*Roman Pavelka*

# MODELOVÁNÍ VLIVU SOCIOEKONOMICKÉHO POZADÍ ŽÁKŮ A STUDENTŮ ŠKOL SR NA VÝKONNOST V MATEMATICE VYUŽITÍM HIERARCHICKÝCH LINEÁRNÍCH MODELŮ[1]

## Úvod

Cílem tohoto článku je vysvětlení základů víceúrovňového hierarchického modelování a jeho praktická aplikace při modelování vlivu socioekonomického zázemí (anglicky Index of Economic, Social and Cultural Status, dále zkratkou jako „ESCS“) na výkonnost žáků škol SR ve věku 15 let v matematice. Po krátkém úvodu následuje objasnění základního konceptu hierarchického modelování. Stručný popis použitých dat, jejich původ a základní charakteristiky bude náplní další části. Vlastní hierarchické modelování bude prezentováno v následující kapitole tohoto článku. Závěrem příspěvku bude provedeno zhodnocení odhadnutých modelů, které mají modelovat působení socioekonomického pozadí žáků a studentů škol SR na výkonnost v matematice.

## 1 KONCEPT HIERARCHICKÉHO MODELOVÁNÍ

Modelové přístupy se stávají stále důležitější součástí vědeckých nástrojů při analyzování stavu a vývoje různých oblastí života společnosti. Použití modelového přístupu však současně nemusí být zárukou pro zjištění sledovaných informací o zkoumaném jevu či procesu. Proto také i hierarchické lineární modelování představuje jeden z možných způsobů analýzy vlivu socioekonomického pozadí žáků na jejich výkonnost v matematice. Použití víceúrovňového modelování není příliš rozšířeno. Zatím zpravidla často dochází k tomu, že i data s hierarchickou strukturou a vícestupňovým náhodným výběrem jsou modelovány pomocí jednoúrovňové lineární regrese. Statistické modely tak nemusí vždy respektovat koncept hierarchického modelování. Z tohoto důvodu odhadované modely přestávají vystihovat modelovanou realitu.

Hierarchické regresní modely byly vytvořeny již ve druhé polovině 20. století a jsou neustále postupně rozvíjeny. Rozvoj uvedených modelů se zintenzívnil ve druhé polovině 80. let. V současné době jsou tyto modely neustále používány. Základní myšlenky

[1] V anglosaské literatuře se k popisu této třídy regresních modelů používá několik ekvivalentních termínů: multilevel modelling (nejužívanější), random-coefficient modelling, hierarchical modelling, mixed-effects modelling, covariance components models. I když se nejedná o synonyma, často jsou tyto pojmy za synonyma považovány. Nejobecnějším pojmem je multilevel modelling a ostatní pojmy označují jen speciální přístupy v rámci hierarchického modelování.

konceptu hierarchického modelování lze výstižně vyjádřit pomocí 2 nejdůležitějších motivací[2]:

- teoreticko-interpretační a
- matematicko-statistickou.

Hierarchické modelování pracuje s hierarchickou nebo také vnořenou strukturou dat, například popisující příslušníky (členy) uvnitř svých organizačních skupin. Typickým příkladem jsou žáci či studentu uvnitř svých tříd, resp. škol. Popisované vnoření může být také představováno longitudinálním (opakovaným) sledováním jednotlivých lidí nebo respondentů v rámci shluků (klastrů) při klastrovém výběru vzorku k šetření. Výraz *hierarchické modelování* nebo *víceúrovňová analýza* je použit jako obecné označení pro veškeré modely takto hierarchicky uspořádaných dat. Víceúrovňová analýza byla zformována jako metoda výzkumu, kde jednotlivci i jednotlivé úrovně se vyznačují odlišnými prameny variability. Tato variabilita by měla být modelována jako náhodné vlivy. Proměnné vyšší úrovně přiřazují každé jednotce na nižší úrovni hodnotu měřenou na vyšší úrovni. Například každý žák příslušné školy má připojenu informaci (tedy hodnotu proměnné vyšší úrovně), zda škola, kterou navštěvuje, je školou soukromou či státní.

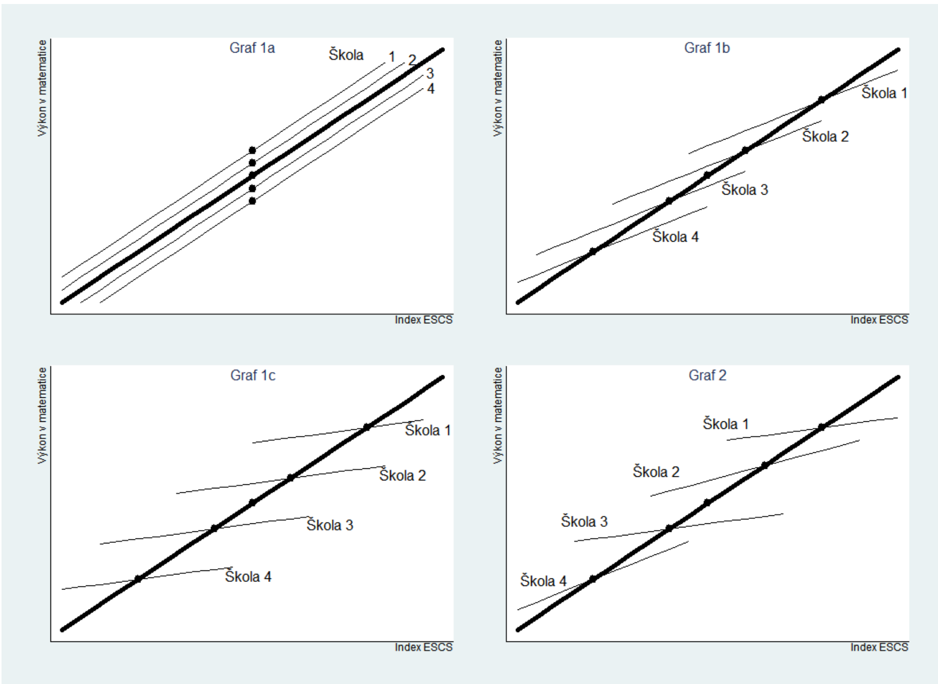
Z matematicko-statistického pohledu se hierarchické regresní modely dělí do 2 nejdůležitějších tříd[3], a to víceúrovňové regresní modely a modely pro víceúrovňové kovarianční struktury (modelování pomocí strukturálních rovnic). Uvažované regresní modely lze chápat jako zobecnění klasické lineární regresní analýzy (ale i regrese logistické, ordinální a dalších metod statistické analýzy). Například již díky metodě pořízení výběrového souboru není splněn základní požadavek klasické lineární regresní analýzy o nezávislosti jednotlivých pozorování. Typickým příkladem jsou empirické výzkumy z oblasti vzdělání: vybírají-li se v prvním stupni školy a ve druhém třídy, v nichž se dotazují více žáků, zcela jistě nelze odpovědi/výsledky žáků z jednotlivých tříd/škol považovat za vzájemně nezávislé. Navíc hierarchická regresní analýza dokáže vysvětlovat rozdíly mezi třídami, školami, rodinami, skupinami atd. Všechny tyto problémy jsou řešitelné pomocí zavedení více úrovní, kdy se nemodeluje pouze první úroveň (jako v klasické regresi), ale je možné modelovat každou relevantní úroveň[4].

Rozdíl mezi jednoduchou lineární regresí a víceúrovňovým lineárním regresním modelem je zaznamenán na obrázku 1. Zobrazené grafy představují vztah mezi socioekonomickým zázemím (v podobě indexu *ESCS*) studenta či žáka a odhady výkonu studenta či žáka v matematice. Každý graf na obrázku 1 znázorňuje situaci mezi socioekonomickým zázemím a výkonem žáků v matematice pro různé země pro 4 školy.

