Spojitý Markovovský model poistenia kritických ochorení ako základ pre diskrétny deterministický prístup

Zsolt Simonka[1], Lea Škrovánková[2], František Slaninka[3]

Abstrakt
Príspevok úvodom stručne popisuje vznik, vývoj a hlavné charakteristiky produktu poistenia kritických chorôb. Uvádzame všeobecné vlastnosti poistenia závažných ochorení a informujeme o škodových podmienkach tohto produktu, ktoré ponúkajú poisťovne na Slovensku. Vychádzajúc zo všeobecného viacstavového modelu poukazujeme na jeho použitie pri konštrukcii modelu pre poistenie kritických chorôb. Pravdepodobnostný rámec je založený na štvorstavovom nehomogénnom a časovo spojitom Markovovom modeli, ktorý môže ústiť do Semi-Markovovského modelu. Použili sme metodológiu navrhnutú v Baione a Levantesi na odhad intenzity prechodu na základe prevalenčných mier a poukázali na možnosť nahradenia spojitého prípadu diskrétnym deterministickým modelom.

Kľúčové slová
nemocenské poistenie, viacstavové modely, Markovove reťazce, pravdepodobnosť prechodu, diferenciálne rovnice

Abstract
The paper begins by briefly describing the origin, development and main characteristics of the critical illness insurance product. We list the general characteristics of serious illness insurance and inform about the damage conditions of this product offered by insurance companies in Slovakia. Based on the general multi-state model, we point out its use in the construction of a model for critical illness insurance. The probabilistic framework is based on a four-state inhomogeneous and time-continuous Markov model, which can lead to a Semi-Markov model. We used the methodology proposed in Baiona and Levantesi to estimate transition intensity based on prevalence rates and replaced the continuous case with a discrete deterministic model.

Key words
Multistate models, Markov chains, Probability of transition, Actuarial modelling, Differential equations

JEL classification
G22, C29, I19

1 Úvod

Podstatou každého poistenia je finančná eliminácia negatívnych udalostí, ktoré vznikli náhodne. Náhodná udalosť je nepredvídateľná a nedá sa určiť, kedy nastane, nevieme ju predpovedať ani nijako ovplyvniť. Práve pre poistenie kritických chorôb vzniklo množstvo

[1] Ekonomická univerzita, Fakulta hospodárskej informatiky, Katedra matematiky a aktuárstva, Dolnozemská cesta 1, 852 35 Bratislava, zsolt.simonka@euba.sk.

[2] Ekonomická univerzita, Fakulta hospodárskej informatiky, Katedra matematiky a aktuárstva, Dolnozemská cesta 1, 852 35 Bratislava, lea.skrovankova@euba.sk.

[3] Ekonomická univerzita, Fakulta hospodárskej informatiky, Katedra matematiky a aktuárstva, Dolnozemská cesta 1, 852 35 Bratislava, frantisek.slaninka@euba.sk.

aktuárskych modelov, pomocou ktorých sa aktuári snažia predikovať ich vývoj a stanoviť tak vhodné parametre pre daný poistný produkt.

Kritické choroby môžeme rozdeliť do dvoch skupín:

- skupina chorôb, ktoré sa neustále rozširujú,
- skupina operácií ako dôsledok choroby.

Kritická choroba je presne špecifikovaná v poistných podmienkach poistnej zmluvy. Kritické choroby, ktoré zahŕňa každé poistenie kritických chorôb sú: infarkt myokardu, mozgová príhoda, rakovina (rôzne typy), zlyhanie obličiek a iné.

2 Poistenie kritických chorôb – vznik, vývoj a charakteristika

Poistenie kritických ochorení je jedným z najnovších foriem komerčného poistenia. Myšlienku poistenia kritických chorôb priniesol doktor Marius Barnard v roku 1983 (Škrovánková, 2011). Vychádzal zo svojich skúseností pri diagnostikovaní kritických chorôb pacientov. V tom čase sa sústredil iba na tri skupiny chorôb, a to rakovinu, srdcový infarkt a cievnu mozgovú príhodu. Doktor Barnard videl potrebu aj v krytí zlyhaní obličiek a následnej transplantácii. Časom sa pridali ďalšie kritické choroby: oslepnutie, skleróza multiplex a iné. V dnešnej dobe poistenie kritických ochorení zahŕňa až okolo 30 chorôb. Napriek tomu, že nárok na poistné plnenie vzniká diagnostikovaním jednej z chorôb, sa na tento typ poistenia pozerá skôr ako na produkt životného a nie zdravotného poistenia.

