Ľubomír Turňa

MOŽNOSTI VZNIKU VLNOVEJ ODOZVY SOCIÁLNO-EKONOMICKÉHO PROSTREDIA AKO DÔSLEDOK PODNETU V NELINEÁRNOM MODELI KONTINUA

Úvod

Vznik a nástup procesov v sociálno-ekonomickom prostredí je veľakrát spôsobený podnetmi, ktoré často vznikajú ako dôsledok hromadiacich sa problémov, následne vytvárajúcich spoločenské napätie a spoločenský tlak. Postihnutie tohto stavu a snaha o jeho riešenie samotným prostredím tak potom znova tvorí podnet, ktorý vedie k zmene stavu prostredia a táto zmena prostredia zasa môže iným spôsobom akceptovať ďalší vývojový stupeň podnetu. Vzniká tak stupňujúci sa cyklický proces, nastupuje spätná spojitosť, často vedúca k vytvoreniu nelineárnych väzieb.

Sociálno-ekonomické systémy sú teda vo všeobecnosti nelineárne, preto za predpokladu riešenia takýchto úloh v modeli kontinua, pomocou vzťahov, terminológie a charakteristík kontinuálneho prostredia, príslušné vývojové rovnice nebudú popisovať správanie sa sociálno-ekonomických systémov vzťahmi, platnými pre elastické prostredie, pre ktoré by mali platiť lineárne väzby, ale tieto úlohy budú popisované sústavou nelineárnych diferenciálnych rovníc. Riešenie takýchto dynamických systémov sa vo všeobecnosti považuje za náročný problém, lebo často vedie k analýze a riešeniu nelineárnych nestacionárnych procesov a v experimentálnom prejave k nestacionárnym nelineárnym časovým radom bez možností ich sledovania iba obvyklými ordinárnymi metódami vyhľadávania rôznych tendencií v ich prejave, akými sú monotónnosť, cykličnosť a pod. V tomto prípade na sledovanie časových radov je namieste použiť fraktálovú analýzu, spojenú aj s cieľom vyhľadávania prítomnosti atraktorov.

Eulerov prístup ku kontinuálnemu prostrediu je vo svojej podstate nelineárny, možno ho použiť v modelovej situácii na zistenie prejavu prostredia na vplyv podnetu v zjednodušujúcom prípade opomenutia postupných strát v prejave podnetu a zároveň aj neakceptovania disipatívnych procesov, vedúcich k neustále slabnúcim prejavom odozvy. Každý model má mieru priblíženia sa reálnej situácii, platí to aj pre výpovednú hodnotu predkladaného modelu odozvy sociálno-ekonomického prostredia v Eulerovom priblížení. Explikatívne podanie postupu pri odvodzovaní vzťahov a tým aj priebežne dosahovaných výsledkov iste umožní postihnúť mieru ich aplikačnej hodnoty a tiež aj celého modelu. Bez ohľadu na ohodnotenie akéhokoľvek modelu z pohľadu stupňa jeho priblíženia sa realite, vždy mu zostáva právo na priznanie prínosu v pochopení sledovaných procesov, vlastností a súvislostí medzi nimi, v rozsahu úmernom náročnosti a zložitosti daného modelu, v rozsahu a zložitosti postihnutých väzieb.

Často aj v nelineárnom prípade možno mnohé vzťahy linearizovať a získať dostatočne dobrý popis reálnych procesov. Toto môže byť dosiahnuté pre získanie odozvy na malé podnety, kedy možno považovať všetky nelineárne členy v získaných vzťahoch za zanedbateľné voči ich lineárnym analógom. Predkladaný príspevok si však kladie za cieľ zohľadniť úplný prejav všetkých nelinearít, vystupujúcich v predkladanom modeli. Umožňuje to preto, ale hlavne vyžaduje, neohraničovať sa iba malými podnetmi nízkej úrovne, ale sledovať v podstate podnety ľubovoľnej konečnej veľkosti. Vyžaduje to tiež sledovať dôsledok a vplyv týchto podnetov na vznik odozvy a jej následný vývoj bez ohľadu na jej veľkosť, spôsob vzniku a charakter a mieru jej rozvitia.