[2] SOUKUP, P. 2006. Proč užívat hierarchické lineární modely? In: *Sociologický časopis/Czech Sociological Review*, 2006, Vol. 42, No. 5: 987–1012. s. 988.
[3] HOX, Joop, J. 2010. *Multilevel Analysis: Techniques and Applications (Quantitative Methodology Series). Second Edition*. New York (USA) and Hove (UK): Routledge, 2010, 392 s. ISBN 978–1–84872–846–2. s. viii.
[4] SOUKUP, P. 2006. Proč užívat hierarchické lineární modely? In: *Sociologický časopis/Czech Sociological Review*, 2006, Vol. 42, No. 5: 987–1012. s. 990.

Tlustá černá čára v grafech představuje regresní přímku jednoduché lineární regrese v rámci celého souboru údajů, ve které hierarchický charakter dat není brán do úvahy. Tenké přímky představují regresní vztah mezi proměnnou index *ESCS* a výkonem v matematice v rámci každé školy. Každá škola je vyjádřena samostatnou regresní přímkou. Vyznačené body na jednotlivých přímkách uprostřed představují místo, které odpovídá průměrné hodnotě indexu *ESCS* a průměrné hodnotě výkonu v matematice v rámci celku i jednotlivých škol.

**Obrázek 1:** Porovnání jednoduché (jednoúrovňové) lineární regrese a hierarchické (víceúrovňové) lineární regrese




*Zdroj:* PISA Data Analysis Manual SPSS, Second Edition. PARIS: OECD PUBLISHING, 2009. 478 s. ISBN 978-92-64-05626-8. s. 201.

Situace v grafu 1a vypovídá o tom, že regresní přímky jednotlivých škol jsou podobné, a blízko jednoduché lineární regresní přímce celkovému souboru. To znamená, že:

**Z hlediska socioekonomického zázemí studentů** (na ose grafu x):

- studenti z celé řady socioekonomického prostředí jsou rozprostřeni do různých škol. V rámci škol nacházejí žáci, kteří pokrývají celou škálu hodnot indexu *ESCS* (osa x);
- u většiny škol je průměrný index *ESCS* velmi blízký. Proto v souhrnu neexistuje sociální segregace škol.

**Z hlediska výkonu studentů v matematice** (na ose grafu y):

- v každé škole jsou studenti s nízkou, střední a vysokou úspěšností. Všechny rámci školy výsledky žáků pokrývají celou škálu hodnot (na ose y);
- v průměru školy mají podobnou úroveň výkonnosti a jsou velmi blízko u sebe. To také znamená, že rozdíl v průměru mezi školami je poměrně malý;
- v souhrnu není zaznamenána akademická segregace.

**Z pohledu vztahu mezi socioekonomickým zázemím studentů a jejich výkonu z matematiky**:

- v každé škole existuje pozitivní vztah mezi socioekonomickým zázemím a úspěšností studentů v matematice;
- v rámci všech škol studenti znevýhodnění z hlediska socioekonomického pozadí dosahují výkonů hluboko pod výkony studentů se zvýhodněným socioekonomické pozadím;
- regrese v rámci školy ukazuje, že existuje vztah mezi socioekonomickým zázemím žáků a jejich výkonem.

Zcela odlišný případ víceúrovňové analýzy je prezentován na obrázku 1 v grafu 2. Víceúrovňové regresní přímky (každá vyjadřuje regresi za jednotlivou školu) se podstatně odlišují od regresní přímky z jednoduché (jednoúrovňové) lineární regrese. Z Grafu 2 tedy vyplývá, že:

**Z hlediska socioekonomického zázemí studentů** (na ose grafu x):

- školy nepokrývají socioekonomickým zázemím svých žáků rozsah socioekonomického prostředí, které existuje na úrovni populace;
- zatímco zvýhodnění studenti z hlediska socioekonomického prostředí navštěvují především Školu 1, Škola 4 slouží k výuce zejména socioekonomicky znevýhodněným studentům;
- školy tedy nabírají své žáky z různých socioekonomických zázemí a v souhrnu existuje zřetelná sociální segregace na úrovni školy.

**Z hlediska výkonu studentů v matematice** (na ose grafu y):

- nejvyšších výkonů v matematice dosahují žáci ze Školy 1. Žáci s převážně slabšími výkony navštěvují školu 4;
- školy se do značné míry liší v průměrné úrovni výkonnosti svých žáků, což je viditelné z polohy průměrných výkonností za jednotlivé školy;
- existují značné rozdíly v průměrné výkonnosti mezi školami a v souhrnu je vysoká akademická segregace.

**Z pohledu vztahu mezi socioekonomickým zázemím studentů a jejich výkonu z matematiky**:

- v jednotlivých školách neexistuje vztah mezi socioekonomickým zázemím žáků a jejich výkonností;
- pro každou školu určuje pokrytí socioekonomického zázemí v rámci populace souhrn postavení jejich žáků.

Přechodné situace mezi situacemi na grafu 1a a grafu 2 jsou ilustrovány grafem 1b a grafem 1c.

## 2 HIERARCHICKÝ CHARAKTER POŘÍZENÝCH DAT

Cílovou populací ve statistickém šetření PISA[5] je patnáctiletá populace. Tato populace byla vybrána z toho důvodu, že ve většině zemí OECD studenti v tomto věku završují svoje povinné vzdělání.

Výběrový soubor byl pořízen pomocí dvojstupňové výběrové metody. Jakmile byla definována cílová populace, vzorky škol jsou vybírány s pravděpodobností úměrnou velikosti škol. Velikostí školy se rozumí počet patnáctiletých žáků navštěvujících školu. Jelikož je cílová populace odvozena od svého věku, je možné, že studenti vcházejí do šetření PISA z různých tříd v rámci stupňů vzdělání ISCED 2 a ISCED 3. K zajištění nevychýlenosti odhadů pro celou populaci studentů na základě výběrového souboru škol a studentů, vstupují do analýzy data studentů s vahami vzniklých na základě replikačních technik.

Při pořizování dat se nejprve vybírají vzorky jednotek vyšší úrovně (například školy) a pak přichází na řadu výběr z vybraných jednotek vyšší úrovně, tj. vybírají se studenti ze škol. V takovém případě výsledky žáků ve výkonnosti v matematice nejsou obecně nezávislé. Žáci stejné školy mají silnou tendenci být v některých společných vlastnostech velmi podobní. Tato tendence k silné podobnosti žáků je způsobena zejména tím, že danou školu navštěvují žáci srovnatelného socioekonomického postavení nebo například tím, že konkrétní škola se vyznačuje dalšími vlastnostmi, které mají stejnou hodnotu pro všechny její žáky.

[5] Poznámka autora: Mezinárodní studie OECD PISA se realizuje od roku 2000 v tříletých cyklech, přičemž zkoumá 3 oblasti funkční gramotnosti žáků: matematickou, přírodovědnou a čtenářskou. Hlavní sledovanou oblastí cyklu PISA 2012 byla matematická gramotnost. Slovensko se do studie OECD PISA zapojilo v roce 2012 už po čtvrté.

**Obrázek 2:** Ukázka dat mezinárodního šetření PISA 2012 s hierarchickou strukturou

| *Region* | *Škola* | *Index žáka* | *Třída* | *Studijní program* | *Měsíc narození* | *Rok narození* | *Pohlaví* | | *Výsledky matematiky* | | *Index ESCS* | | *Verze databáze* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | | | | | | |
| *Kód_regionu* | *Škola 1* | *1* | *A* | | *1* | *2000* | *0* | … | *1* | … | *45,36* | … | *1* |
| | | *2* | *A* | | *5* | *2000* | *1* | … | *2* | … | *85,23* | … | *2* |
| | | … | … | | … | … | … | … | … | … | … | … | … |
| | | $N_1$*-1* | *A* | | *7* | *2000* | *1* | … | *2* | … | *96,32* | … | *0* |
| | | $N_1$ | *A* | | *10* | *2000* | *0* | … | *1* | … | *25,58* | … | *1* |
| | *Škola 2* | *1* | *C* | | *12* | *2000* | *1* | … | *2* | … | *37,36* | … | *2* |
| | | … | … | | … | … | … | … | … | … | … | … | … |
| | | $N_2$*-1* | *C* | | *3* | *2000* | *1* | … | *1* | … | *85,60* | … | *0* |
| | | $N_2$ | *C* | | *4* | *2000* | *1* | … | *1* | … | *25,36* | … | *1* |

*Zdroj:* vlastní zpracování.