V začiatkoch ponúkania poistenia kritických chorôb nebol tento produkt pre poisťovne výnosný. Bolo to zapríčinené zlým nastavením poistných podmienok. Prvým problémom bol veľký počet poistných udalostí, ktoré vznikli hneď po podpísaní poistnej zmluvy. Táto skutočnosť viedla k zavedeniu tzv. doby odkladu, keď poistné obdobie začína plynúť až po určitom čase (zvyčajne tri až šesť mesiacov) po podpísaní poistnej zmluvy (Škrovánková, 2011). Druhým problémom bola definícia choroby - vyžadovali presnejší opis konkrétnej choroby v poistnej zmluve. Počet chorôb, ktoré spadali pod toto poistenie sa zvýšil. V roku 1985 boli v zozname štyri kritické choroby, na začiatku 90-tych rokov minulého storočia sa zoznam rozšíril na približne 20 chorôb.

Vývoj poistných podmienok sa zaoberal aj poistným krytím po vzniku choroby. Produkt sa ponúkal v dvoch variantoch. Prvý variant je obnovenie krytia pre kritické choroby a výplata poistnej sumy ako samostatného poistenia. Druhý variant poistenia je ten, keď poistenie kritických chorôb je súčasťou životného poistenia. Poistenie kritických chorôb ako samostatné poistenie sa u nás predáva zriedka. Životné poistenie s pripoistením kritických chorôb je na Slovensku rozšírenejšie, pretože je lacnejšie a zabezpečí finančné prostriedky aj v prípade, ak poistenec kritickú chorobu prekoná. V posledných rokoch sa dostáva do ponuky poistenia kritických chorôb aj moderná konštrukcia, v ktorej poistná suma závisí aj od štádia choroby. Poistné plnenie nezaniká pri diagnostikovaní prvej závažnej choroby, ale poistenec môže dostať aj viacnásobné poistné plnenie.

Ďalším problémom je určenie miery výskytu chorôb. Toto určenie je veľmi náročné z rôznych dôvodov, najmä kvôli nedostatočnému počtu spoľahlivých štatistických dát. Socio-ekonomické faktory, ktoré majú tiež vplyv na diagnostikovanie choroby, sa niekedy ťažko determinujú. Preto je vysoké riziko chybovosti pri výpočtoch. Treba pozerať aj na rýchly vývoj medicínskej vedy. Zlepšenie techniky v chirurgii vedie k možnosti častejších operácií a to tiež znamená, že štatistické údaje starnú rýchlejšie a nezodpovedajú skutočnosti. Všetky tieto artikle vedú k tomu, že poistno-matematické základy pre výpočet tohto poistenia sú veľmi náročné, a preto by sa jedna poistná zmluva nemala upisovať na dlhé časové obdobie (Škrovánková, L. a Škrovánková, P., 2010).

Hlavnou myšlienkou tohto poistenia je finančné zabezpečenie pre potrebu dlhodobej starostlivosti v dôsledku kritickej choroby. Osoba, ktorá trpí niektorým z kritických ochorení nedokáže zvyčajne vykonávať bežné činnosti.

Poistná suma slúži hlavne na tieto úkony:

- náklady na uzdravenie, rehabilitáciu a kúpeľnú liečbu,
- nadštandardnú zdravotnú starostlivosť,
- zaistenie nevyhnutnej ošetrovateľskej služby,
- náhradu za zníženie príjmu, resp. žiaden príjem v dôsledku choroby,
- schopnosť splácania pôžičiek a hypoték,
- možnú potreba rekonštrukcie bytového priestoru,
- liečebný pobyt doma alebo v zahraničí.

Poisťovne dnes poisťujú veľké množstvo kritických ochorení, ale len 5 z nich tvorí značné percento všetkých hlásených prípadov. Poistenie kritických ochorení poisťovne ponúkajú v dvoch formách:

- Poistenie kritických chorôb je súčasťou životného poistenia na akceleračnej báze. Zrýchlené vyplatenia poistnej sumy predstavuje poistné plnenie vyplatené na základe diagnostikovania závažnej choroby. Znižuje poistnú sumu životného poistenia. Krytie kritických chorôb je vo výške k percentám z poistnej sumy životného poistenia. Môže to byť aj plná akcelerácia, teda poistná suma je vyplatená celá a zaniká základné životné poistenie.
- Ako samostatné poistné plnenie, ktoré neovplyvňuje poistnú sumu základného poistenia. Môže byť vo forme pripoistenia alebo ako samostatné poistenie bez dodatočného základného poistenia (Škrovánková, Simonka, 2016).

