa_t^{(2)}$ bol pomerne stabilný až do roku 2006, kedy sa rapídne zvýšil. Zmena $\kappa_t^{(2)}$ predstavuje zmenu strmosti krivky úmrtnosti. Rastúci trend signalizuje, že úmrtnosť v mladšom veku bola a bude klesať rýchlejšie ako v staršom veku. Hodnota MSE pre všetky vekové skupiny v priebehu analyzovaného obdobia je 0,012462. Druhá odmocnina tohto čísla predstavuje RMSE s hodnotou rovnajúcou sa 0,111631.

Obr. 3: Parametre CBD modelu pre Slovensko



Zdroj: vlastné spracovanie

4 Prognózovanie úmrtnosti na Slovensku

Prognózovanie je jednou zo základných črt stochastického modelovania. Model CBD pozostáva z dvoch časovo závislých parametrov, ktoré je potrebné predvídať. Pri Lee-Carterovom modeli je prognóza jednoduchšia, pretože závislý od času je len index úmrtnosti $\kappa_t^{(2)}$. Existuje niekoľko metód predikcie, napríklad použitie regresných kriviek alebo jednou z najpopulárnejších metód je ARIMA modelovanie (autoregresný integrovaný kľzavý priemer). Prístup ARIMA prvýkrát popularizovali Box a Jenkins, a preto sa modely ARIMA často označujú ako modely Box-Jenkins. Podľa používateľskej príručky SAS: Model ARIMA predpovedá hodnotu v časovom rade odozvy ako lineárnu kombináciu vlastných minulých hodnôt, minulých chýb (tiež nazývaných šoky alebo inovácie) a aktuálnych a minulých hodnôt iných časových radov. Poradie modelu ARIMA sa obvykle označuje zápisom ARIMA (p, d, q), kde p je poradie autoregresnej časti, d je poradie diferenciácie, q je poradie procesu kľzavého priemeru.

Zvážili sme niekoľko možných modelov ARIMA na prognózovanie parametrov oboch modelov. Na identifikáciu najvhodnejšieho modelu sme použili Akaikovo informačné kritérium (AIC). Všeobecne platí, že keď porovnávate modely, menšie AIC označuje lepšie vyhovujúci model. Podľa AIC je ARIMA (0,1,1) najlepšie vyhovujúcim modelom pre index úmrtnosti Lee-Carterovho modelu odhadovaného pre populáciu Slovenskej republiky bez uvažovania pohlavia ako faktora úmrtnosti s hodnotou AIC rovnou 131.63. Pre parametre CBD modelu taktiež vyšiel model ARIMA (0,1,1) za najvhodnejší s rôznymi hodnotami AIC. AIC parametra $\kappa_t^{(1)}$, ktorý zodpovedá úrovňovej konštante modelu, sa rovnal -114,8. Na druhej strane AIC $\kappa_t^{(2)}$ (sklon modelu) bolo ešte menšie s hodnotou -262. Výsledky sme získali pomocou softvéru SAS Enterprise Guide. Na predpovedanie budúcich hodnôt časovo závislých parametrov sme použili najvhodnejšie ARIMA modely.

Tab. 1: Prognózované hodnoty Lee-Carter parametra $\kappa_t^{(2)}$ s 95 % intervalom spoľahlivosti

Rok	Prognóza LC $\kappa_t^{(2)}$	95 % Interval spoľahlivosti	
2020	-30,4916	-37,9385	-23,0447
2021	-32,4777	-40,1038	-24,8515
2022	-34,4637	-42,265	-26,6625

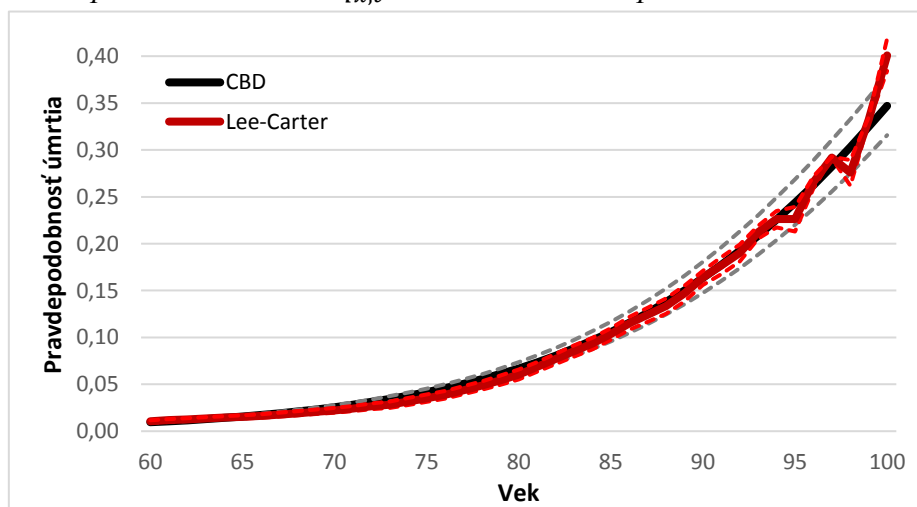
Zdroj: vlastné spracovanie na základe výstupu zo SAS Enterprise Guide