Pro účely modelování vlivu socioekonomického pozadí žáků škol SR byla použita data mezinárodního měření PISA 2012. Soubor dat obsahuje záznamy o školní výkonnosti 2 283 žáků včetně příslušných proměnných vyšší úrovně, kteří byli rozděleni nerovnoměrně mezi 119 škol. Školy SR byly vybrány z dat mezinárodního šetření tak, aby obsahovaly alespoň 10 žáků. Tímto způsobem se u vybraného vzorku škol zajistí, že pro každou jednotlivou školu bude možné modelovat vliv indexu *ESCS* na výkon žáků v matematice samostatným regresním modelem. Socioekonomické podmínky žáků jsou zaznamenány v podobě kompozitního indexu *ESCS*, který je podle pravidel OECD vytvořen na základě povolání rodičů žáka, nejvyšší úrovně měřeného pomocí let vzdělání rodičů a dalších indexů socioekonomického postavení rodiny žáka.

# 3 MODELOVÁNÍ VLIVU SOCIOEKONOMICKÝCH PODMÍNEK NA VÝKONNOST ŽÁKŮ V MATEMATICE

Víceúrovňové modelování má smysl používat, když sledovaná proměnná má různé hodnoty u různých jedinců a současně průměrná hodnota této sledované veličiny se také odlišuje v určitých vyšších celcích (úrovních, hierarchiích). V případě tohoto příspěvku je sledovanou veličinou výkonnost žáků a studentů v matematice a vyšší celky (úrovně, hierarchie) jsou představovány školami, které tito žáci navštěvují.

Na kolik se liší hodnoty proměnné na úrovni jednotlivců a na kolik na vyšších úrovních je možné měřit pomocí tzv. koeficientu vnitrotřídní korelace[6] (zkratka „ICC“). *ICC* je založen na konceptu rozkladu rozptylu na složku meziskupinovou a vnitroskupinovou, který je znám z analýzy rozptylu. Platí pravidlo, že čím větší je meziskupinová složka rozptylu (způsobená odlišnostmi na úrovni škol) ve srovnání s vnitroskupinovou (rozptyl uvnitř škol), tím spíše mají odlišnosti v matematické

[6] Koeficient vnitrotřídni korelace je v anglickém jazyce nazýván jako Intra-class correlation coefficient, proto lze použít pro jeho označení anglického akronymu ICC.

výkonnosti žáků na úrovni škol větší význam a liší se nejspíš v průměrné úrovni matematické výkonnosti na úrovni školy. Matematicky toto pravidlo vyjadřuje koeficient *ICC*.

**Tabulka 1:** Rozklad variability výsledků v matematice na vnitroškolní a meziškolní složku variance úspěšnosti žáků v matematice a koeficient *ICC* pro vybrané země

| Země | Mezi školami | Uvnitř škol | ICC |
|---|---|---|---|
| AUS | 2 594,1 | 6 610,7 | 28,2% |
| AUT | 5 040,5 | 4 302,3 | 54,0% |
| BEL | 6 079,2 | 4 964,2 | 55,0% |
| CAN | 1 513,8 | 6 254,2 | 19,5% |
| CZE | 5 432,8 | 4 266,5 | 56,0% |
| DEU | 5 374,6 | 4 348,0 | 55,3% |
| DNK | 1 211,6 | 5 588,5 | 17,8% |
| ESP | 1 288,3 | 6 178,2 | 17,3% |
| EST | 1 240,9 | 5 268,4 | 19,1% |
| FIN | 897,8 | 6 617,9 | 11,9% |
| FRA | 5 634,4 | 4 144,5 | 57,6% |
| GBR | 1 992,5 | 6 383,7 | 23,8% |
| GRC | 3 192,8 | 5 080,8 | 38,6% |
| HUN | 5 916,1 | 3 351,9 | 63,8% |
| CHE | 2 852,3 | 5 678,7 | 33,4% |
| CHL | 4 418,4 | 3 537,4 | 55,5% |
| IRL | 1 302,0 | 5 864,0 | 18,2% |
| ISL | 1 096,0 | 7 598,5 | 12,6% |
| ISR | 4 748,6 | 6 288,3 | 43,0% |
| ITA | 4 579,8 | 4 115,0 | 52,7% |
| JPN | 4 863,3 | 4 124,3 | 54,1% |
| KOR | 3 785,9 | 5 947,2 | 38,9% |
| LUX | 2 873,2 | 6 220,5 | 31,6% |
| MEX | 2 024,0 | 3 544,9 | 36,3% |
| NLD | 5 644,4 | 2 918,5 | 65,9% |
| NOR | 1 150,4 | 7 047,4 | 14,0% |
| NZL | 2 512,1 | 7 508,8 | 25,1% |
| POL | 2 170,5 | 6 434,8 | 25,2% |
| PRT | 2 855,1 | 6 146,4 | 31,7% |
| SVK | 4 614,5 | 5 214,8 | 46,9% |
| SVN | 4 866,2 | 3 331,5 | 59,4% |
| SWE | 1 233,3 | 7 221,1 | 14,6% |
| TUR | 5 138,7 | 3 209,6 | 61,6% |
| USA | 2 027,6 | 6 116,7 | 24,9% |

*Zdroj:* vlastní zpracování podle metodiky PISA 2012.

Rozptyl matematické úspěšnosti se rozkládá na rozptyl, který lze přičíst odlišnostem na úrovni žáků, a na rozptyl přičitatelný odlišnostem na úrovni vyšších celků (škol). Vnitrotřídní koeficient korelace *ICC* udává, kolik z celkového rozptylu proměnné připadá na rozdíly mezi vyššími celky (školami), a je definován ve tvaru:

$$ICC = \frac{\sigma_u^2}{\sigma_u^2 + \sigma_e^2}, \tag{1}$$

kde:

- $\sigma_u^2$ je rozptyl úspěšnosti v matematice na úrovni školy (vyvolaný odlišnostmi v rámci škol);
- $\sigma_e^2$ je rozptyl úspěšnosti v matematice na úrovni žáků (daný odlišnostmi jednotlivých žáků).

Odhady vnitrotřídních koeficientů korelace byly provedeny ve statistickém paketu *IBM SPSS*[7] pomocí speciální procedury *MIXED*[8]. Odhadnuté hodnoty vnitrotřídních koeficientů korelace pro data různých zemí jsou zaznamenány v tabulce 1. Tato tabulka obsahuje nejen odhady *ICC*, ale i odhady vnitroškolní a meziškolní složky variance úspěšnosti žáků v matematice pro vybrané země. Údaje jsou zjištěny ze statistického šetření PISA 2012.

*ICC* je zvykem udávat v procentech[9]. Pak tento ukazatel udává, jaké procento rozptylu (variability) v úspěšnosti žáků v matematice lze přičíst rozdílům mezi skupinami vyšší úrovně, tedy rozdílům mezi školami.

Z tabulky 1 vyplývá, že největší vliv na variabilitu úspěšnosti v matematice žáků ze škol v Holandsku, kde byl zjištěn koeficient *ICC* s nejvyšší hodnotou. Nejmenší odlišnosti z hlediska úspěšnosti žáků v matematice byly zaznamenány u škol ve Finsku, kde hodnota koeficientu *ICC* je nejmenší.

Pokud by byla složka rozptylu úspěšnosti v matematice na úrovni škol nulová, pak se víceúrovňová regrese matematicky rovná (jednoúrovňové) lineární regresi[10]. To znamená, že odlišnosti v matematické výkonnosti žáků na úrovni škol jsou nevýznamné a výkonnost žáků v matematice se v průměru mezi školami neliší.