3 Všeobecný viacstavový model s Markovovou vlastnosťou

Budeme vychádzať z predpokladu uzavretej skupiny poistencov bez možnosti ďalšieho vstupu osôb do systému. Predpokladáme tiež, že existuje konečná množina stavov o počte *n*. Označme $S(x)$ náhodnú premennú, ktorej hodnoty vyjadrujú v akom stave sa nachádza osoba vo veku *x*, pričom *x* je spojitý čas z intervalu $(0,\infty)$. Pravdepodobnosť, že poistená osoba vo veku $x + t$ sa nachádza v stave *j* za predpokladu, že vo veku *x* sa nachádzala v stave *i*, označíme podľa zaužívanej aktuárskej symboliky (Sekerová a Bilíková, 2005):

$$ {}_t p_x^{ij} = P\left[S(x+t) = j \middle| S(x) = i \right] \text{ pre } i, j \in \{1, 2, ...n\} \tag{1}$$

Stochastický proces, na ktorého opis sme použili vyššie uvedené podmienené pravdepodobnosti, je časovo nehomogénny, pretože závisí od spojitého času *t* aj od premennej *x*, ktorá reprezentuje vek poistenej osoby. Ak budeme predpokladať, že pravdepodobnosti prechodu ${}_t p_x^{ij}$ nezávisia od minulého priebehu, teda nie sú podmienené skutočnosťou pred časom *t*, potom má tento proces Markovovu vlastnosť (Potocký, 2012).[4]

Ďalej zavedieme pojem *absorpčný stav*. Stav *r* je absorpčný, ak pre pravdepodobnosť prechodu platí ${}_t p_x^{rj} = 0$ pre $\forall\ j \neq r$. Inými slovami, ak sa osoba vo veku *x* nachádza v stave *r*, je nemožné, aby sa v čase $x+t$ nachádzala v ktoromkoľvek inom stave. Znamená to, že z tohto

[4] V prípade, že vek *x* je diskrétna veličina, hovoríme o Markovovom reťazci (Pitacco, 1995).

stavu nie je možné vystúpiť. Vstup do absorpčného stavu predstavuje pre poistenca zánik poistnej zmluvy alebo vznik poistnej udalosti (Škrovánková, 2013). Pre absorpčný stav platí:

$$\sum_{j=1}^{n} {}_t p_x^{rj} = {}_t p_x^{rr} = 1 \quad \text{pre} \quad \forall\ x, t \geq 0 \tag{2}$$

Teda pravdepodobnosť toho, že osoba vo veku $x+t$ sa bude nachádzať v absorpčnom stave r, ak sa vo veku x nachádzala v tom istom absorpčnom stave r sa rovná istej udalosti. Je potrebné rozlišovať medzi pravdepodobnosťami ${}_t p_x^{ii}$ a ${}_t p_x^{\overline{ii}}$. Podstatný rozdiel medzi nimi spočíva v skutočnosti, či je možné, aby poistený opustil stav i.

Pre $x \geq 0, t \geq 0, i \in \{1, 2, ... n\}$ sa definujú takto

$${}_t p_x^{ii} = P\left[S(x+t) = i \middle| S(x) = i\right] \tag{3}$$

$${}_t p_x^{\overline{ii}} = P\left[S(x+k) = i, \forall k \in (0, t) \middle| S(x) = i\right] \tag{4}$$

Ak budeme predpokladať, že pravdepodobnosť viacnásobných prechodov v krátkom časovom intervale $(x+t, x+t+h)$ je veľkosti $o(h)$, potom môžeme pravdepodobnosť ${}_t p_x^{ii}$ nahradiť pravdepodobnosťou ${}_t p_x^{\overline{ii}}$, pretože v tomto krátkom časovom intervale dĺžky h je ich rozdiel rádu 0 (Škrovánková, 2013).

$${}_h p_{x+t}^{ii} = {}_h p_{x+t}^{\overline{ii}} + o(h) \tag{5}$$

Podstatnou požiadavkou pre tvorbu viacstavového modelu je znalosť intenzít prechodov μ_{x+t}^{ij} zo stavu i do stavu j, čo definujeme nasledovne:

$$\mu_{x+t}^{ij} = \lim_{h \to 0^+} \frac{{}_h p_{x+t}^{ij}}{h} \tag{6}$$

v súlade s už vytvorenými aktuárskymi modelmi pre toto poistenie (Škrovánková, 2013).

4 Konštrukcia spojitého modelu pre poistenie kritických chorôb

Na opis poistenia kritických chorôb ako jednej z foriem zdravotného poistenia sa vo všeobecnosti používajú viacstavové modely, pomocou ktorých je možné vyjadriť vývoj daného poistného kontraktu ako množinu stavov časovo spojitého alebo diskrétneho nehomogénneho Markovovho reťazca (Škrovánková, 2013). Ak sú dostupné aj dáta o zotrvaní v stave chorý, potom pre účely modelovania priebehu poistenia môžeme uvažovať o použití semi-markovovských procesov alebo o prístupe na základe štiepenia stavov (Škrovánková, L. a Škrovánková, P., 2010).

