

Ekonomický kapitál a agregácia životných rizík využitím Claytonovej kopule

Ivana Faybíková¹

Abstrakt

Príspevok sa venuje životným rizikám – životnému poistnému riziku, teda úmrtnosti, chorobnosti a dlhovekosti a životnému biznis riziku, ktoré bližšie súvisí s upisovacou činnosťou v rámci životného poistenia a existenciou životných poistných zmlúv. Okrem definovania rizík a ich rizikových faktorov sa v príspevku venujeme aj termínom z oblasti manažmentu a modelovania rizík a veľmi modernému nástroju pre odhad ekonomického kapitálu komerčnej poisťovne – kopuliam. V príspevku popisujeme tiež funkciu straty životných rizík. V závere príspevku sa venujeme jednoduchej agregácii a odhadu ekonomického kapitálu životného poistného a životného biznis rizika za pomoci Claytonovej kopuly.

Kľúčové slová

životné poistné riziko, životné biznis riziko, kopula, ekonomický kapitál

Abstract

The article deals with life risks – life insurance risk, composed of mortality, morbidity and longevity risks and life business risk, which is more closely related to underwriting activities within life insurance business and the existence of life insurance contracts. In addition to defining risks and their risk factors, the article also deals with terms from the field of risk management and risk modeling and a very modern tool for estimating the economic capital of a commercial insurance company – copulas. In the article we also describe the function of loss of life risks. At the end of the article we deal with a simple aggregation and estimation of the economic capital of life insurance and life business policy with the help of Clayton's dome.

Key words

Life Liability Risk, Life Business Risk, Copula, Economic Capital

JEL classification

G22, C15

1 Úvod

Životné riziká nepatria v životnej poisťovni k tým najvýznamnejším z pohľadu držby kapitálu, nakoľko tvoria dokopy zvyčajne len do 20 % z celkového požadovaného kapitálu poisťovne, no ich modelovanie je veľmi špecifické a väčšinou založené na stresových scenároch. Mnohé poisťovne medzi životné riziká zahŕňajú poistné riziká, pandemické riziká a životné biznis riziko súvisiace so zmenami v poisťovacom biznise, no každá poisťovňa má jedinečný pohľad na samotné modelovanie rizík. Modelovanie úzko súvisí s metodológiou, ktorú poisťovňa využíva. Medzi najvyužívanejšie metodológie odhadu kapitálu patrí direktíva Solventnosť II či Swiss Solvency Test, pričom poisťovne môžu využiť v rámci spomínaných metodológií rôzne prístupy. Pri Solventnosti II je to spôsob odhadu kapitálu (SCR – *Solvency Capital Requirement*) pomocou štandardného vzorca (*Standard Formula*), parciálneho

¹ Ekonomická univerzita v Bratislave, Fakulta hospodárskej informatiky, Katedra matematiky a aktuárstva, Dolnozemska cesta 1/b, 825 35 Bratislava, ivana.faybikova@euba.sk

interného modelu či úplného interného modelu. Na Slovensku, nakoľko podliehame podmienkam Európskej únie, komerčné poisťovne najčastejšie kvantifikujú hodnotu kapitálu podľa štandardného vzorca definovaného v direktíve Solventnosť II, no postupne môžeme vidieť trend prechodu na parciálny interný model. Hlavným dôvodom je nadhodnotenie kapitálu, ku ktorému dochádza práve pri prístupe štandardného vzorca a teda jeho nadmerná držba v rámci poisťovne. Vo všeobecnosti môžeme povedať, že nadhodnotenie kapitálu v poisťovni môže mať výrazný negatívny dopad na biznis poisťovne a práve preto sa aplikuje parciálny interný model najčastejšie na najvýznamnejšie riziko, ktorému životná poisťovňa podlieha – trhové riziko.

V príspevku sa budeme venovať teoretickému vymedzeniu životných rizík a ich súčastí podľa interného modelu medzinárodnej komerčnej poisťovne a tiež metodológii tvorby funkcie straty pre životné poistné riziko a životné biznis riziko. Modelovanie funkcie straty je kľúčom k odhadu hodnoty rizika, pretože vďaka nej vieme vygenerovať rozdelenie strát a ziskov, ktoré je následne vstupom do procesu agregácie rizík. V závere príspevku predstavíme zjednodušený model využitia Claytonovej kopule na agregáciu životných rizík s určením konečnej hodnoty rizík s mierou odhadu Expected Shortfall 99 % na 20 000 simuláciách. Budeme pracovať s jednou reportovacou jednotkou X , pričom zanedbáme prepojenie na iné reportovacie a účtovné jednotky. Veľmi dôležité je tiež poznamenať, že odhadovaný kapitál je stanovený pre 1-ročný horizont a slúži na zabezpečenie solventnosti poisťovne pri danej miere spoľahlivosti.

2 Životné riziká komerčnej poisťovne

Odhad hodnoty požadovaného kapitálu je v komerčnej poisťovni realizovateľný vďaka vzájomnej kooperácii viacerých oddelení, najmä aktuárskych oddelení a oddelení manažmentu rizík. V prípade životného poistenia aktuári pripravujú projekcie budúcich cash flow pre portfólio zmlúv poisťovne pre rôzne stresové scenáre, ktoré definuje daná metodológia výpočtu kapitálu, alebo oddelenie manažmentu rizík a ktoré následne postupujú oddeleniu rizík, ktoré ich spracujú do finálnej hodnoty. Pre úplné pochopenie problematiky definujeme niekoľko pojmov, s ktorými sa budeme v jednotlivých častiach príspevku stretávať:

Riziko môžeme zadefinovať ako premennú, ktorá môže spôsobiť odchýlku od očakávaného výsledku – stratu, nebezpečie či nepriaznivé následky v dôsledku vzniku škodovej udalosti. V poisťovníctve najčastejšie definujeme riziko ako nastanie novej udalosti, ktorá nepriaznivo ovplyvňuje chod poisťovne, vrátane nenaplnenia jej stratégií.

Najlepší odhad (*best estimate*) je odhad nejakého predpokladu (napr. miery úmrtnosti) alebo záväzku (napr. cash-flow založený na bezrizikových výnosových krivkách), ktorý nie je ani príliš optimistický, ani príliš prudérny. Teda pri použití najlepších odhadov pri projekcii cash flow existuje 50% šanca, že skutočné cash flow budú nižšie alebo vyššie ako sme očakávali v danej projekcii.