Tab. 2: Prognózané hodnoty CBD parametrov $\kappa_t^{(1)}$ a $\kappa_t^{(2)}$ s 95 % intervalmi spoľahlivosti

Rok	Prognóza CBD $\kappa_t^{(1)}$	95 % Interval spoľahlivosti	
2020	-4,0994	-4,1574	-4,0414
2021	-4,1179	-4,1825	-4,0533
2022	-4,1364	-4,207	-4,0657
Rok	Prognóza CBD $\kappa_t^{(2)}$	95 % Interval spoľahlivosti	
2020	0,099622	0,097638	0,101605
2021	0,099871	0,097867	0,101875
2022	0,10012	0,098096	0,102144

Zdroj: vlastné spracovanie na základe výstupu zo SAS Enterprise Guide

V tabuľkách 1 a 2 sme uviedli predpokladané hodnoty parametrov modelu CBD $\kappa_t^{(1)}$ a $\kappa_t^{(2)}$ spolu s jeho 95 % intervalmi spoľahlivosti na ďalšie tri roky. Trend vývoja týchto parametrov zostáva rovnaký, z čoho vyplýva, že v nasledujúcich rokoch sa očakáva pokles úmrtnosti obyvateľov Slovenska. Druhý parameter CBD modelu $\kappa_t^{(2)}$ má však rastúci trend, takže predpokladáme, že v budúcnosti bude úmrtnosť v mladšom veku klesať rýchlejšie ako v staršom veku.

Obr. 4: Pravdepodobnosti úmrtia $q_{x,t}$ s 95 % intervalmi spoľahlivosti LC a CBD modelu

Zdroj: vlastné spracovanie

Predpovedali sme hodnoty pravdepodobnosti úmrtia $q_{x,t}$ pomocou odhadovaných parametrov. Na obr. 4 vidíme odhadované hodnoty pravdepodobnosti úmrtia $q_{x,t}$ spolu s 95 % intervalom spoľahlivosti oboch stochastických modelov úmrtnosti, ktoré sú predmetom našej analýzy. Na obr. 4 sme graficky znázornili hodnoty pre vek vyšší ako 60 rokov, pretože pre nižšie veku sú modely takmer totožné. Pre staršiu populáciu sú odhadované hodnoty taktiež veľmi podobné. Na obr. 4 môžeme vidieť jednu z nevýhod Lee-Carterovho modelu spomínanú v úvode, ktorou je, že výsledné hodnoty nie sú vyhladené. Zrejmý rozdiel medzi modelmi vzniká v dôsledku intervalov spoľahlivosti, ktoré majú v prípade CBD modelu oveľa širšie hranice, takže môžeme povedať, že model je opatrnejší v predpovedaní pravdepodobnosti úmrtia. V konečnom dôsledku môžeme oba modely považovať za efektívne pri odhadovaní úmrtnostného správania populácie Slovenskej republiky, takže je možné ich použiť pri modelovaní úmrtnosti napríklad pri aktuárskych analýzach.

5 Záver

V článku sme porovnávali zástupcov dvoch hlavných tried stochastických modelov, a to Lee-Carterovho modelu a Cairns-Blake-Dowdovho modelu. Analýzu sme robili na údajoch o úmrtnosti populácie Slovenskej republiky v rokoch 1993 až 2017. Každý z modelov mal rôzne výhody a nevýhody.

Výhodou Lee-Carterovho modelu je najmä jeho jednoduchosť a tiež vyššia flexibilita vekového efektu. Pri CBD modeli je veľkou výhodou, že výsledné hodnoty sú vyrovnané medzi vekmi a v porovnaní s Lee-Carterom obsahujú špecifickú funkčnú formu pre každý vekový efekt. Vzhľadom na to, že CBD model využíva takmer lineárnosť logaritmu pravdepodobnosti úmrtia, zameriava sa na vyšší vek, čím ignoruje dôležité aspekty úmrtnosti ako sú havarijný hrb a doječská úmrtnosť. Vzhľadom na to, že CBD model sa zameriava na vyššie veku, odporučila by som ho na odhadovanie úmrtnosti napríklad v dôchodkových schémach. Lee-Carterov model naopak vieme použiť pre celý vekový interval, preto je vhodný na prognózovanie úmrtnosti do aktuárskych výpočtov. Na údajoch o úmrtnosti Slovenska vykazovali oba modely veľmi podobné výsledky, avšak CBD model bol opatrnejší v predpovedaní pravdepodobnosti úmrtia. Pri výbere modelu je potrebné zvážiť klady a zápory oboch modelov. Oba modely môžeme považovať za efektívne pri prognózovaní úmrtnosti populácie.