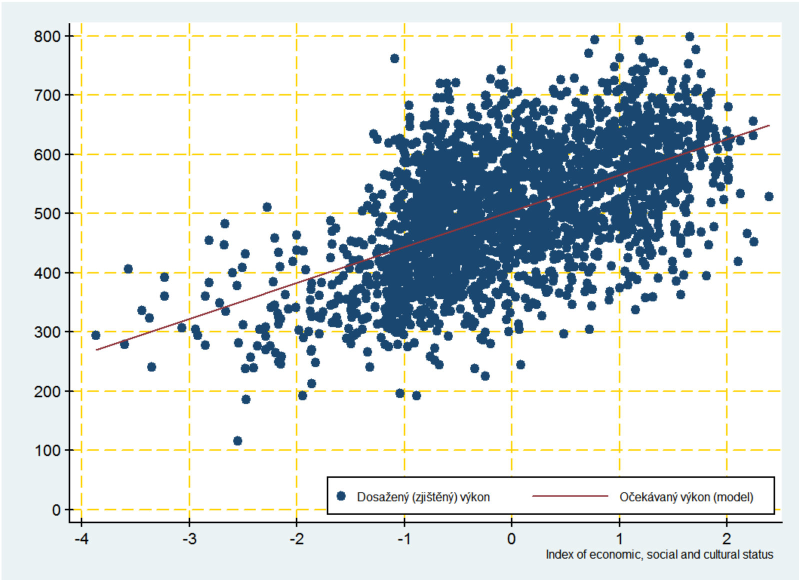
[7] SPSS je zkratkou pro označení Statistical Package for the Social Sciences (pozn. aut.)

[8] Podrobnější postup pro odhadování hodnot vnitrořídních koeficientů korelace pomocí příkazu MIXED v rámci SPSS je zaznamenán v nápovědě k SPSS.

[9] SOUKUP, P. 2006. Proč užívat hierarchické lineární modely? In: Sociologický časopis/Czech Sociological Review, 2006, Vol. 42, No. 5: 987–1012. s. 995.

[10] V tom případě je koeficient vnitrotřídní korelace ICC nulový a nemá smysl používat víceúrovňové modelování (pozn. aut.).

**Obrázek 3:** Grafické znázornění závislosti výkonu žáků v matematice bez ohledu na vliv jednotlivých škol v šetření PISA 2012




*Zdroj:* vlastní zpracování.

**Tabulka 2:** Pearsonův korelační koeficient jako míra lineární závislosti mezi výkony žáků v matematice a jejich socioekonomickým zázemím (indexem *ESCS*)

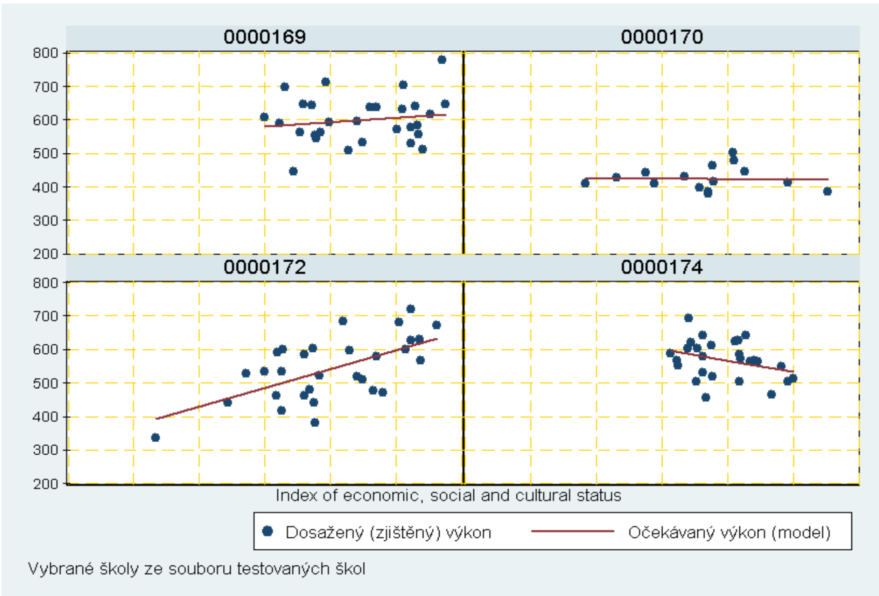
| Korelační koeficient (Pearsonův) | | | |
|---|---|---|---|
| | | Index ESCS | Výkon v matematice |
| Index ESCS | Pearson Correlation | 1,000 | 0,553** |
| | Sig. (2-tailed) | | 0,000 |
| | N | 2 283 | 2 283 |
| Výkon v matematice | Pearson Correlation | 0,553** | 1,000 |
| | Sig. (2-tailed) | 0,000 | |
| | N | 2 283 | 2 283 |
| **. Correlation is significant at the 0.01 level (2-tailed). | | | |

*Zdroj:* vlastní zpracování podle metodiky PISA 2012.

Za účelem získání základní představy o společném rozdělení výkonnosti vybraných studentů a žáků slovenských škol v matematice a jejich socioekonomickým zázemím byly údaje zjištěné měřením vyneseny do dvojrozměrného souřadnicového systému, který je znázorněn na obrázku 3. Každá dvojice hodnot výkonnosti žáka v matematice a jí odpovídající hodnota indexu *ESCS* je interpretována graficky jako bod tohoto systému. Přímka, která probíhá body znázorněnými na obrázku 3, ilustruje regresní model, který neuvažuje vlivy jednotlivých škol. Tento model vznikl pomocí jednoduché (jednoúrovňové) lineární regrese.

Z obrázku 3 je patrné, že vyššímu indexu *ESCS* odpovídá vyšší výkon žáků v matematice. Míra lineární závislosti mezi výkonem žáků v matematice a jejich socioekonomickým zázemím (indexem *ESCS*) vyjádřená korelačním koeficientem činí 0,55 (viz tabulka 2).

**Obrázek 4:** Grafické znázornění závislosti výkonu žáků v matematice na vybraných školách (s více než 9 žáky) na jejich socioekonomickém pozadí v šetření PISA 2012




*Zdroj:* vlastní zpracování.

Předpokladem k víceúrovňovému modelování vztahu mezi indexem *ESCS* a výkonem žáků v matematice je získání představy o závislosti indexu *ESCS* a výkonu žáků v matematice pro jednotlivé školy. Tímto způsobem pak je možné zkoumat vztahy sledovaných pro jednotlivé vybrané školy SR. Grafické znázornění závislosti výkonu žáků v matematice na jednotlivých školách (s více než 9 žáky) v šetření PISA 2012 na jejich socioekonomickém zázemí (indexu *ESCS*) ilustruje obrázek 4. Na vybraných (z důvodu lepší přehlednosti) základních školách (s více než 9 žáky) jsou představeny zjištěné (naměřené) a modelované (teoretické) výkonnosti žáků v matematické gramotnosti v závislosti na jejich socioekonomickém pozadí v šetření PISA 2012. Z obrázku 4 je patrné, že každá jednotlivá škola má vlastní regresní přímku (vyjadřuje regresi za jednotlivou školu) odlišnou. Současně se tyto modely pro jednotlivé školy odlišují od regresní přímky z jednoduché (jednoúrovňové) lineární regrese. Číselné kódy v grafu na obrázku 4 představují identifikátor školy v šetření OECD PISA.

Po provedené průzkumové analýze dat z pohledu možností pro víceúrovňové lineární modelování je patrné, že regresní modely pro jednotlivé školy nejsou stejné. Regresní model pro každou školu se vyznačuje rozdíly jak ve směrnici regresní přímky, tak i v jejím posunu. Z tohoto důvodu předpokládané víceúrovňové modely by měly odpovídat zjištěnému charakteru dat a respektovat výsledky jejich průzkumové analýzy. Víceúrovňové modely by se měly proto vyznačovat modelováním regresních přímek pro jednotlivé školy odlišujících se sklonem i posunem.