Expected Shortfall (ES) je miera rizika využívaná pri odhade požadovaného kapitálu, ktorá je senzitívna na tvar chvosta rozdelenia, nakoľko je počítaná ako priemer n najhorších/najlepších scenárov v závislosti od požadovanej pravdepodobnosti. Na porovnanie, veľmi často využívaná miera *Value-at-Risk* zanedbáva tvar chvosta rozdelenia, pretože jej hodnotou je konkrétny kvantil (najčastejšie 99, 5 %). Použitie miery ES pri výpočte kapitálu nájdeme v metodológii *Swiss Solvency Test* (SST), ktorá je povinnou pre všetky Švajčiarske poisťovne, pričom jednotlivé prístupy využívané poisťovňami, rovnako ako výsledky poisťovní, sú kontrolované Švajčiarskym regulátorom pre finančné trhy – FINMA (*Eidgenössische Finanzmarktaufsicht*). Expected Shortfall môžeme v literatúre nájsť aj pod názvami *Conditional Value-at-Risk* (CvaR) alebo *Tail Value-at-Risk* (TvaR).

Ekonomický kapitál predstavuje množstvo kapitálu, ktorým poisťovňa potrebuje disponovať, aby zostala solventná v priebehu jedného roka aj v prípade, ak by nastali

neočakávané straty spôsobené udalosťami (rizikami), ktoré sa vyskytujú raz za 100, 200 rokov a ktoré môžu mať zničujúci dopad na poisťovňu. Špecifickým typom ekonomického kapitálu je regulatórny kapitál, ktorý podlieha metodológiám a prístupom určených regulátormi (poznáme *Required Capital* (IAIS)/ *Target Capital* (SST)/ *Solvency Capital Requirement* (SII)).

Exposure môžeme veľmi jednoducho zdefinovať ako maximálnu výšku škody, ktorá vznikne, ak dôjde ku škodovej udalosti. Zvyčajne je hodnota exposure odhadovaná reportovacími jednotkami pre jednotlivé riziká a rizikové faktory. Exposure je jedným z hlavných vstupov potrebných pre odhad ekonomického kapitálu.

Reportovacia jednotka – pod týmto pojmom je dôležité predstaviť si účtovnú jednotku, ktorá tvorí biznis pod svojim menom a štatútom. Následne takéto reportovacie jednotky vieme agregovať v rámci krajiny pôsobenia, oblasti zamerania, regiónu či príslušnosti k nadradeným jednotkám.

Strata a zisk (*loss/gain*) a ich modelovanie sú kľúčovými procesmi pri odhade požadovaného kapitálu poisťovne. Na to, aby mala poisťovňa kvalitné simulácie strát (najčastejšie sa simuluje na 200 000 simuláciách) ako podklad pre odhad kapitálu, musí si zvoliť vhodné parametre, pričom môže využívať historické dáta, kopuly, dostupné dáta od dátových spoločností ako Bloomberg, expertný odhad a iné. V životnom poistení pri určovaní kapitálu je využívaný špecifický prístup založený na stresových scenároch, ktoré sú aplikované navýšením najlepších odhadov predpokladov. Ako príklad uvedieme mieru úmrtnosti, ktorú odhadujeme pre daný rok a pre danú reportovaciu jednotku na úrovni 35 %. Aby sme zabránili situácii, kedy miera úmrtnosti výrazne narastie a s ňou aj poistné plnenia, na ktoré poisťovňa nie je kapitálovo pripravená, aplikuje sa stresový scenár alebo “stres“, ktorý navýši mieru úmrtnosti o 60 %. Takýto stres sa aplikuje na projekciu cash-flow zo zmlúv v portfóliu. Takéto projekcie sa zvyčajne modelujú v špecializovaných aktuárskych softvéroch ako je napríklad Prophet a ich výstupom býva aj exposure.

2.1 Životné poistné riziko

Vo všeobecnosti môžeme životné poistné riziko (*LIL – Life Liability Risk*) definovať ako riziko strát v dôsledku neočakávaného a-alebo nepriaznivého vývoja v oblasti úmrtnosti, zdravotného postihnutia a chorobnosti. K životnému poistnému riziku je tiež pridávaná zložka pandemického rizika, no zvyčajne nie je priamo modelovaná spolu s ostatnými zložkami životného poistného rizika.

Obr. 1: Životné poistné riziko a prislúchajúce rizikové faktory



Zdroj: Swiss Solvency Test metodológia, vlastné spracovanie

Samotné životné poistné riziko je zložené z rizikových faktorov (*risk drivers*), ktorými sú:

- riziko úmrtnosti (*mortality risk*) – popisuje potenciálne zmeny v miere úmrtnosti, pričom zvýšená miera úmrtnosti znižuje dostupný kapitál poisťovne v prípade poisťných zmlúv na úmrtie.
- riziko chorobnosti (*morbidity risk*) – popisuje potenciálne nepriaznivé zmeny v miere incidencie, t.j. chorobnosti, invalidity a zotavení. V modeli sú samostatne kalibrované stresy na riziká incidencie a zotavenia, aj keď sú neskôr spoločne modelované v jednom faktore rizika morbidity.
- riziko dlhovekosti (*longevity risk*) – popisuje potenciálne zmeny v dĺžke života poistených osôb, pričom znížená úmrtnosť znižuje disponibilný kapitál poisťovne v prípade poisťných zmlúv, ktoré vyplácajú dôchodky.

Životné poisťné riziko je obsiahnuté v biometrických predpokladoch použitých pri určovaní dostupného kapitálu. Tieto predpoklady odrážajú aktuárske najlepšie odhady budúcich udalostí, ktoré pravdepodobne vyplynú z upísaného biznisu (upísané poisťné kontrakty). Tieto predpoklady sa používajú pri projekciách pravdepodobnostných tokov záväzkov a ziskov, ktoré sú dôležité pre výkonný manažment, akcionárov či investorov. Akékoľvek odchýlky alebo zmeny týchto predpokladov môžu ovplyvniť načasovanie a/alebo veľkosť zisku v porovnaní s očakávaniami.

2.2 Životné biznis riziko

Životné biznis riziko je riziko strát v dôsledku neočakávaného a/alebo nepriaznivého vývoja v oblasti nákladov a perzistencie zmluv. K životnému biznis riziku môžeme pripojiť aj riziko z neočakávaného poklesu nových kontraktov v nasledujúcom roku, pričom takýto pokles môže spôsobiť problém s krytím očakávaných nákladov na budúci biznis.