Odhad pravdepodobností prechodu je kľúčovou zložkou modelovania, pretože na ich základe je možné kalkulovať výšku poistného. Národné štatistické údaje sú však koncipované veľmi všeobecne. Informácie o morbidite populácie v krajine sú agregované do 5-ročných skupín, pričom majú skôr formu prevalenčných mier. Teda vypovedajú o množstve ľudí v populácii, ktorí sú aktuálne chorí, čo umožňuje vypočítať len pravdepodobnosť toho, že človek trpí nejakou chorobou. Získať dáta prevalenčného typu je omnoho ľahšie, ako získať dáta incidenčného typu, ktoré vypovedajú o množstve osôb, u ktorých sa v danom roku vyskytol nový prípad choroby. Prevalenčné miery a incidenčné miery sú veľmi odlišné. Napríklad závažné ochorenie môže mať nízku incidenciu (ročne postihne malé množstvo ľudí), ale vysokú prevalenciu (trpí ňou v sledovanom roku veľa osôb), pretože prevalencia je sumou incidencií za predchádzajúce obdobie. Krátko trvajúce ochorenia môžu mať zasa vysokú mieru incidencie, hoci miera ich prevalencie je nízka. Ak existujú dostupné informácie o incidenciách jednotlivých chorôb v populácii, potom je odvodenie intenzít prechodu zo stavu aktívny do stavu chorý priamočiare. Ak sú však dostupné len dáta prevalenčného typu, potom je nutné prijať viacero predpokladov a odvodiť incidenčné miery na základe prevalenčných mier (Škrovánková, 2011).

Budeme sa venovať poisteniu kritických chorôb pomocou viacstavového modelu, ktorého základ je rozpracovaný a uvedený v (Škrovánková, 2013).

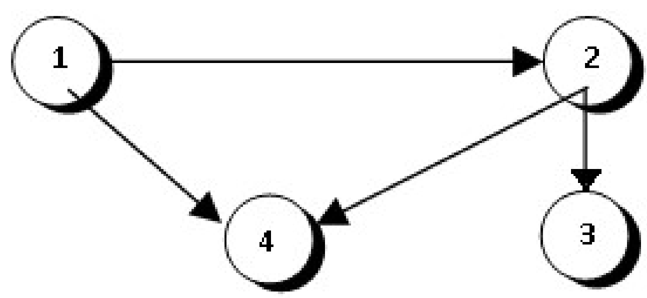
Nech x je vek poistenej osoby v deň uzavretia poistnej zmluvy a nech $S(x+t)$ je náhodný stav, v ktorom sa osoba nachádza vo veku $x+t$.

Nech sú prípustné 4 realizácie náhodnej premennej $S(x+t)$ tvoriace množinu stavov $\{1,2,3,4\}$, pričom jednotlivé stavy znamenajú:

1 – zdravý,
2 – chorý (trpiaci jednou zo zoznamu poistených kritických ochorení),
3 – smrť spôsobená závažným ochorením,
4 – smrť z iných príčin.

Predpokladáme, že $S(x)=1$, teda poistená osoba v čase podpisu zmluvy je zdravá. Obrázky 1 a 2 znázorňujú jednotlivé stavy a možné prechody medzi nimi.

Obr. 1: 4-stavový model poistenia kritických chorôb.



Zdroj: Vlastné spracovanie.

Nech náhodný proces $\{S(x+t), t \geq 0\}$ je nehomogénny, časovo spojitý náhodný proces s Markovovou vlastnosťou. Potom pravdepodobnosti prechodu zo stavu i do stavu j, $i, j \in \{1,2,3,4\}$ majú tvar:

$$ {}_t p_x^{ij} = P\left[S(x+t) = j \middle| S(x) = i\right] \tag{7}$$

a pre pravdepodobnosť zotrvania v stave ${}_t p_x^{\overline{ii}}$, kde $i \in \{1, 2\}$ platí:

$$ {}_t p_x^{\overline{ii}} = P\left[S(x+u) = i, u \in (0, t) \middle| S(x) = i\right] \tag{8}$$