První model je vyjádřen systémem rovnic (2) až (4).

$$Y_{ij} = \beta_{0j} + \beta_{1j} \cdot ESCS_{ij} + \varepsilon_{ij}, \tag{2}$$

$$\beta_{0j} = \gamma_{00} + U_{0j}, \tag{3}$$

$$\beta_{1j} = \gamma_{10} + U_{1j}, \tag{4}$$

První úroveň modelu je reprezentována rovnicí (2). Na místě závisle proměnné vystupuje výkonnost žáků v matematice ($Y_{ij}$). V postavení nezávislé proměnné v rovnici na první úrovni (úroveň žáků) je socioekonomické zázemí žáků vyjádřené indexem $ESCS_{ij}$. Rozptyl, který je vyvolaný odlišnostmi na úrovni žáků, je v modelu označen $\varepsilon_{ij}$. Odhadované parametry $\beta_{0j}$ a $\beta_{1j}$ regresního modelu nejsou konstantní a mění se v důsledku působení jednotlivých škol. Odhadované parametry $\beta_{0j}$ a $\beta_{1j}$ se dají rozložit do průměrných koeficientů ($\gamma_{00}$ a $\gamma_{10}$) a do náhodných odchylek ($U_{0j}$ a $U_{1j}$). Náhodné odchylky jsou označovány jako náhodné školní efekty a jsou specifické pro každou školu. Předpokladem modelu je nezávislost rozptylu $\varepsilon_{ij}$ a náhodných efektů $U_{0j}$ a $U_{1j}$, které se vyznačují normálním rozdělením s nulovou střední hodnotou[11], tj.

$$\mathrm{var}(U_{0j}) = \tau_0^2,\ \mathrm{var}(U_{1j}) = \tau_1^2,\ \mathrm{cov}(U_{0j}, U_{1j}) = 0,\ \mathrm{var}(\varepsilon_{ij}) = \sigma^2. \tag{5}$$

Dosazením rovnic pro odhadované parametry (3) a (4) do (2) lze získat model ve tvaru

$$Y_{ij} = \gamma_{00} + \gamma_{10} \cdot ESCS_{ij} + U_{0j} + U_{1j} \cdot ESCS_{ij} + \varepsilon_{ij}. \tag{6}$$

Získaný, tzv. smíšený model (6) lze rozdělit na 2 části, kde pevnou (nenáhodnou) část modelu představuje $\gamma_{00} + \gamma_{10} \cdot ESCS_{ij}$, druhá část modelu (6),

[11] SNIJDERS, Tom A. B. – BOSKER, R. 2003. Multilevel Analysis: An Introduction to Basic and Advanced Multilevel Modeling. London: Sage publications, 2003. 272 s. ISBN 0-7619-5889-4. s. 68.

$U_{0j} + U_{1j} \cdot ESCS_{ij} + \varepsilon_{ij}$, reprezentuje náhodnou složku modelu. Člen $U_{1j} \cdot ESCS_{ij}$ je zpravidla považován za náhodnou interakci mezi nezávislou proměnnou $ESCS_{ij}$ a příslušnou školou. Skupiny jsou proto charakterizovány 2 náhodnými efekty: náhodným sklonem (směrnicí) a náhodným posunem. Obecně tyto náhodné efekty nemusejí být nezávislé a zpravidla jsou vzájemně korelované[12], tj. $\mathrm{cov}(U_{0j}, U_{1j}) = \tau_{01}$.

Druhý model, jenž bude využit pro účely modelování, je dán systémem rovnic (7) až (10).

$$Y_{ij} = \beta_{0j} + \beta_{1j} \cdot ESCS_{ij} + \beta_{2j} \cdot GENDER_{ij} + \varepsilon_{ij}, \tag{7}$$

$$\beta_{0j} = \gamma_{00} + U_{0j}, \tag{8}$$

$$\beta_{1j} = \gamma_{10} + U_{1j}, \tag{9}$$

$$\beta_{2j} = \gamma_{20} + U_{2j}, \tag{10}$$

Model podle (7) až (10) vychází z modelu předešlého. Od prvního modelu se odlišuje přidáním další vysvětlující proměnné $GENDER_{ij}$ na úrovni žáků (první úrovni).

Tato vysvětlující proměnná reprezentuje pohlaví žáků. Současně se zvýšil počet odhadovaných parametrů o parametr $\beta_{2j}$, který se opět rozloží na průměrný koeficient a náhodný efekt školy podle rovnice (10). Skupiny jsou proto charakterizovány 3 náhodnými efekty: $U_{0j}$ jako náhodným posunem a $U_{1j}$ a $U_{2j}$ jako náhodnými interakcemi školy s nezávislými proměnnými.

Rovnice (7) modeluje zejména varianci výkonů žáků v matematice v rámci jednotlivých škol pomocí socioekonomického pozadí žáků a jejich pohlaví, které v modelu vystupují jako nezávislé proměnné. Tyto faktory, které se týkají žáků, však také mohou vysvětlovat část měnlivosti mezi samotnými školami. Proto je také možné zavést nezávislé proměnné na úrovni školy, které jsou odvozeny od socioekonomického pozadí žáků a jejich pohlaví. Vliv socioekonomického pozadí pro jednotlivé školy, který je odvozen od žáků příslušné školy, je dán jako průměrný ekonomický, sociální a kulturní status žáků dané školy[13]. Matematicky lze tento socioekonomický status školy vyjádřit nezávislou proměnnou na úrovni škol, která je formálně označena jako $mu\_ESCS_j$ v rovnici (12).

[12] HOX, JOOP, J. 2010. *Multilevel Analysis: Techniques and Applications (Quantitative Methodology Series)*. Second Edition. New York (USA) and Hove (UK): Routledge, 2010, 392 s. ISBN 978–1–84872–846–2. s. 13.

[13] PISA Data Analysis Manual SPSS, Second Edition. PARIS: OECD PUBLISHING, 2009. 478 s. ISBN 978-92-64-05626-8. s. 214.

**Tabulka 3:** Odhady parametrů modelů vlivu socioekonomického pozadí na výkon studentů a žáků škol v matematice

**Odhady parametrů pro víceúrovňový model 1 (rovnice 2 až 4)**

| Fixed Parameters | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Coeficient | | Estimate | Std. Err. | Df | t | Sig | [95% Conf. Interval] | |
| $\gamma_{00}$ | *Intercept* | 485,682 | 4,323 | 188,307 | 112,351 | 0,000 | 477,154 | 494,209 |
| $\gamma_{10}$ | $ESCS_{ij}$ | 31,577 | 2,152 | 131,077 | 14,674 | 0,000 | 27,320 | 35,834 |
| **Random-effects Parameters** | | | | | | | | |
| hierarchy: škola | | level | Estimate | Std. Err. | Wald Z | Sig | [95% Conf. Interval] | |
| $var(U_{0j})$ | *Intercept* | 2 | 3129,042 | 380,700 | 8,219 | 0,000 | 2 465,179 | 3 971,679 |
| $cov(U_{0j}, U_{1j})$ | | 2 | -196,641 | 120,295 | -1,635 | 0,102 | -432,415 | 39,133 |
| $var(U_{1j})$ | $ESCS_{ij}$ | 2 | 219,166 | 85,699 | 2,557 | 0,011 | 101,843 | 471,643 |
| $var(e_{ij})$ | *Reziduální* | 1 | 4 813,560 | 140,194 | 34,335 | 0,000 | 4 546,481 | 5 096,329 |

**Odhady parametrů pro víceúrovňový model 2 (rovnice 7 až 10)**

| Fixed Parameters | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Coeficient | | Estimate | Std. Err. | Df | t | Sig | [95% Conf. Interval] | |
| $\gamma_{00}$ | *Intercept* | 495,134 | 4,916 | 197,779 | 100,718 | 0,000 | 485,439 | 504,828 |
| $\gamma_{10}$ | $ESCS_{ij}$ | 30,415 | 2,128 | 128,776 | 14,295 | 0,000 | 26,205 | 34,625 |
| $\gamma_{20}$ | $GENDER_{ij}$ | -20,090 | 3,178 | 146,116 | -6,321 | 0,000 | -26,372 | -13,809 |
| **Random-effects Parameters** | | | | | | | | |
| hierarchy: škola | | level | Estimate | Std. Err. | Wald Z | Sig | [95% Conf. Interval] | |
| $var(U_{0j})$ | *Intercept* | 2 | 3 891,043 | 481,245 | 8,085 | 0,000 | 3 053,440 | 4 958,414 |
| $cov(U_{1j}, U_{0j})$ | | 2 | -244,313 | 135,072 | -1,809 | 0,070 | -509,050 | 20,423 |
| $var(U_{1j})$ | $ESCS_{ij}$ | 2 | 224,087 | 84,453 | 2,653 | 0,008 | 107,057 | 469,046 |
| $cov(U_{2j}, U_{0j})$ | | 2 | -719,113 | 222,763 | -3,228 | 0,001 | -1 155,719 | -282,506 |
| $cov(U_{2j}, U_{1j})$ | | 2 | -37,208 | 85,412 | -0,436 | 0,663 | -204,612 | 130,195 |
| $var(U_{2j})$ | $GENDER_{ij}$ | 2 | 350,737 | 178,515 | 1,965 | 0,049 | 129,343 | 951,083 |
| $var(e_{ij})$ | *Reziduální* | 1 | 4 577,399 | 137,621 | 33,261 | 0,000 | 4 315,460 | 4 855,238 |