Obr. 2: Životné biznis riziko a prislúchajúce rizikové faktory



Zdroj: Swiss Solvency Test metodológia, vlastné spracovanie

2.3 Odhad ekonomického kapitálu pre životné riziká

Poisťovne najčastejšie využívajú lineárnu formu funkcie straty pre každú reportovaciu jednotku a pre každý rizikový faktor, aby čo najpresnejšie odhadli materialitu úrovne stresu vyplývajúcej z distribúcie rizikového faktora a príslušný dopad na celkový dostupný kapitál. Funkciu straty pre reportovaciu jednotku X a rizikový faktor j je môžeme zdefinovať ako:

$$l_{x,j} = e_{x,j} \cdot x \text{ pre všetky } x, \text{ kde}$$

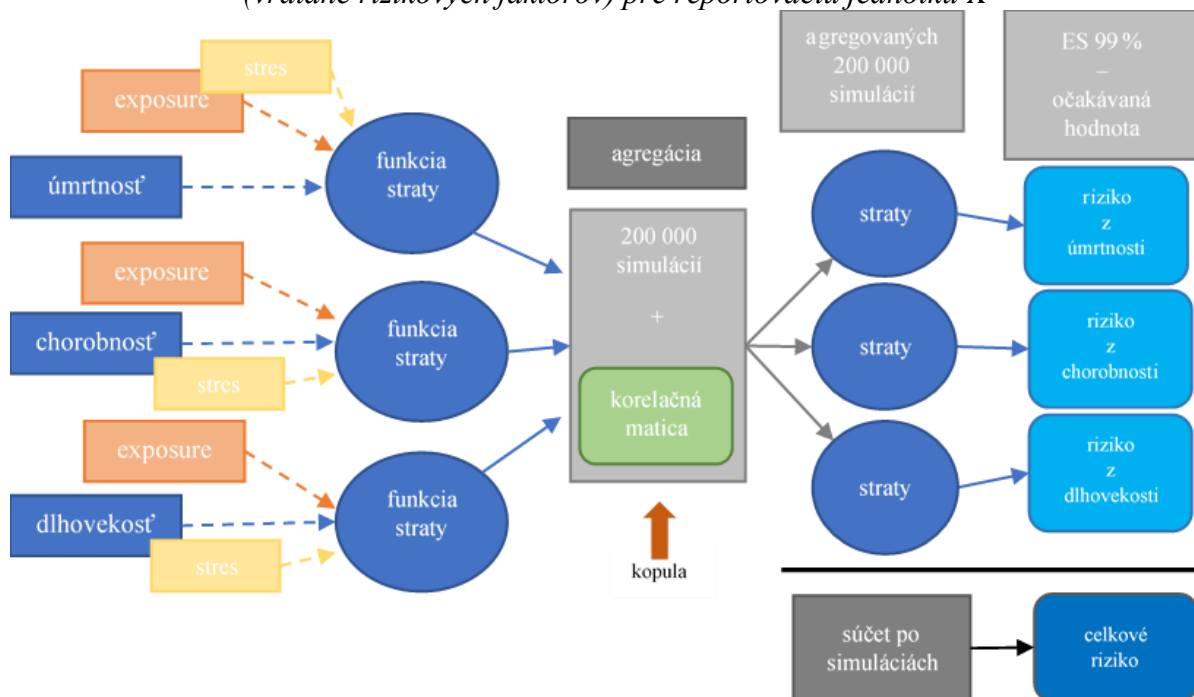
- x je argumentom funkcie, pričom zodpovedá akejkoľvek nožnej úrovni stresu $X_{X,j}(\alpha)$ z náhodnej premennej $X_{X,j}$, ktorá popisuje rozdelenie rizikových faktorov j ,
- $e_{X,j}$ je parameter funkcie straty popisujúci jej sklon. Tento parameter je vypočítaný prostredníctvom vzorca:

$$e_{X,j} = \frac{\text{exposure}(99,95\%)}{X_{X,j}(99,95\%)},$$

kde $\text{exposure}(99,95\%)$ je maximálna výška škody pri pravdepodobnosti 99,95 % kvantifikovaná reportovacou jednotkou za pomoci cash-flowu (najčastejšie je využívaný softvér *Prophet*) a $X_{X,j}(99,95\%)$ je stres pri pravdepodobnosti 99,95 % z náhodnej premennej $X_{X,j}$ popisujúcej rozdelenie rizikového faktora. Náhodná premenná $X_{X,j}$ má normálne rozdelenie so strednou hodnotou 0 a štandardnou odchýlkou δ_X .

Po odhade rozdelenia straty pre každú reportovaciu jednotku a pre každý rizikový faktor nasleduje agregácia marginálnych strát na určenie rozdelenia straty celkového rizika. Pri agregácii sa využívajú kopule – Studentova t kopula, Gaussova kopula prípadne Claytonova kopula. Poist'ovne veľmi často využívajú Gaussovú kopulu kvôli jej jednoduchosti, no z pohľadu niektorých analytikov je nebezpečná a nevhodná pre niektoré typy rizík, pretože podhodnocuje vysoké straty.

Obr. 3: Schéma popisujúca odhad ekonomického kapitálu pre životné poisťné riziko (vrátane rizikových faktorov) pre reportovaciu jednotku X

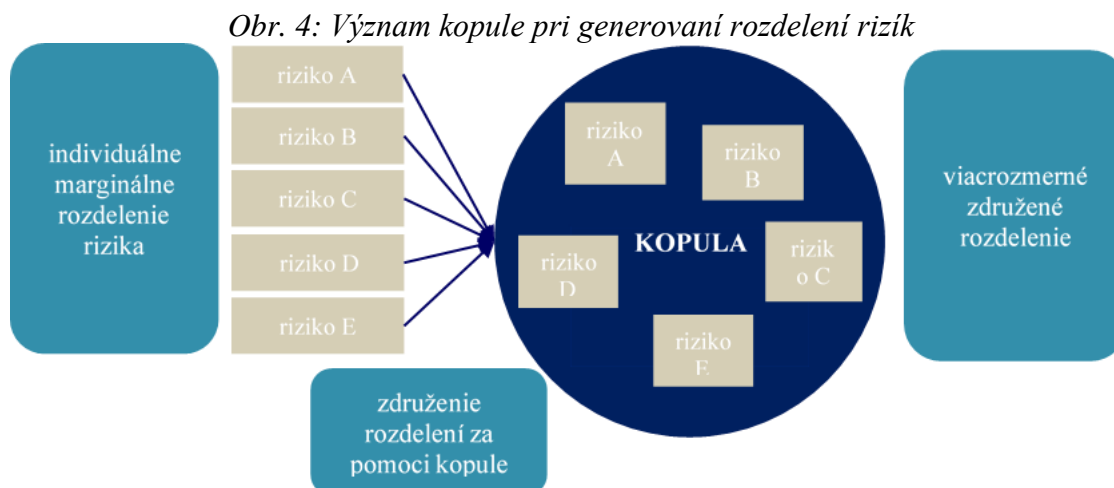


Zdroj: vlastné spracovanie

Obdobne odhad požadovaného kapitálu funguje pre životné biznis riziko.