Vychádzajúc zo vzťahov (5), (7) a

$$\mu_x^{ij} = \lim_{t \to 0^+} \frac{{}_t p_x^{ij}}{t} \tag{9}$$

podľa (Škrovánková, 2013) vyjadríme diferenciálne rovnice a príslušné intenzity prechodu zo stavu *i* do stavu *j,* kde $i,\ j \in \{1, 2, 3, 4\}$:

$$\frac{d\,{}_t p_x^{\overline{11}}}{dt} = -{}_t p_x^{\overline{11}} \cdot \mu_{x+t}^{12} - {}_t p_x^{\overline{11}} \cdot \mu_{x+t}^{14} \tag{10}$$

$$\frac{d\,{}_t p_x^{\overline{22}}}{dt} = -\,{}_t p_x^{\overline{22}} \cdot \mu_{x+t}^{24} - {}_t p_x^{\overline{22}} \cdot \mu_{x+t}^{23} \tag{11}$$

$$\frac{d\,{}_t p_x^{11}}{dt} = -\,{}_t p_x^{11}\left[\mu_{x+t}^{12} + \mu_{x+t}^{14}\right] \tag{12}$$

$$\frac{d\,{}_t p_x^{22}}{dt} = -\,{}_t p_x^{22}\left[\mu_{x+t}^{23} + \mu_{x+t}^{24}\right] \tag{13}$$

$$\frac{d\,{}_t p_x^{12}}{dt} = -\,{}_t p_x^{12}\left[\mu_{x+t}^{23} + \mu_{x+t}^{24}\right] + {}_t p_x^{11} \cdot \mu_{x+t}^{12} \tag{14}$$

$$\frac{d\,{}_t p_x^{14}}{dt} = {}_t p_x^{11} \cdot \mu_{x+t}^{14} + {}_t p_x^{12} \cdot \mu_{x+t}^{24} \tag{15}$$

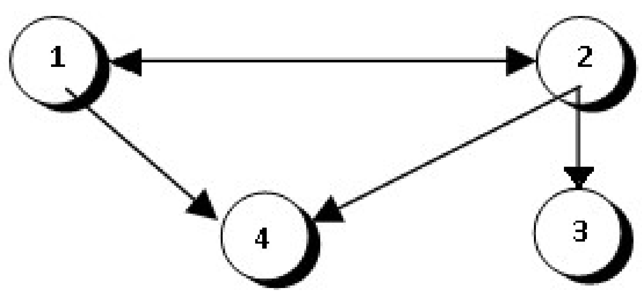
$$\frac{d\,{}_t p_x^{23}}{dt} = {}_t p_x^{22} \cdot \mu_{x+t}^{23} \tag{16}$$

$$\frac{d\,{}_t p_x^{24}}{dt} = {}_t p_x^{22} \cdot \mu_{x+t}^{24} \tag{17}$$

Keďže z uvedeného modelu vyplýva, že výstup zo stavu 1-zdravý je definitívny, teda nemôže nastať situácia, že sa osoba, ktorá vystúpila zo stavu 1-zdravý, do tohto stavu znovu vráti a rovnako ireverzibilný je aj výstup zo stavu 2-chorý. Potom platia nasledujúce rovnosti: ${}_t p_x^{11} = {}_t p_x^{\overline{11}}$ a ${}_t p_x^{22} = {}_t p_x^{\overline{22}}$. Riešenia týchto diferenciálnych rovníc (pri známych intenzitách $\mu_{x+t}^{12}, \mu_{x+t}^{23}, \mu_{x+t}^{24}, \mu_{x+t}^{14}$ prechodov) predstavujú pravdepodobnosti prechodov 4-stavového modelu poistenia kritických chorôb s prechodmi znázornenými na obrázku 1.

Rozšírením 4-stavového modelu (obr. 1) o vratný prechod medzi stavmi 1-zdravý a 2-chorý, dostaneme 4-stavový model poistenia choroby Covid-19 (obr. 2). Potom však výstupy zo stavov 1-zdravý a 2-chorý nie sú definitívne, nakoľko z ochorenia Covid-19 môže osoba vyzdravieť a rovnako môže znova ochorieť.

Obr. 2: 4-stavový model poistenia choroby Covid-19.



Zdroj: Vlastné spracovanie.

Vyššie uvedenou metodológiu vieme vytvoriť diferenciálne rovnice opisujúce spojité procesy aj v 4-stavovovom modeli poistenia choroby Covid-19 (obr. 2). Demonštračne uvádzame jednu z nich pre vratný stav 2-chorý a 1-zdravý, ktorý v pôvodnom modeli (obr. 1) pre ireverzibilitu stavu 1-zdravý nebol.

$$\frac{d\,{}_t p_x^{21}}{dt} = -\,{}_t p_x^{21}\left[\mu_{x+t}^{12} + \mu_{x+t}^{14}\right] + {}_t p_x^{22} \cdot \mu_{x+t}^{21} \tag{18}$$

<u>Poznámka:</u> Jednou z najpodstatnejších prekážok pri aplikácii markovovských modelov v zdravotnom poistení a špeciálne pri aplikácii semi-markovovských modelov je odhad intenzít a pravdepodobností prechodu, ktorý si vyžaduje široký a konzistentný súbor štatistických dát, vypovedajúci o prechodoch medzi stavmi pozorovanej populácie[5]. Vzhľadom na množstvo nejednoznačných, nepresných a štatisticky nedostatočne spracovaných údajov o Covid-19 by takáto kvantifikácia zatiaľ stále nedávali aplikovateľné výsledky.