Vo všeobecnosti treba rozlišovať prejav a následný vplyv síl, vznikajúcich vo vnútri sociálno-ekonomického prostredia, na rozdiel od síl, pôsobiacich na toto prostredie zvonku a nemajúcich pôvod v jeho vnútorných väzbách a stavoch, ale sú vlastnosťami prostredia iba akceptované a modifikované. Tento príspevok si kladie za skromný cieľ, s využitím matematických metód ([1] až [7]), sledovať prejav práve takýchto vonkajších podnetov a následnú reakciu prostredia na tieto podnety.

1 FORMULÁCIA PROBLÉMU

Nech v čase $t<t_0$, t.j. pred pôsobením podnetu a následným vznikom odozvy v čase $t=t_0$, teda aj vznikom rozruchu a zmien v sociálno-ekonomickom prostredí, nevplývali a neboli na toto prostredie nanútené a orientované žiadne časové zmeny spoločenských podnetov, ani zmeny vedúce k takýmto spoločenským podnetom, ktoré by viedli k zmenám spoločenského napätia, resp. spoločenského tlaku $p(\vec{r},t)$, vplývajúceho a pôsobiaceho na dané prostredie, resp. žiadne jeho zmeny v čase

$$p(\vec{r},t<t_0)=p_0(\vec{r}) \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\partial p_0}{\partial t}=0\,,\ \ t<t_0 \tag{1}$$

a žiadne zmeny tohto vplyvu na prostredie; tu a ďalej vždy $x_1 = x,\ x_2 = y,\ x_3 = z$, resp. indexy i vo výrazoch typu $x_i,\ i=1,2,3$ postupne vždy zodpovedajú $1 \to x,\ 2 \to y,\ 3 \to z$; označenia však budú podľa potreby používané súbežne.

Akceptáciou a dôsledkom podnetu, reprezentovaného sociálno-ekonomickým vplyvom, tlakom $p(\vec{r},t)$ na prostredie, je odozva tohto sociálno-ekonomického prostredia, prejavujúca sa zmenou jeho charakteristík. V konečnom dôsledku a vo svojej podstate sú preto tieto zmeny odozvou, ktorú možno vyjadriť aj zmenou hustoty $\rho(\vec{r},t)$ výskytu nejakej vybranej charakteristiky prostredia ako jeho responzie na podnet.

Preto možno predpokladať, že v čase $t<t_0$ pred pôsobením zmien vonkajšieho podnetu $p(\vec{r},t)$, teda aj zatiaľ neexistujúcim vznikom odozvy v prejave zmien

charakteristiky prostredia $\rho(\vec{r},t)$, zostáva táto v čase nemenná, táto skutočnosť zabezpečuje jej časovú stálosť

$$\rho(\vec{r},t<t_0)=\rho_0(\vec{r}) \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\partial \rho_0}{\partial t}=0, \qquad t<t_0 \ . \tag{2}$$

Preto v čase $t<t_0$ tiež neexistuje žiadna rýchlosť $\vec{v}(\vec{r},t)$ šírenia sa podnetov a následne aj akýchkoľvek zmien lokalizácie odozvy a tiež šírenia sa zmien charakteristík daného prostredia

$$\vec{v}(\vec{r},\, t<t_0) = \vec{v}_0\big(v_{x0}(.), v_{y0},(.)\, v_{z0}(.)\big)=\vec{0} \Rightarrow v_{x0}(.)=0,\ v_{y0}(.)=0\ v_{z0}(.)=0\,. \tag{3}$$

Vzťahy (1) a (2) tak popisujú východiskový stav prostredia s jeho zatiaľ stálymi a v čase nemennými hodnotami a v dôsledku vzťahu (3) aj bez akejkoľvek výmennej interaktivity a šírenia sa zmien v tomto prostredí.