3 Odhad hodnoty ekonomického kapitálu pomocou kopúl

Kopule sú moderným nástrojom v súčasnosti využívaným pri modelovaní závislostí faktorov popisujúcich riziko. Kopula je mnohorozmerné rozdelenie, ktorého marginálne rozdelenie je uniformované, pričom musia byť splnené všetky matematické vlastnosti viacnásobného rozdelenia.



Zdroj: vlastné spracovanie (Shaw, R., & Spivak, G., 2009)

Ako každý nástroj pri modelovaní hodnoty rizika, tak aj kopule majú svoje pozitíva a negatíva. Medzi pozitíva zaradíme najmä ich flexibilitu v možnosti kombinovania rôzneho počtu marginálnych rozdelení škôd s rôznym počtom rozdelení kopúl, pričom je možné zvoliť rôzne typy kopúl od požadovanej charakteristiky a štruktúry (špicatosť, šikmosť či závislosť chvostov). Kopule dokážu presnejšie odrážať štruktúru závislosti medzi rizikami v porovnaní s korelačnými koeficientami a vyhýbajú sa nedostatkom korelácií. Najmä použitie vhodnej kopule umožňuje modelovanie nenulovej závislosti na chvoste. Kopule nám umožňujú vyjadriť závislosti z hľadiska množstva rozdelenia strát a teda nám umožňujú odhad strát na akejkoľvek požadovanej úrovni percentilu. Veľkou výhodou kopúl je tiež pomerne ľahká simulácia pomocou metódy Monte Carlo. Kopuly si čoraz viac získavajú uznanie rôznych medzinárodných poisťno-matematických a dozorných organizácií, ktoré by mali pomôcť pri schvaľovanom procese interného modelu.

Medzi nevýhody kopúl zaradíme častý nedostatok údajov na vykonanie dôveryhodnej kalibrácie kopule a to najmä na chvoste. Proces modelovania ekonomického kapitálu je veľmi náročný a pri využití kopúl sa stráca transparentnosť, pričom výsledky sa stávajú ťažšie overiteľnými (podobné ako pri machine learningu). Poslednú nevýhodu vidíme v statickej podstate modelu, pričom realistickejší spôsob modelovania v závislosti od času by bol pomocou stochastického procesu alebo modelov časových radov.

Dôležitým teoretickým východiskom pri teórii kopúl je Skalárova veta, kedy funkcia $F(x_1, x_2, \dots, x_d)$ definovaná vzťahom (Cipra, 2015):

$$F(x_1, x_2, \dots, x_d) = C(F_1(x_1), \dots, F_d(x_d))$$

je združená distribučná funkcia s marginálnymi distribučnými funkciami F_1, F_2, \dots, F_d , pričom $C(u_1, \dots, u_d)$ je d - rozmerná kopula a $F_1(x_1), \dots, F_d(x_d)$ sú jednorozmerné marginálne distribučné funkcie. V praxi sa kopule najčastejšie rozdeľujú na elementárne, implicitné a archimedovské kopule. Elementárne kopule predstavujú zvláštny druh závislostí náhodných premenných. Implicitné kopuly sú pomerne často využívané aj v poisťovníctve, pretože nie sú

limitované malým počtom parametrov, čo je pre množstvo modelovaných rizík potrebné. Medzi elementárne kopuly zaraďujeme Gaussovú a Studentovu t-kopulu. Archimedovské kopuly sú využívané veľmi často, vďaka ich jednoduchému tvaru, no sú nepoužiteľné pre väčšie počty premenných. Medzi archimedovské kopuly zaraďujeme Gumbelovu kopulu a Claytonovu kopulu.

Najčastejšie využívanými kopulami v poisťovacích spoločnostiach sú MLS, Gaussova kopula, Claytonova kopula a t-kopula. Špeciálne Gaussova kopula je často považovaná za pomerne nebezpečnú kvôli podhodnocovaniu závislostí na chvoste rozdelenia, no nakoľko je proces modelovania kopúl pri agregácii veľmi náročný, časovo aj softvérový, poisťovne využívajú tento druh kopule kvôli ich jednoduchosti aj s rizikom nie úplne kvalitného výsledku.

3.1 Gaussova kopula

Gaussova kopula je kopula d dimenzionálneho normálneho rozdelenia s lineárnou korelačnou maticou R . Gaussova kopula má tvar (Cipra, 2015):

$$C_{Gaussova}(u_1, \dots, u_d) = \Phi_R^d(\Phi^{-1}(u_1), \dots, \Phi^{-1}(u_d))$$

kde Φ_R^d popisuje d dimenzionálne štandardné normálne rozdelenie $N_d(0, \rho)$ s lineárnou korelačnou maticou R a Φ^{-1} popisuje inverznú hodnotu funkcie štandardného normálneho rozdelenia. Závislosť chvostov pri Gaussovej kopule je rovná nule a teda použitie tejto kopule nie je vhodné pre rozdelenia rizík s ťažšími chvostami. Korelačná matica R ako jediný vstup pre kopulu by mala byť symetrická s 1-tkovou diagonálou, všetky párové hodnoty musia byť v rozmedzí od -1 po 1 a tiež musí byť pozitívne semidefinitná.

3.2 t-copula

Studentova kopula alebo tiež t-kopula je skonštruovaná z viacrozmerného t rozdelenia rovnakým spôsobom, ako je Gaussovská kopula odvodená z viacrozmerného normálneho rozdelenia. Podobne ako Gaussová kopula, má zvonovitý tvar a dá sa ľahko rozšíriť na viacrozmerný prípad, na rozdiel od niektorých iných kopúl, ktoré sú obmedzené iba na dve riziká. T-kopula je podobne ako Gaussova kopula ľahko simulovateľná. Pre všeobecnú dimenziu d má t-kopula tvar (Cipra, 2015):

$$C_{Studentova}(u_1, \dots, u_d) = t_{\gamma, \rho}(t_{\gamma}^{-1}(u_1), \dots, t_{\gamma}^{-1}(u_d))$$