5 Aktuárske modelovanie intenzít prechodu

Prvý predpoklad, ktorý zavedieme, sa týka úmrtnostných intenzít prechodu μ_x^{14} a μ_x^{23}. Vychádzame pritom z metodológie navrhnutej v (Baione a Levantesi, 2014). Budeme predpokladať, že je na ich postačujúci opis možné použiť dve navzájom nezávislé Gompertz-Makehamove funkcie (GM). Všeobecný tvar GM funkcie s počtom parametrov $(r+s)$ je definovaný nasledujúcim vzťahom (Sekerová a Bilíková, 2005):

$$\mathrm{GM}(r,s) = \left(\sum_{h=1}^{r} \alpha_h x^{h-1}\right) + e^{\sum_{k=1}^{s} \beta_k x^{k-1}} \tag{19}$$

kde α a β sú vektory parametrov. Pre tvorbu jednotlivých GM funkcií je najskôr nutné určiť počty parametrov r a s. Vychádzajúc z (Baione a Levantesi, 2014), postačujúce aproximácie je možné dosiahnuť určením hodnôt $r \le 1$ a $s \le 2$. Avšak v situácii, kedy je pre odhad intenzít prechodu k dispozícii len veľmi skromná databáza údajov, počet parametrov sa zvykne určiť ako $r = 0$ a $s = 2$ (vtedy prvá časť vzťahu (20) nedáva zmysel a vypadáva). Hoci je zrejmé, že preloženie mortalitných mier funkciou v tomto tvare nemusí byť na každom intervale dostatočne tesné, týmto spôsobom je možné vyhnúť sa preparametrizácii modelu (Baione a Levantesi, 2014). Potom, za predpokladu, že $\mu_x^{14} \approx \mathrm{GM}^{14}(0,2)$ a $\mu_x^{23} \approx \mathrm{GM}^{23}(0,2)$, dostávame nasledujúce vzťahy:

$$\mu_x^{14} = e^{\left(\beta_1^1 + \beta_2^1 x\right)}, \text{ pre } \beta_1^1, \beta_2^1 > 0 \tag{20}$$

$$\mu_x^{23} = e^{\left(\beta_1^2 + \beta_2^2 x\right)}, \text{ pre } \beta_1^2, \beta_2^2 > 0 \tag{21}$$

Keďže na odhad tretej úmrtnostnej intenzity prechodu μ_x^{24} nachádzajúcej sa v použitom modeli, by bolo nutné zhromaždiť informácie o mortalite v jednotlivých segmentoch vekových skupín, v ktorých bola diagnostikovaná jedna z kritických ochorení, inej ako v dôsledku závažnej choroby, použijeme prístup navrhnutý v (Pitacco, 1995). Tento prístup je založený na predpoklade, že úroveň mortality chorých zapríčinenej inými skutočnosťami ako samotnou chorobou sa líši od úrovne mortality zdravých o tzv. extra mortalitu γ. Teda

$$\mu_x^{24} = \mu_x^{14}(1+\gamma) \tag{22}$$

[5] Toto bude predmetom ďalšieho výskumu pre ochorenie Covid-19.

Diskrétne hodnoty intenzít prechodu μ_x^{12} zo stavu aktívny do stavu chorý, je možné odhadnúť priamo z dát obsahujúcich informácie o počte novovzniknutých prípadov ochorení v jednotlivých vekových skupinách. Následnou graduáciou je potom možné získať hodnoty intenzít pre jednotlivý vek.

Na vyjadrenie vzťahov, pomocou ktorých je možné z dostupných dát dospieť k incidenčným, prevalenčným a mortalitným mieram pre populáciu z vekovej skupiny $(x, x+n)$, kde n je dĺžka vekového intervalu, sme vychádzali (Baione a Levantesi, 2014) a použili nasledovné označenia:

${}_nL_x$ - stredný stav populácie z vekovej skupiny $(x, x+n)$,

${}_nL_x^{2p}$ - počet osôb z vekovej skupiny $(x, x+n)$ trpiacich kritickým ochorením (prevalencia),

${}_nL_x^{2i}$ - počet novovzniknutých prípadov kritických ochorení vo vekovej skupine $(x, x+n)$ (incidencia),

${}_nD_x$ - počet úmrtí vo vekovej skupine $(x, x+n)$,

${}_nD_x^{23}$ - počet prechodov zo stavu chorý do stavu mŕtvy zapríčinených kritickým ochorením vo vekovej skupine $(x, x+n)$.