Príspevok bol spracovaný v rámci riešenia grantovej úlohy VEGA 1/0166/20: Stanovenie kapitálovej požiadavky na krytie katastrofických rizík v životnom a neživotnom poistení.

Literatúra

- [1] Cairns, A. J., Blake, D., Dowd, K., Coughlan, G. D., Epstein, D., Ong, A., & Balevich, I. (2009). A quantitative comparison of stochastic mortality models using data from England and Wales and the United States. *North American Actuarial Journal*, 13(1), 1-35.
- [2] Cairns, A. J., Blake, D., Dowd, K., Coughlan, G. D., Epstein, D., & Khalaf-Allah, M. (2011). Mortality density forecasts: An analysis of six stochastic mortality models. *Insurance: Mathematics and Economics*, 48(3), 355-367.
- [3] Chavhan, R., & Shinde, R. (2016). Modeling and forecasting mortality using the Lee-Carter model for Indian population based on decade-wise data. *Sri Lankan Journal of Applied Statistics*, 17(1).
- [4] Haberman, S., & Russolillo, M. (2005). Lee Carter mortality forecasting: application to the Italian population.
- [5] Heligman, L., & Pollard, J. H. (1980). The age pattern of mortality. *Journal of the Institute of Actuaries (1886-1994)*, 107(1), 49-80.
- [6] Human Mortality Database, mortality.org
- [7] Jiang, L. (1995). Changing kinship structure and its implications for old-age support in urban and rural China. *Population Studies*, 49(1), 127-145.
- [8] Koissi, M. C., Shapiro, A. F., & Högnäs, G. (2006). Evaluating and extending the Lee-Carter model for mortality forecasting: Bootstrap confidence interval. *Insurance: Mathematics and Economics*, 38(1), 1-20.
- [9] Lee, R. D., & Carter, L. R. (1992). Modeling and forecasting US mortality. *Journal of the American statistical association*, 87(419), 659-671.
- [10] Lee, R. (2000). The Lee-Carter method for forecasting mortality, with various extensions and applications. *North American actuarial journal*, 4(1), 80-91.
- [11] McNown, R., & Rogers, A. (1989). Forecasting mortality: A parameterized time series approach. *Demography*, 26(4), 645-660.

- [12] Milevsky, M. A., & Promislow, S. D. (2001). Mortality derivatives and the option to annuitise. *Insurance: Mathematics and Economics*, 29(3), 299-318.
- [13] Nocito, S. (2015). Stochastic Mortality Projections: A Comparison of the Lee-Carter and the Cairns-Blake-Dowd models Using Italian Data. *University of Studies of Turin*.
- [14] Pitacco, E., Denuit, M., Haberman, S., & Olivieri, A. (2009). *Modelling longevity dynamics for pensions and annuity business*. Oxford University Press.
- [15] Safitri, Y. R., Mardiyati, S., & Malik, M. (2019, November). The Cairns-Blake-Dowd model to forecast Indonesian mortality rates. In *AIP Conference Proceedings* (Vol. 2168, No. 1, p. 020039). AIP Publishing LLC.
- [16] SAS Institute Inc. (2014). SAS/ETS® 13.2 User's Guide – The ARIMA procedure. Cary, NC: SAS Institute Inc.
- [17] Singh, A., & Ram, F. (2004). Forecasting mortality in India. *Population, Health and Development in India: Changing Perspective*, TK Roy, M. Guruswamy, and Arokiaswamy, Rawat Publication Mumbai, India, 73-100.
- [18] Šoltésová, T. (2019). Aktuárske modelovanie v životnom poistení. 1. vydanie. Bratislava: Vydavateľstvo Letra Edu.
- [19] Wilmoth, J. R. (1996). 13 Mortality Projections for Japan. *Health and mortality among elderly populations*.
- [20] Yadav, A., Yadav, S., & Kesarwani, R. (2012). Decelerating mortality rates in older ages and its prospects through Lee-Carter approach. *PloS one*, 7(12), e50941.