kde $t_{\gamma, \rho}$ je distribučná funkcia d rozmerného štandardného t rozdelenia s rozptylovou maticou ρ . Na rozdiel od Gaussovej kopule nepotrebuje pre vstup iba korelačnú maticu R , no tiež parameter stupňov veľkosti, ktorý určuje silu závislosti chvosta. Všeobecne platí, že čím nižšie stupne voľnosti sú, tým je závislosť chvosta silnejšia. T-kopula je symetrická a jej závislosť medzi ľavým a pravým chvostom je rovnaká. Toto nie je dokonalé riešenie, pretože model ekonomického kapitálu sa zaoberá prevažne iba jednou stranou distribúcie. Obmedzením t-kopuly pri modelovaní viac ako dvoch rizík je, že okrem samotného párového korelačného koeficientu existuje iba jedna premenná, ktorá riadi štruktúru závislosti na chvoste. To znamená, že všetky páry rizík majú rovnakú závislosť od chvosta, čo nie je reálne. Toto obmedzenie je možné prekonať zovšeobecnením t-kopule, ktorá je všeobecne známa ako IT kopula. Dvojrozmerná t-kopula s n stupňami voľnosti a koreláciou ρ má nasledovné koeficienty chvostovej závislosti:

$$\lambda_L(X, Y) = \lambda_U(X, Y) = S_{n+1}(\sqrt{(n+1)(1-\rho)/(1+\rho)})$$

kde S_{n+1} je funkcia prežitia t-rozdelenia s $n + 1$ stupňami voľnosti. V poisťovníctve je najvhodnejšie využitie Studentovej t-kopule pre trhové riziká.

3.3 Claytonova kopula

Claytonova kopula patrí medzi Archimedovské kopule, ktoré sú vhodné pre modelovanie dvojrozmerných rozdelení. Claytonovu kopulu môžeme zapísať ako (Cipra, 2015):

$$C_{clayton}(u_1, u_2) = (u_1^{-\theta} + u_2^{-\theta} - 1)^{-1/\theta}$$

pričom ak kopula prechádza pre $\theta \rightarrow 0$ na nezávislú kopulu a pre $\theta \rightarrow \infty$ na komonotónnu kopulu. Claytonova kopula má generátor v tvare (Cipra, 2015):

$$\varphi(u) = \frac{1}{\theta}(u^{-\theta} - 1) \text{ pre parameter } \theta > 0.$$

Claytonova kopula vykazuje najsilnejšiu závislosť v dolných záporných chvostoch a v poisťovníctve je táto kopula použiteľná po úprave najmä pre poisťné riziká.

3.4 Survival kopula

Nakoľko sa nachádzame v oblasti poisťovníctva, to, čo nás reálne zaujíma pre kvalitný odhad veľkosti rizika a ekonomického kapitálu sú práve veľké, aj keď menej pravdepodobné škody. Podľa Franka Cuypers (2020) „to, že na vás na ulici pri prechádzke spadne tehla je síce nešťastné, no poisťovňa sa pre to nezrúti“, a to dokonca ani v prípade, keď podobných nehôd bude veľmi veľa. Čo poisťovne ale potrebujú poznať, sú najväčšie možné škody, na ktoré musia byť adekvátne kapitálovo pripravené. Takúto úpravu už existujúcich kopúl spomenutých v predchádzajúcich podkapitolách nazývame *survival kopula* alebo tiež *kopula prežitia*. Takáto kopula nám dáva združenú pravdepodobnosť, kedy dve premenné X a Y budú väčšie než pevné hodnoty x a y . Pravdepodobnosť, kedy premenná X je väčšia než x označujeme $\bar{F}(x) = 1 - F(x)$, obdobne to platí pre premennú $\bar{F}(y)$. Dvojrozmerná survival kopula $\bar{C}(\bar{F}(x)\bar{F}(y))$ je potom zadaná nasledovne (Sweeting P., 2011):

$$\bar{F}(x, y) = \bar{C}(\bar{F}(x)\bar{F}(y)) = \bar{C}(1 - F(x), 1 - F(y)) = 1 - F(x) - F(y) + C(F(x), F(y))$$

V nasledujúcej kapitole predstavíme jednoduchú agregáciu životných rizík pomocou Claytonovej kopule, ktorá je upravená cez survival kopulu.

4 Jednoduchá agregácia rizík pomocou Claytonovej kopuly

Agregácia rizík je pri určovaní požadovaného kapitálu veľmi dôležitým krokom. Nakoľko majú riziká medzi sebou korelácie, za pomoci kopúl dokážeme vytvoriť viacrozmerné rozdelenia. Vo výsledku to vidíme ako pokles v kapitáli oproti jednoduchému súčtu napriek rizikami. Tento jav označujeme ako diverzifikácia rizík. V tejto kapitole ukážeme jednoduchú agregáciu dvoch rizík – životného poisťného rizika (LIL – *Life Liability Risk*) a životného biznis rizika (BUS – *Life Business Risk*) pre reportovacu jednotku X , pričom využijeme Claytonovu kopulu s parametrom $k = 3$. Na generovanie náhodných premenných sme využili nasledovný postup (Cuypers, 2020):

1. Generovanie prvej náhodnej premennej \tilde{X} s distribúciou F_x (pre životné poisťné riziko):

$$P[\bar{X} \leq X] = F_X(X) = x \quad x \sim U(0,1) \rightarrow X = \tilde{F}_x(x)$$

2. Generovanie druhej náhodnej premennej \bar{Y} s distribúciou F_y (pre životné biznis riziko):

$$P[\bar{Y} \leq Y] = F_Y(Y) = y \quad q \sim U(0,1) \rightarrow Y = \tilde{F}_Y(y)$$

3. Agregácia náhodných premenných pomocou kopule

$$P[\bar{X} \leq X, \bar{Y} \leq Y] = C(x, y) \rightarrow \text{Claytonova kopula}$$

$$P[\bar{Y} \leq Y | \bar{X} \leq X,] = \frac{\partial}{\partial x} C(x, y) = q \Rightarrow y = y(x, q)$$

$$C(x, y) = (x^{-k} + y^{-k} - 1)^{-\frac{1}{k}} \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} C(x, y) = (x^{-k} + y^{-k} - 1)^{-\frac{k+1}{k}} x^{-(k+1)} = q \Rightarrow y = \left[1 + \left(q^{-\frac{k}{k+1}} - 1 \right) x^{-k} \right]^{-\frac{1}{k}}$$

kde k vyjadruje parameter Claytonovej kopule kappa a premenné x a q sú navzájom nezávislé. Pre kopulu sme si zvolili parameter kappa s hodnotou 3, ktorý odzrkadľuje primeranú silu kopule na odhadované riziká. V poistnej praxi sa hodnoty parametrov určujú na základe expertného odhadu skúsených aktuárov.