**Odhady parametrů pro víceúrovňový model 3 (rovnice 11 až 14)**

| Fixed Parameters | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Coeficient | | Estimate | Std. Err. | df | t | Sig | [95% Conf. Interval] | |
| $\gamma_{00}$ | *Intercept* | 514,058 | 3,784 | 202,407 | 135,851 | 0,000 | 506,597 | 521,519 |
| $\gamma_{20}$ | $GENDER_{ij}$ | 24,441 | 2,363 | 164,828 | 10,344 | 0,000 | 19,776 | 29,106 |
| $\gamma_{10}$ | $ESCS_{ij}$ | -23,195 | 3,054 | 172,451 | -7,596 | 0,000 | -29,222 | -17,168 |
| $\gamma_{01}$ | $mu\_ESCS_{j}$ | 71,805 | 5,560 | 247,203 | 12,915 | 0,000 | 60,855 | 82,756 |
| **Random-effects Parameters** | | | | | | | | |
| hierarchy: skola | | level | Estimate | Std. Err. | Wald Z | Sig | [95% Conf. Interval] | |
| $var(U_{0j})$ | *Intercept* | 2 | 1 590,613 | 227,664 | 6,987 | 0,000 | 1 201,523 | 2 105,702 |
| $var(U_{1j})$ | $ESCS_{ij}$ | 2 | 319,383 | 93,725 | 3,408 | 0,001 | 179,689 | 567,677 |
| $var(U_{2j})$ | $GENDER_{ij}$ | 2 | 201,200 | 146,011 | 1,378 | 0,168 | 48,519 | 834,342 |
| $var(e_{ij})$ | *Reziduální* | 1 | 4 579,475 | 137,225 | 33,372 | 0,000 | 4 318,264 | 4 856,487 |

**Odhady parametrů pro víceúrovňový model 4 (rovnice 15 až 18)**

| Fixed Parameters | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Coeficient | | Estimate | Std. Err. | df | t | Sig | [95% Conf. Interval] | |
| $\gamma_{00}$ | *Intercept* | 488,303 | 7,267 | 260,123 | 67,196 | 0,000 | 473,994 | 502,612 |
| $\gamma_{01}$ | $TYPE_{j}$ | 34,071 | 8,095 | 265,591 | 4,209 | 0,000 | 18,132 | 50,009 |
| $\gamma_{02}$ | $mu\_ESCS_{j}$ | 71,697 | 5,972 | 340,798 | 12,005 | 0,000 | 59,950 | 83,444 |
| $\gamma_{10}$ | $ESCS_{ij}$ | 18,464 | 5,038 | 207,325 | 3,665 | 0,000 | 8,533 | 28,396 |
| $\gamma_{11}$ | $TYPE_{j}*ESCS_{ij}$ | 7,552 | 5,512 | 195,144 | 1,370 | 0,172 | -3,319 | 18,423 |
| $\gamma_{12}$ | $mu\_ESCS_{j}*ESCS_{ij}$ | -0,012 | 3,213 | 131,240 | -0,004 | 0,997 | -6,367 | 6,343 |
| $\gamma_{20}$ | $GENDER_{ij}$ | -26,067 | 7,084 | 202,939 | -3,680 | 0,000 | -40,034 | -12,099 |
| $\gamma_{21}$ | $TYPE_{j}*GENDER_{ij}$ | 1,401 | 7,758 | 213,119 | 0,181 | 0,857 | -13,891 | 16,693 |
| $\gamma_{22}$ | $mu\_ESCS_{j}*GENDER_{ij}$ | -8,542 | 4,547 | 172,342 | -1,879 | 0,062 | -17,518 | 0,433 |
| **Random-effects Parameters** | | | | | | | | |
| hierarchy: skola | | level | Estimate | Std. Err. | Wald Z | Sig | [95% Conf. Interval] | |
| $var(U_{0j})$ | *Intercept* | 2 | 1 460,905 | 210,615 | 6,936 | 0,000 | 1 101,302 | 1 937,929 |
| $var(U_{1j})$ | $ESCS_{ij}$ | 2 | 307,842 | 91,081 | 3,380 | 0,001 | 172,378 | 549,760 |
| $var(U_{2j})$ | $GENDER_{ij}$ | 2 | 144,435 | 139,213 | 1,038 | 0,299 | 21,840 | 955,213 |
| $var(e_{ij})$ | *Reziduální* | 1 | 4 575,681 | 136,711 | 33,470 | 0,000 | 4 315,427 | 4 851,631 |

*Zdroj:* vlastní zpracování.

Model je pak dán systémem rovnic (11) až (14).

$$Y_{ij} = \beta_{0j} + \beta_{1j} \cdot ESCS_{ij} + \beta_{2j} \cdot GENDER_{ij} + \varepsilon_{ij}, \tag{11}$$

$$\beta_{0j} = \gamma_{00} + \gamma_{01} \cdot mu\_ESCS_j + U_{0j}, \tag{12}$$

$$\beta_{1j} = \gamma_{10} + U_{1j}, \tag{13}$$

$$\beta_{2j} = \gamma_{20} + U_{2j}, \tag{14}$$

Následující model lze využít pro pochopení toho, proč je vliv socioekonomického zázemí žáků méně významný (hodnota regresního koeficientu u indexu $ESCS_{ij}$ je nižší) anebo více významný (hodnota regresního koeficientu u indexu $ESCS_{ij}$ je vyšší). Do modelu je zavedena nezávislá proměnná $TYPE_j$, která charakterizuje typ jednotlivé školy. Matematicky lze statistický model vyjádřit ve tvaru:

$$Y_{ij} = \beta_{0j} + \beta_{1j} \cdot ESCS_{ij} + \beta_{2j} \cdot GENDER_{ij} + \varepsilon_{ij}, \tag{15}$$

$$\beta_{0j} = \gamma_{00} + \gamma_{01} \cdot TYPE_j + \gamma_{02} \cdot mu\_ESCS_j + U_{0j}, \tag{16}$$

$$\beta_{1j} = \gamma_{10} + \gamma_{11} \cdot TYPE_j + \gamma_{12} \cdot mu\_ESCS_j + U_{1j}, \tag{17}$$

$$\beta_{2j} = \gamma_{20} + \gamma_{21} \cdot TYPE_j + \gamma_{22} \cdot mu\_ESCS_j + U_{2j}, \tag{18}$$

Pomocí modelu (15) až (18) se sleduje působení typu školy na význam socioekonomického zázemí žáků (na odhadované regresní koeficienty mezi těmito ukazateli). Tato interakce je zpravidla nazývána tzv. křížová interakce, protože zde dochází k působení nezávisle proměnné úrovně žáků na nezávislé proměnnou z úrovně škol (na proměnnou $TYPE_j$).

Odhady regresních koeficientů byly provedeny ve statistickém paketu *IBM SPSS*[14] pomocí speciální procedury *MIXED*[15]. Odhadnuté hodnoty regresních koeficientů pro víceúrovňové modely jsou uvedeny v tabulce 3 Odhady parametrů modelů vlivu socioekonomického pozadí na výkon žáků a studentů škol. Pro všechny modely, které

[14] SPSS je zkratkou pro označení Statistical Package for the Social Sciences (pozn. aut.)