Potom pozorované prevalenčné miery ${}_nf_x$ a pozorované incidenčné miery ${}_ni_x$ v jednotlivých vekových skupinách vyjadríme ako

$$ {}_nf_x = \frac{{}_nL_x^{2p}}{{}_nL_x} \tag{23} $$

$$ {}_ni_x = \frac{{}_nL_x^{2i}}{{}_nL_x} \tag{24} $$

Na výpočet pozorovanej mortalitnej miery ${}_nM_x^{23}$ chorých spôsobenej kritickým ochorením vo vekovej skupine $(x, x+n)$ použijeme vzťah:

$$ {}_nM_x^{23} = \frac{{}_nD_x^{23}}{{}_nL_x^{2p}} \tag{25} $$

Aplikovaním vzťahu: ${}_nD_x - {}_nD_x^{23} = {}_nD_x^{14} + {}_nD_x^{24}$, kde symbolom ${}_nD_x^{ij}$ označujeme očakávaný počet prechodov zo stavu i do stavu j, pre $i, j \in \{1,2,3,4\}$, medzi vekmi x a $x+n$, dostávame vyjadrenie pre pozorovanú mortalitnú mieru zdravých jedincov vo vekovej skupine $(x, x+n)$.

$$ {}_nM_x^{14} = {}_nM_x - {}_nm_x^{23} \tag{26} $$

kde ${}_nM_x = \frac{{}_nL_x}{{}_nD_x}$ je mortalitná miera medzi vekom x a $x+n$ a označenie ${}_nm_x^{23} = \frac{{}_nD_x^{23}}{{}_nL_x}$ vyjadruje úmrtnostnú mieru spôsobenú kritickými chorobami v rámci celej populácie (nie populácie postihnutej ktoroukoľvek chorobou zo zoznamu závažných chorení). Potom:

$$ {}_nM_x^{14} = \frac{{}_nD_x^{14}}{{}_nL_x^{1}} = \frac{{}_nD_x^{24}}{{}_nL_x^{2p}} = {}_nM_x^{24} $$

kde ${}_nL_x^1$ predstavuje očakávaný počet zdravých jedincov medzi vekom x a $x+n$.

Teraz budeme predpokladať, že úroveň mortality zostáva konštantná pre každý vek vekovej skupiny. Na základe tohto predpokladu môžeme odhadnúť intenzity μ_x^{14} a μ_x^{23}, pretože implikuje nasledujúce vzťahy:

$$\mu_\tau^{14} = {}_nM_x^{14} \text{ pre } \forall\tau \in (x, x+n) \tag{28}$$

$$\mu_\tau^{23} = {}_nM_x^{23} \text{ pre } \forall\tau \in (x, x+n) \tag{29}$$

Pretože predpokladáme ${}_nM_x^{14} = {}_nM_x^{24}$, potom aj

$$\mu_\tau^{24} = {}_nM_x^{14} \text{ pre } \forall\tau \in (x, x+n) \tag{30}$$

Zaveďme nasledujúcu aproximáciu:

$${}_nM_x^{12} \approx \frac{{}_nL_{x-n}^{2i} + {}_nL_x^{2i}}{2\,{}_nL_x} \tag{31}$$

kde ${}_nL_x^{2i}$ je počet incidencií závažného ochorenia vo vekovej skupine $(x, x+n)$ a ${}_nL_{x-n}^{2i}$ je počet incidencií v predchádzajúcej vekovej skupine.

Pre intenzitu prechodu μ_x^{12} zo stavu zdravý do stavu chorý predpokladajme nasledujúci vzťah:

$$\mu_x^{12} = M_x^{12} \tag{32}$$

M_x^{12} sú vyrovnané odhady intenzít prechodu zo stavu zdravý do stavu chorý pre osoby vo veku x, ktoré môžeme získať graduáciou hodnôt M_x^{12} (napríklad pomocou funkcie cubic spline).

Doposiaľ opísaný Markovovský model pracuje s predpokladom, že pravdepodobnosti prechodu medzi jednotlivými stavmi pre osobu vo veku x závisia len od aktuálneho stavu, v ktorom sa osoba nachádza v tomto veku.