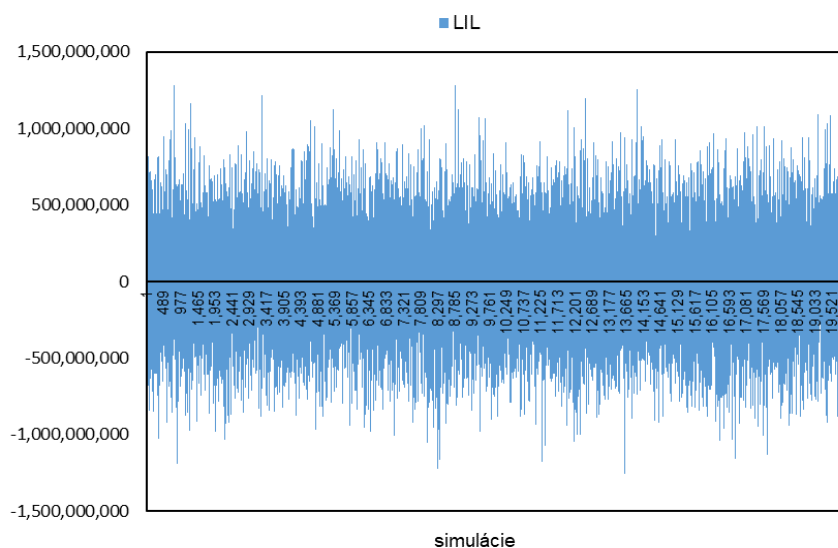
Majme ilustratívne 20 000 simulácií strát a ziskov s náhodnými premennými x , y a normálnymi rozdeleniami:

- životné poistné riziko (LIL) s rozdelením $N \sim (593\ 114; 321\ 285\ 215^2)$
- životné biznis riziko (BUS) s rozdelením $N \sim (-631\ 426; 206\ 679\ 348^2)$,

pričom stredná hodnota a smerodajná odchýlka predstavujú reálne hodnoty rozdelenia ziskov a strát pre danú reportovaciú jednotku a riziko na 200 000 simuláciách.

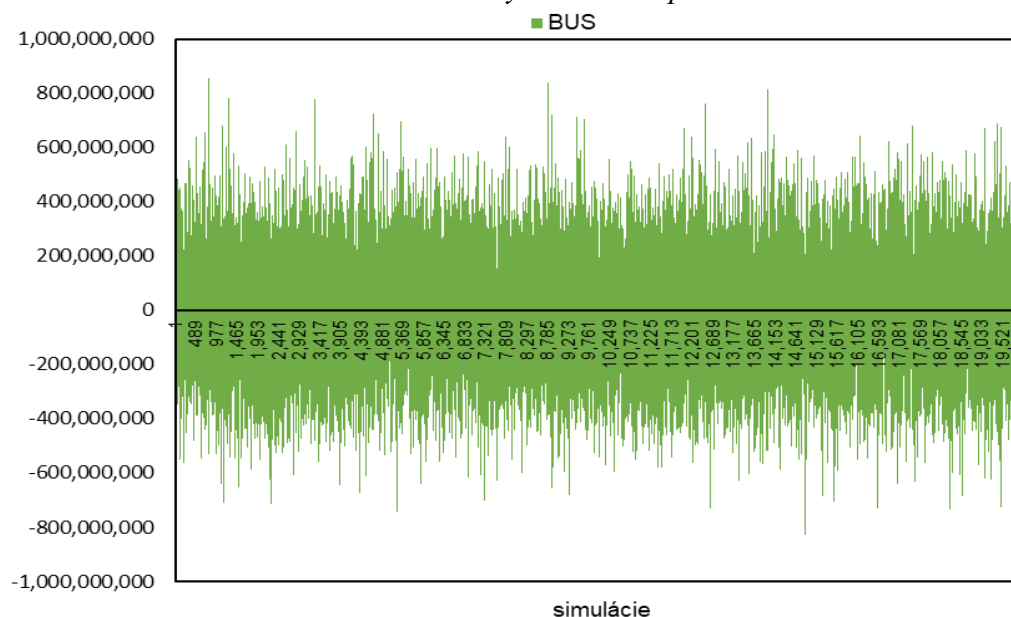
Na ilustratívne modelovanie sme využívali MS Excel a funkciu NORMINV(.) a parametre zadefinované vyššie. Vygenerovaných 20 000 simulácií pre obe riziká môžeme vidieť na obrázkoch *Obr. 5* a *Obr. 6*.

Obr. 5: Simulované hodnoty strát/zisku pre životné riziko LIL



Zdroj: vlastné spracovanie

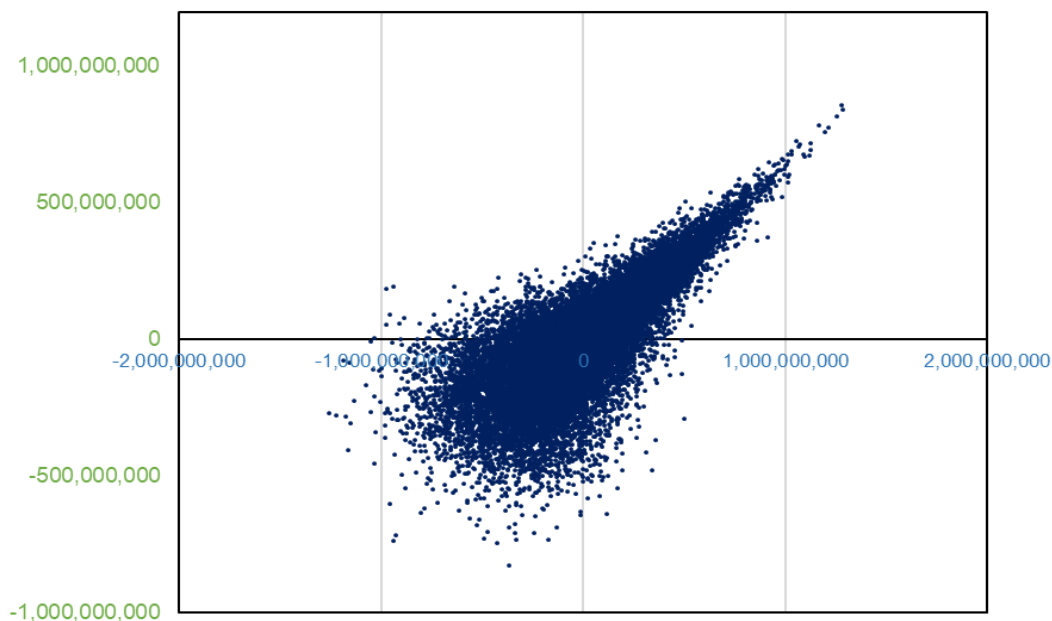
Obr. 6: Simulované hodnoty strát/zisku pre životné riziko BUS



Zdroj: vlastné spracovanie

Základný tvar Claytonovej kopule nám prezentuje závislosť medzi škodami síce s vysokou frekvenciou, no nízkou hodnotou škôd. Nakoľko sa nachádzame v poisťovníckej sfére, škody, ktoré nás zaujímajú sú práve škody s vysokou škodovosťou a nižšou frekvenciou. Aby sme videli závislosť veľkých škôd, ktoré nás primárne zaujímajú, upravili sme si výpočet premenných cez survival kopulu (viď. 3.4 Survival kopula).