[15] Podrobnější postup pro odhadování parametrů víceúrovňových modelů pomocí příkazu MIXED v SPSS je zaznamenán v nápovědě k SPSS.

byly popsány v této kapitole, byl proveden odhad konstanty (posunu), koeficientů (směrnic) u příslušných nezávislých proměnných. Náhodné parametry pro úroveň školy byly odhadovány pomocí jejich rozptylů. V posledním víceúrovňovém modelu byly modelovány také i interakce mezi jednotlivými vybranými nezávislými proměnnými, a k nim byly odhadovány příslušné koeficienty.

Dílčí odhadované parametry se testují pomocí statistických testů: t-testu pro parametry na první úrovni a Waldova testu[16] pro parametry druhé úrovně (viz tabulka 3). Nulová hypotéza těchto testů zní: Hodnota parametrů na příslušné úrovni je v celé populaci nulová. Pokud je statistickým paketem SPSS vypočtená hladina významnosti nižší než *0,05* (v tabulce 3 je tato hladina významnosti označována jako Sig.), pak je nulová hypotéza o nulovém parametru zamítnuta na hladině významnosti nižší než *5* %.

Celkovou kvalitu odhadnutého modelu je možné porovnat pomocí tzv. informačních kritérií. Informační kritérium je souhrnný ukazatel, který je založen na hodnotě věrohodnostní funkce v bodě odhadu. U informačních kritérií platí[17], že čím je jejich hodnota nižší, tím je model lepší, tedy tím lépe model vystihuje modelované vztahy. Nejpoužívanějšími a nejznámějšími informačními kritérii jsou Akaikeho a Schwartzovo Bayesovské informační kritérium. Hodnoty informačních kritérií pro odhadované modely jsou uvedeny v tabulce 4.

**Tabulka 4:** Srovnání odhadovaných modelů vlivu socioekonomického pozadí na výkon studentů a žáků škol v matematice z hlediska informačních kritérií

| **Information Criteria[a,b]** | **Model 1** | **Model 2** | **Model 3** | **Model 4** |
|---|---|---|---|---|
| -2 Log Likelihood | 31 731 | 31 372 | 31 269 | 31 245 |
| Akaike's Information Criterion (AIC) | 31 737 | 31 392 | 31 285 | 31 271 |
| Hurvich and Tsai's Criterion (AICC) | 31 737 | 31 392 | 31 285 | 31 271 |
| Bozdogan's Criterion (CAIC) | 31 758 | 31 461 | 31 340 | 31 361 |
| Schwarz's Bayesian Criterion (BIC) | 31 755 | 31 451 | 31 332 | 31 348 |

The information criteria are displayed in smaller-is-better form.
a. Dependent Variable: Plausible value 1 in mathematics.
b. Residual is weighted by FINAL STUDENT WEIGHT.

*Zdroj:* vlastní zpracování.

## 4 ZHODNOCENÍ ODHADNUTÝCH MODELŮ

Odhady parametrů modelu 1 jsou zaznamenány ve vrchní části tabulky 1. Závěry, které z odhadnutých hodnot parametrů modelu 1, jsou následující:

Odhady hodnot fixních parametrů ($\gamma_{00}$ jako průměrné úrovně konstanty a $\gamma_{10}$ jako průměrné směrnice v základním souboru) jsou statisticky významně odlišné od nuly (toto potvrzuje hodnota statistické významnosti *Sig.* < *0,05*). Průměrná úroveň matematických

[16] Waldův test je založen na podílu (s asymptoticky normovaným normálním rozdělením) odhadu parametru a jeho směrodatné chyby.
[17] SOUKUP, P. 2006. Proč užívat hierarchické lineární modely? In: Sociologický časopis/Czech Sociological Review, 2006, Vol. 42, No. 5: 987–1012. s. 1007.

dovedností žáka s průměrným indexem *ESCS* je *485,682*. Vzroste-li index *ESCS* o jednotku, pak vzroste úroveň matematických dovedností v průměru o *31,577* procentního bodu. Odhady hodnot náhodných parametrů (rozptylu náhodné složky směrnic a rozptylu náhodných konstant v následující části Tabulky 3 pro model 1 jsou statisticky významně odlišné od nuly (protože, platí *Sig. < 0,05*). Z tohoto faktu lze usoudit, že směrnice jednotlivých regresních přímek i jejich konstanty jsou pro jednotlivé školy odlišné. Odhadnutá hodnota kovariance náhodných složek (náhodných směrnic i náhodných konstant) se statisticky významně neliší od nuly, z čehož vyplývá z toho, že vztah mezi oběma náhodnými složkami nebyl zaznamenán.

Následující část tabulky 3 zaujímají odhady hodnot fixních a náhodných parametrů modelu 2. Na základě uvedených odhadnutých hodnot lze vyvodit následující závěry:

Oproti předešlému modelu byl použit vyšší počet nezávislých proměnných na první úrovni (úroveň žáků). Tím došlo ke změně odhadovaných hodnot fixních parametrů, které jsou ale všechny významně odlišné od nuly (Sig. < *0,05*). Do modelu byla ve srovnání s modelem 1 zahrnuta nezávislá dichotomická proměnná *GENDER*, kde bylo zakódováno pohlaví studentů (1 dívky, 0 chlapci). Průměrná úspěšnost v matematice pro chlapce (*GENDER = 0*) byla odhadnuta ve výši *495,134*, průměrná úspěšnost v matematice pro děvčata (*GENDER = 1*) byla odhadnuta ve výši o *20,090* procentního bodu nižší. Hodnota odhadu průměrné směrnice v základním souboru $\gamma_{10}$ byla zaznamenána ve výši *30,145*. O tuto hodnotu naroste úroveň matematických dovedností v průměru, naroste-li index *ESCS* o jednotku. Model 2 se vyznačuje také odlišnou kovarianční strukturou. Z odhadnutých náhodných parametrů modelu 2 nejsou souvislosti (kovariance) mezi náhodnými složkami $U_{1j}$ a $U_{0j}$ (náhodné konstanty a náhodné směrnice u proměnné *ESCS*) a složkami $U_{2j}$ a $U_{1j}$ (náhodných směrnic u proměnných *ESCS* a *GENDER*) statisticky významně odlišné od nuly. Ostatní náhodné parametry tohoto modelu byly odhadnuty jako statisticky významně odlišné od nuly (Sig. < *0,05*). Oproti modelu 1 se odhadovaná hodnota reziduálního rozptylu na úrovni žáků snížila.

Následujícím modelem, jehož odhadnuté parametry jsou zaznamenány v tabulce 3, je model 3. Na základě provedeného odhadu modelu 3 lze vyvodit následující skutečnosti:

Model 3 se vyznačuje zavedením proměnné *mu_ESCS*, která vystupuje modelu na úrovni škol. Průměrná úroveň matematických dovedností v modelu je *514,058*. Průměrná výkonnost žáků v matematice závisí také na indexu *ESCS* v průměru za celou školu (proměnná *mu_ESCS*). Průměrná úspěšnost v matematice pro děvčata (*GENDER = 1*) byla odhadnuta ve výši o *24,441* procentního bodu vyšší ve srovnání s úrovní chlapců *(GENDER = 0)*. Při zvýšení indexu o jednotku dojde k poklesu průměrného výkonu žáků v matematice o *23,195*. Všechny odhadnuté hodnoty pevných parametrů jsou z pohledu statistické významnosti odlišné od nuly (Sig. < *0,05*). Z odhadnutých náhodných parametrů nejspíše nejsou pro jednotlivé školy odlišné směrnice u nezávisle proměnné *GENDER*, protože hodnota statistické signifikance rozptylu náhodných směrnic $U_{2j}$ je vyšší než *0,05*. Náhodné konstanty $U_{0j}$ a náhodné směrnice $U_{1j}$ jsou pro různé školy různé, protože odhadnutá hodnota jejich rozptylu je statisticky odlišná od nuly (Sig. < *0,05*). Oproti modelu 2 se nepatrně zvýšila odhadovaná hodnota reziduálního rozptylu na úrovni žáků.