Oveľa realistickejšie a oveľa náročnejšie pre výpočet pravdepodobností prechodu sú však modely, ktoré zohľadňujú (Pitacco, 1995):

- závislosť niektorých intenzít a pravdepodobností od veku osoby pri podpise poistnej zmluvy,
- závislosť niektorých intenzít a pravdepodobností od doby strávenej v aktuálnom stave od posledného prechodu do tohto stavu,
- závislosť niektorých intenzít a pravdepodobností od celkového času stráveného v stave aktívny a chorý od podpisu poistnej zmluvy.

6 Záver

Úvodom príspevku sme poskytli prehľad štruktúry a základných znakov produktu poistenia kritických chorôb v životných poisťovniach. Ďalej vychádzajúc z predpokladov všeobecného viacstavového modelu sme sa venovali konštrukcii modelu pre poistenie kritických chorôb. Uvedené diferenciálne rovnice predstavujú matematický model uvažovaného systému. Pravdepodobnostný rámec bol založený na riešení týchto diferenciálnych rovníc. Na základe existencie incidencií pre vekové skupiny, možno stanoviť odhady intenzít prechodu zo stavu aktívny do stavu chorý na základe úpravy metodológie navrhnutej v (Baione a Levantesi, 2014). Intenzity prechodu boli odhadnuté na báze prevalenčných mier a tak spojitý prípad nahradený diskrétnym vytvárajúc zázemie na tvorbu diskrétnych deterministických modelov.

V prípade, že niektoré intenzity prechodu závisia od času stráveného v konkrétnom stave (od doby zotrvania v stave), potom sú vlastnosti Markovovho procesu stratené a je nutné použiť iný prístup, napr. Semi-Markovovský prístup alebo prístup na základe štiepenia stavov (10 Škrovánková, L. a Škrovánková, P., 2010). Tento prístup však bude predmetom nášho ďalšieho výskumu, nakoľko by mohol byť pre poisťovne zaujímavým. Na základe neho by sa poisťovne mohli vyhnúť predčasnej výplate poistnej sumy v prípadoch, kedy krátko po diagnostikovaní závažného ochorenia nedôjde k smrti poisteného, a skôr rozložiť poistnú sumu na sériu platieb, ktoré vyplatí poistenému postupne.

Príspevok bol spracovaný v rámci riešenia grantovej úlohy VEGA 1/0431/22 *Implementácia inovatívnych prístupov modelovania rizík v procese ich riadenia v interných modeloch poisťovní v kontexte s požiadavkami direktívy Solvency II*.

Literatúra

[1] Baione, F. & Levantesi, S. (2014). *A health insurance pricing model on prevalence rates: Application to critical illness insurance.* Mathematics and Economics 1/2014.
[2] Lamoš, F. & Potocký, R. (1998). *Pravdepodobnosť a matematická štatistika. 2.* vyd. Bratislava: Vydavateľstvo UK.
[3] Mojžišová, E. & Škrovánková, P. (2010). *Transformačné kroky v zdravotnom poistení a analýza zdravotnej starostlivosti v SR.* Ekonomika a informatika 2/2009. Bratislava: ES EU.
[4] Páleš, M. (2015). *Využitie a konštrukcia úmrtnostných tabuliek v životnom poistení.* Slovenská štatistika a demografia 1/2015. Bratislava: Štatistický úrad SR.
[5] Pitacco, E. (1995). *Actuarial models for pricing Disability Benefits: Towards an unifying Approach.* Insurance: Mathematics and Economics 16.
[6] Potocký, R. (2012). *Modely v životnom a neživotnom poistení.* Bratislava: STATIS.
[7] Rovný, I. (2009). *Verejné zdravotníctvo.* Bratislava: Vydavateľstvo Ekonóm.
[8] Sekerová, V. & Bilíková, M. (2005). *Poistná matematika.* Bratislava: Vydavateľstvo Ekonóm.
[9] Simonka, ZS. & Škrovánková, L. (2016). *New approaches to risk assessment of critical illness.* 8th International Scientific Conference Managing and Modelling of Financial Risks, VŠB-TU of Ostrava. Ostrava: Faculty of Economics, Department of Finance.
[10] Škrovánková, L. (2013). *Zdravotné a nemocenské poistenie.* Bratislava: Vydavateľstvo Ekonóm.
[11] Škrovánková, L. & Škrovánková, P. (2010). *Dôchodkové, zdravotné a nemocenské poistenie.* Bratislava: Vydavateľstvo Ekonóm.
[12] Škrovánková, P. (2011). *Modely prerozdelenia poistného v zdravotnom poistení.* Ekonomika a informatika 1/2011. Bratislava: ES EU.
[13] HPI (www.hpi.sk)
[14] Sociálna poisťovňa (www.socpoist.sk)