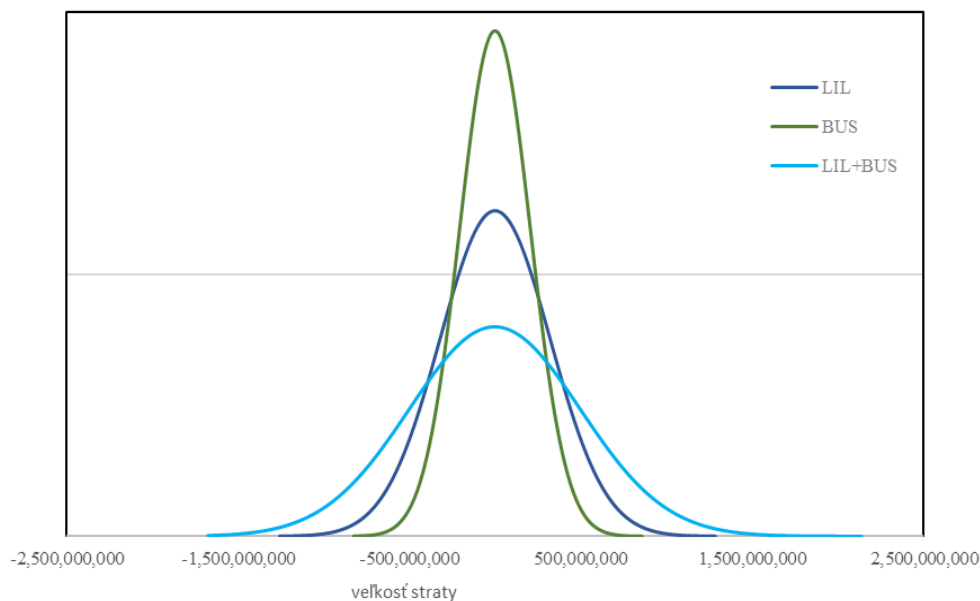
Obr. 7: Vzájomná závislosť životného poisťovného rizika a životného biznis rizika



Zdroj: vlastné spracovanie

Medzi najvhodnejšie zobrazenie výšky strát a ziskov patrí distribučná funkcia alebo tzv. *bell curve*, ktorá dokonale znázorňuje rozdelenie výšky strát a ziskov pre jednotlivé riziká.

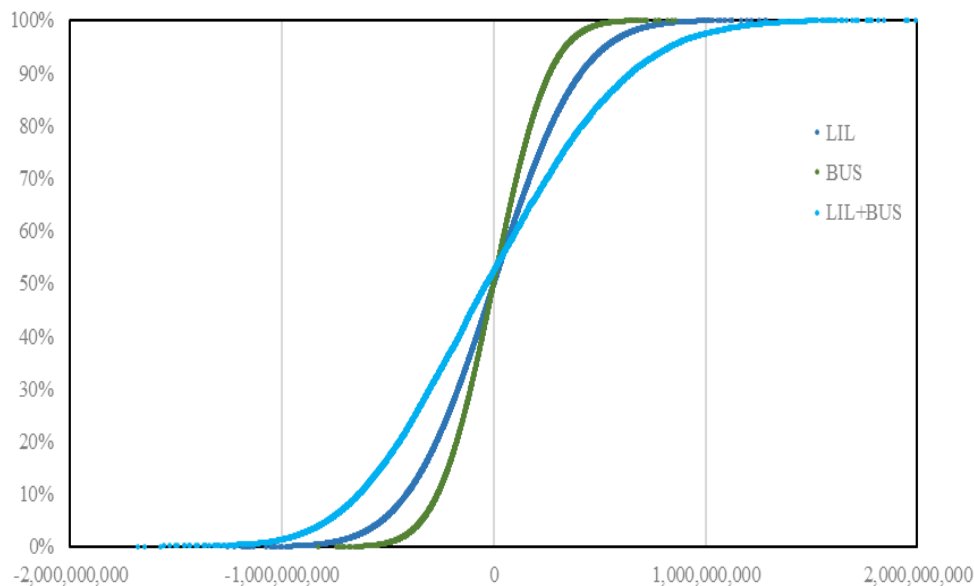
Obr. 8: Graf hustoty pravdepodobnosti rizík LIL, BUS a ich súčtu po aplikovaní kopule



Zdroj: vlastné spracovanie

Z grafu Obr. 8 vidíme, že riziká majú rôzne trendy. Zatiaľ čo životné poisťné riziko (LIL) má ťažšie chvosty s vyššími stratami (napravo) a tiež ziskami (naľavo), životné biznis riziko (BUS) má vyššiu početnosť ziskov a strát v rozmedzí (-500 mil ; 500 mil).

Obr. 9: Distribučné funkcie rizík LIL, BUS a ich súčtu po aplikovaní kopule



Zdroj: vlastné spracovanie

Akonáhle máme namodelované simulácie pre obe riziká reportovacej jednotky X , vieme veľmi jednoducho vypočítať hodnotu ekonomického kapitálu. V našom prípade, nakoľko pracujeme s mierou odhadu *Expected Shortfall* 99 % (ES 99 %) a máme 20 000 simulácií, potrebujeme vypočítať priemer 200 najhorších simulácií (takzvané *worst cases*), ktoré predstavujú najvyššiu stratu a následne odpočítať očakávanú hodnotu (*mean*) zisku/straty. Všeobecný vzorec môžeme veľmi jednoducho zapísať nasledovne:

$$riziko_i = priemer_{najhoršie\ sim} - priemer_{všetky\ sim}$$

kde i predstavuje typ rizika (prípadne súčet hodnôt rizík), pre ktoré sa určuje jeho hodnota. Pre naše simulácie vyšli hodnoty nasledovne:

Tab. 1: Ekonomický kapitál v p.j. pre životné poistné riziko, životné biznis riziko a ich súčet po aplikovaní Claytonovej kopule pri 20 000 simuláciách