V dôsledku vzťahu (3) a tiež vzťahov (1), (2) sa rovnajú 0 (nula) aj totálne derivácie premenných $p(\vec{r},t)$ a $\rho(\vec{r},t)$, lebo $\frac{dp}{dt}=\vec{v}_0.\vec{\nabla}p+\frac{\partial p}{\partial t}=0$, $\frac{d\rho}{dt}=\vec{v}_0.\vec{\nabla}\rho+\frac{\partial \rho}{\partial t}=0$.

Nech v nejakom okamihu $t=t_0$, v dovtedy pokojnom sociálno-ekonomickom prostredí s doteraz konštantnými vlastnosťami, vznikne odozva, či rozruch, odrážajúci sa následne na zmenách charakteristík prostredia, ktoré majú možnosť šíriť sa nenulovou rýchlosťou týmto prostredím, a nech tento rozruch je dôsledkom, akceptáciou zmien vonkajších podnetov, prejavujúcich sa zmenou spoločenského tlaku. Potom, vzhľadom na predchádzajúce, tieto zmeny možno pre čas $t\geq t_0$ zapísať v tvare sústav diferenciálnych rovníc, postihujúcich vzájomnú súvislosť medzi podnetom $p(\vec{r},t)$ a stavom prostredia $\rho(\vec{r},t)$, vrátane vzájomnej spätnej väzby medzi nimi.

Pri popise správania sa zmien charakteristík sociálneho kontinua, vrátane zmien lokalizácie miesta ich pôsobenia v sociálnom prostredí, je v Eulerovom priblížení k dispozícií Eulerova pohybová rovnica

$$\frac{\partial \vec{v}(\vec{r},t)}{\partial t}+\big(\vec{v}(\vec{r},t)\vec{\nabla}\big)\vec{v}(\vec{r},t)=\frac{1}{\rho(\vec{r},t)}\big(\vec{F}(\vec{r},t)-\vec{\nabla}p(\vec{r},t)\big), \qquad \vec{F}(\vec{r},\,t)\equiv 0\ , \tag{4a}$$

ktorá vo svojej úplnosti pôvodne zohľadňuje aj hustotu vo všeobecnosti neizotropných a nehomogénnych vnútorných spoločenských síl $\vec{F}(F_x,F_y,F_z)$. Vzhľadom na snahu prednostne zistiť odozvu na vonkajší nanútený podnet, tieto nebudú považované svojím prejavom za významné, preto, alebo v dôsledku izotropie a homogenity, $\vec{F}(F_x, F_y, F_z) \equiv \vec{F}(0,0,0) = \vec{0} \quad (\overrightarrow{nula})$. (Nasledujúce označenie znaku vektora nad nulou a nad konštantou bude vynechávané: $\vec{0} \to 0$, $\overrightarrow{const} \to const$).

V tejto rovnici prítomnosť charakteristiky zmien prostredia $\rho(\vec{r},t)$ v menovateli na pravej strane v podstate vyjadruje skutočnosť, že zmena rýchlosti $\vec{v}(\vec{r},t)$ v dôsledku podnetu $p(\vec{r},\, t)$ bude v prípade väčších zmien prostredia $\rho(\vec{r},t)$ ťažšie realizovateľná.

Ďalšou, nutne zohľadnenou rovnicou, je rovnica kontinuity

$$\frac{\partial \rho(\vec{r},t)}{\partial t} + \vec{\nabla}\big(\rho(\vec{r},t).\vec{v}(\vec{r},t)\big) = 0\,, \tag{4b}$$

vyjadrujúca zákon zachovania v šírení sa odozvy, prúdu (toku) zmien charakteristík $\rho(\vec{r},t)$, počas ich prenosu a ich šírenia sa ako zmien v sociálnom prostredí. Táto rovnica zároveň vyjadruje zmenu príslušnej charakteristiky $\rho(\vec{r},t)$ v závislosti od rýchlosti $\vec{v}(\vec{r},t)$ týchto zmien.