V poslední části tabulky 3 jsou představeny odhadované hodnoty parametrů modelu 4. Model 4 se oproti předešlým modelům vyznačuje tzv. interakcemi, tedy vzájemným působením jednotlivých proměnných. Vzájemné působení proměnných různé úrovně se nazývá tzv. křížová interakce. Závěry, které je možné odvodit z hodnot odhadnutých parametrů modelu 4, jsou následující:

Všechny odhadované hodnoty fixních faktorů, které se týkají parametrů interakcí, se statisticky významně neodlišují od nuly. Z tohoto důvodu je možné interakce mezi vybranými proměnnými považovat jako nevýznamné. Průměrná úrovně konstanty $\gamma_{00}$ byla odhadnuta ve výši *489,303*, což ve srovnání s modelem 3 představuje pokles. Průměrný sklon regresní přímky $\gamma_{10}$ byl zjištěn ve výši *18,464*. Průměrná výkonnost v matematice pro děvčata (*GENDER = 1*) byla odhadnuta ve výši o *26,067* procentního bodu nižší ve srovnání s úrovní chlapců (*GENDER = 0*). Na úrovni škol způsobí růst průměrného indexu o jednotku zvýšení výkonnosti žáků této školy o *71,697* bodu. Statisticky významně odlišné od nuly jsou hodnoty rozptylů náhodných efektů $U_{0j}$ a $U_{1j}$ (Sig. < *0,05*). Náhodné konstanty $U_{0j}$ a náhodné směrnice $U_{1j}$ pro faktor *ESCS* jsou pro různé školy různé. Hodnota odhadovaná pro rozptyl náhodné složky $U_{1j}$ neodlišuje statisticky významně od nuly, proto lze usoudit, že náhodné směrnice $U_{2j}$ pro faktor *GENDER* nejsou pro různé školy odlišné.

Celkové posouzení kvality modelu socioekonomického pozadí žáků ZŠ je možné vyčíst z tabulky 4 s využitím tzv. informačních kritérií. Obecně platí, že čím je hodnota příslušného kritéria nižší, tím je odhadnutý model z hlediska vystižení modelované závislosti lepší. Toto posuzování hodnot informačních kritérií se provádí především na základě Akaikeho a Schwartzova Bayesovského informačního kritéria. Také se posuzuje velikost reziduálního rozptylu v odhadnutém modelu. Na základě hodnoty uvedených informačních kritérií (zejména nejpřísnějšího Schwartzova Bayesovského informačního kritéria) a velikosti odhadnutého reziduálního rozptylu je socioekonomické pozadí žáků na jejich výkonnost v matematice nejlépe modelováno pomocí modelu 3.

## Závěr

Tím, že jednoduché lineární regresní modely nerozlišují mezi jednotlivými úrovněmi v systému vzdělávání – mezi úrovní žáků a studentů a úrovní vyšších celků – tříd a škol, které jsou těmito studenty či žáky navštěvovány, nemusí jednoduché lineární regresní modely poskytovat relevantní informace o sledovaném vzdělávacím systému a jeho součástech. Široké spektrum socioekonomického zázemí žáků či studentů, které mnohdy souvisí i s navštěvovanou vzdělávací institucí (školou), se potom odráží ve vysoké variabilitě sledovaných hodnot a snižuje adekvátnost uplatňovaných modelů. Jedním z možných řešení pro zkvalitnění modelového přístupu v oblasti vzdělávání je modelování pomocí víceúrovňových (hierarchických) lineárních regresních modelů.

Příspěvek představil jeden z možných přístupů modelování vzdělávacího systému pomocí lineárních hierarchických modelů. Výsledky mezinárodního šetření OECD PISA 2012 žáků slovenských škol v matematice byly modelovány pomocí vybraných lineárních hierarchických modelů. Jako nejadekvátnější model závislosti výsledků matematiky žáků na jejich socioekonomickém pozadí byl zjištěn model, ve kterém se rozlišuje socioekonomický status školy. Model tak dokumentuje, že socioekonomické pozadí jednotlivé školy, které je odvozeno od žáků příslušné školy, má vliv na výsledky žáků a studentů škol na výsledky v matematické gramotnosti.

**Klíčová slova**

víceúrovňová analýza, hierarchické modelování, index ESCS, hierarchické datové struktury, PISA

**Klasifikace JEL**

C13, C18

## LITERATURA

[1] *PISA Data Analysis Manual SPSS, Second Edition*. 2009. PARIS: OECD PUBLISHING, 2009. 478 s. ISBN 978-92-64-05626-8.

[2] HOX, JOOP, J. 2010. *Multilevel Analysis: Techniques and Applications (Quantitative Methodology Series). Second Edition*. 2010. New York (USA) and Hove (UK): Routledge, 2010, 392 s. ISBN 978–1–84872–846–2.

[3] SNIJDERS, Tom A. B., BOSKER, Roel: *Multilevel Analysis: An Introduction to Basic and Advanced Multilevel Modelling*. 2003. London: Sage publications, 2003. 272 s. ISBN 0-7619-5889-4.

[4] SOUKUP, P. 2006. Proč užívat hierarchické lineární modely? 2006. In: *Sociologický časopis/Czech Sociological Review*, 2006, Vol. 42, No. 5: s. 987–1012.

## RESUMÉ

V průběhu posledních 20 let byla data z výběrových šetření o vzdělání stále více analyzována pomocí víceúrovňových modelů. Jednoduché lineární regresní modely (bez uvažování konceptu hierarchického modelování) nezohledňovaly při modelování závislostí případné efekty odvislé od způsobu, jakým jsou studenti či žáci zařazeni do škol či tříd. Proto jednoduché lineární regresní modely nemusí adekvátně reprezentovat informace o sledovaných vzdělávacích systémech, školách, studentech či žácích. Jednoduché lineární regresní modely proto nerozlišují mezi jednotlivými úrovněmi – mezi úrovní žáků a studentů a úrovní vyšších celků – tříd a škol, které tito studenti či žáci navštěvují. Například v některých vzdělávacích systémech si školy mohou vybírat studenty či žáky se širokým spektrem socioekonomického zázemí, což se odrazí ve vysoké variabilitě socioekonomického zázemí žáků. Proto je nutné pro kvalitní analýzu hierarchických dat využít víceúrovňových (hierarchických) lineárních regresních modelů. Příspěvek ukazuje příklad použití několika typů víceúrovňových lineárních regresních modelů, s jejichž pomocí je modelováno působení socioekonomického pozadí žáků a

studentů na jejich výkonnost v matematice. Kvalita odhadnutých modelů (jak modely vystihují realitu) byla posuzována podle informačních kritérií a velikosti reziduálního rozptylu.

## SUMMARY

Over the past 20 years data from surveys of education is increasingly analysed using multilevel models. Simple linear regression models (without considering the concept of hierarchical modelling) did not take account the way the students or students enrolled in schools or classes when modelling the possible effects of addiction. Therefore simple linear regression models may not adequately represent the monitoring information on education systems, schools, students or pupils. Then simple linear regression models do not distinguish between different levels - between the level of students and the level of higher units - classes and schools that these students or students attending. In some educational systems, for example, schools can select students or pupils with a broad spectrum of socio-economic background, which is mirrored in the high variability of socio-economic background of pupils. Therefore it is necessary for quality analysis of hierarchical data use multilevel (hierarchical) linear regression models. This paper shows an example of using several types of multilevel linear regression models, which were modelled effects of socio-economic background of students on their performance in mathematics. The quality of the estimated models (how models match reality) was assessed according to the information criteria and the size of the residual variance.

## Kontakt

Ing. Roman Pavelka, PhD., Oddelenie realizácie a analýz meraní, Skupina pre výskum a prepojenie nonkognitívnych a kognitívnych meraní, Národný ústav certifikovaných meraní vzdelávania, Žehrianska 9, 851 07 Bratislava, pracovisko Röntgenova 28, 851 01 Bratislava, tel.: +421 2/32 782 624, e-mail: Roman.Pavelka@nucem.sk, URL: www.nucem.sk