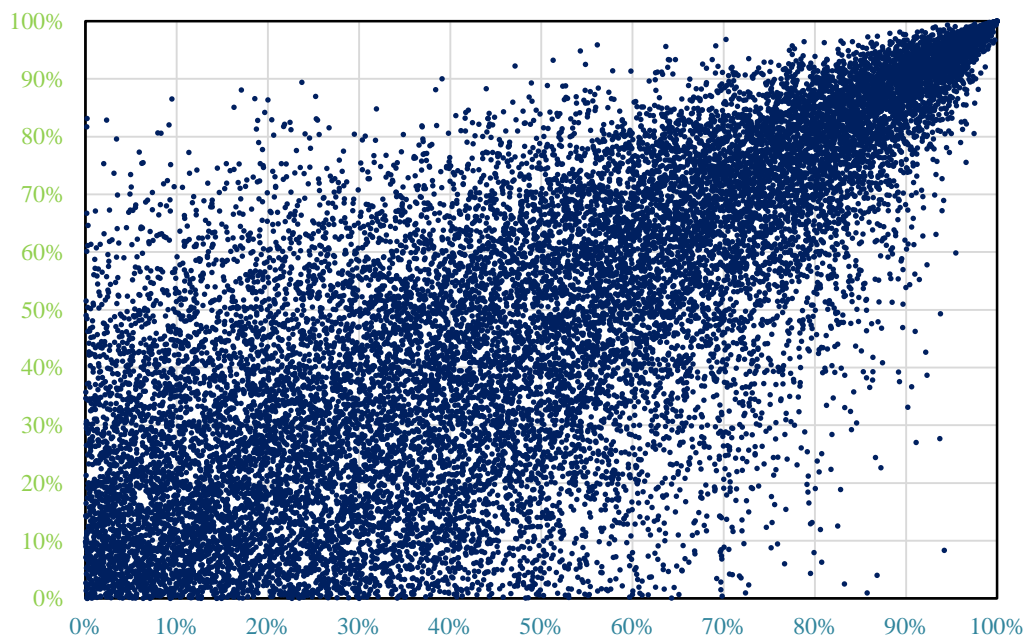
Riziko	ES 99 %	Očakávaná hodnota	Ekonomický kapitál
Životné poistné riziko	867 526 310	-1 518 412	869 044 722
Životné biznis riziko*	557 057 440	-1 989 748	559 047 188
Životné biznis riziko	554 622 526	-1 936 667	556 559 193
Spolu riziká*	1 424 583 750	-3 508 160	1 428 091 910
Spolu riziká	1 414 445 984	-3 455 080	1 417 901 063

*hodnota bez použitia Claytonovej kopule

Zdroj: vlastné spracovanie

Pri súčte rizík ich sčítavame po simuláciách a následne vypočítame hodnotu rizika. Môžeme si z výpočtov v tabuľke Tab. 1 všimnúť, že riziká pri použití kopule sú nižšie, než riziko, keď sme kopulu nepoužili. Pri súčte rizík je tento pokles na úrovni 10 miliónov p.j. (- 0,71 %). Kopula nám teda zohľadnila vzájomnú diverzifikáciu životných a biznis rizík. Napr. keď sa nám manifestuje riziko perzistencie, čiže nám začnú viac stornovať zmluvy ako sme očakávali, tak nám na druhej strane dochádza k poklesu nákladov, ktoré poisťovňa vynakladá na správu poistných zmlúv, a teda k poklesu biznis rizika.

Obr. 10: Výsledná kopula životného poistného rizika a životného biznis rizika



Zdroj: vlastné spracovanie

Ako už bolo spomenuté vyššie, jednotlivé riziká majú medzi sebou prepojenie. Súčasná pandemická situácia nám potvrdila silu prepojenie medzi katastrofickým – pandemickým

rizikom, ktoré poisťovne kvantifikujú buď pod životným poistným alebo katastrofickým rizikom, trhovým rizikom (výrazné prepady na finančných trhoch najmä v období marca 2020), kreditným rizikom či rizikom plynúceho z neživotného poistenia (zvyšovanie rezerv, nižšie prijaté poistné). V poistnej praxi takéto prepojenia môže definovať korelačná matica, ktorá je zostavená na základe skúseností expertných analytikov a aktuárov, alebo vhodne zvolená kopula.

5 Záver

V príspevku sme čitateľovi priblížili základné pojmy z oblasti životného poistenia, modelovania a manažmentu rizík. Riziká, ktorými sme sa v práci zaoberali sú životné poistné riziko a životné biznis riziko vrátane prislúchajúcich rizikových faktorov, medzi ktoré zaradujeme mortalitu, morbiditu, dlhovekosť, perzistenciu či riziko súvisiace so správou poistenia. Predstavili sme nástroj kopule, Skalárovu vetu a základné kopule využívané v poisťovniach pri agregácii rôznych typov rizík. V závere článku sme vygenerovali 20 000 simulácií pre životné poistné riziko a životné biznis riziko, ktoré sa riadia normálnym rozdelením. Použitím Claytonovej kopule, ktorá je vhodná práve pre poistné riziká, sme vypočítali hodnotu agregovaných životných rizík a ekonomického kapitálu, pričom sme ukázali, že využitie kopule môže ušetriť kapitál spoločnosti aj na úrovni jednej reportovacej jednotky X vo výške 10 miliónov peňažných jednotiek.

Príspevok bol spracovaný v rámci riešenia grantovej úlohy VEGA 1/0647/19 *Moderné nástroje na riadenie a modelovanie rizík v neživotnom poistení.*

Literatúra

- [1] Billeter, S., & Salgeti-Drioli, F. (2016). *Liability Risk Drivers: Bringing a forward-looking perspective into liability modelling*. Retrieved March 14, 2021, from https://www.swissre.com/dam/jcr:6524ff3e-c35d-4f65-a99c-aa11604990b2/SwissRe_ForwardLookingModeling.pdf.
- [2] Cipra, T. (2015). *Riziko ve financích a pojišťovnictví: Basel III a Solvency II* (2nd ed.). Ekopress.
- [3] Cuypers, F. (2020) *Risk Dependencies*. [presentation]. PrimeRe Solutions.
- [4] Lam, J. (2014). *Enterprise Risk Management: From Incentives to Controls* (2nd ed., Vol. 496). Wiley & Sons.
- [5] Ly, S. & Pho, K.-H. & Ly, S. & Wong, W.-K. (2019). *Determining Distribution for the Product of Random Variables by Using Copulas*. Retrieved March 14, 2021, from https://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=3430862.
- [6] Shaw, R., & Spivak, G. (2009) Correlations and Dependencies in Economic Capital Models. In: *Institute and Faculty of Actuaries: Modelling Correlations and Dependencies in Economic Capital Models*.
- [7] Sweeting, P. (2011). *Financial Enterprise Risk Management*. Cambridge University Press.