Prepis posledných dvoch rovníc do zložiek je po zohľadnení $F_i = 0$ nasledovný:

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i} \quad \wedge \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}\big(\rho.v_i\big) = 0\,, \quad \forall i = 1, 2, 3\,. \tag{4c}$$

Rovnice (4a), (4b) alebo (4c) tak tvoria systém diferenciálnych rovníc pre popis správania sa rozruchu, zmien charakteristík $\rho(\vec{r},t)$, v sociálno-ekonomickom prostredí s rýchlosťou zmien $\vec{v}(\vec{r},t)$ v dôsledku nejakého nanúteného spoločenského podnetu $p(\vec{r},t)$ a sú východiskovými vzťahmi pre riešenie analyzovaného problému. Vzhľadom na prítomné nelineárne členy - multiplikatívny charakter výskytu premennej $(\vec{v}(\vec{r},t).\vec{\nabla}).\vec{v}(\vec{r},t)$ v druhom člene ľavej strany vzťahu (4a), (4c) a na jeho pravej strane vo forme súčinu $\big(1/\rho(\vec{r},t)\big).\vec{\nabla}p(\vec{r},t)$, a tiež aj $\rho(\vec{r},t).\vec{v}(\vec{r},t)$ na ľavej strane vo vzťahu (4b) a (4d) - vykazuje táto sústava rovníc vysokú mieru nelinearity. V rovniciach (4a), (4c) sú navyše prítomné súčiny rôznych zložiek v_i, v_j a ich derivácií.

2 RIEŠENIE ZÍSKANÝCH VZŤAHOV A PRIEBEŽNÁ ANALÝZA DOSIAHNUTÝCH VÝSLEDKOV

Riešiť sústavu nelineárnych parciálnych diferenciálnych rovníc v analytickom tvare je obvykle náročné, prevažne je riešenie možné iba v numerickom tvare. Napriek všetkým súčasným možnostiam výpočtovej techniky a existujúcemu SW rozpracovaných matematických numerických metód a ich stabilných postupov, vrátane preformulovania úlohy do bezrozmerných veličín pri zohľadnení princípov dimenzionálnej analýzy a teórie podobnosti, akosi uniká transparentnosť výsledkov, v porovnaní s výsledkami, dosiahnutými pomocou analytického riešenia. Možno aj preto, ale aj pre prijatý názor o elegancii analytických výrazov, prevláda snaha o získanie výsledku v analytickom tvare, ktorý kompaktným a prehľadným spôsobom podáva informáciu o vzájomnej väzbe všetkých zúčastnených premenných a parametroch systému, predstaveného v modeli diferenciálnych rovníc.

2.1 Nájdenie vlnového riešenia v jednorozmernom prípade

Riešenie mnohých úloh pre jednorozmerný prípad (na priamke) sa od riešenia ich prepisu do dvojrozmerného prípadu (na ploche) veľmi líši - hlavne vtedy, ak sa ďalšia dimenzia aktívne podieľa na modifikovaní podmienok úlohy, tzn. keď nie je jej prítomnosť iba v pasívnom, „konzumnom“ a „observačnom“ vyjadrení, ale prináša úlohe novú kvalitu, avšak predikatívne rozlíšenie tejto skutočnosti sa nemusí vždy správne podariť, často je to umožnené až prístupom „in situ“. Naproti tomu, napr. logistické problémy zásobovania v 1D a 2D prípadoch sa dajú rozlíšiť už „takmer skôr, ako na prvý pohľad“ – veď iba stačí uvedomiť si prejav a dôsledok obyčajnej nespojitosti dopravnej línie - v jednorozmernom prípade nastáva jednoznačný kolaps, dvojrozmerné úlohy vedú k alternatívnym riešeniam. Ďalšou ilustráciou by mohla byť sústava, ktorej vzťahy by mohli viesť k cyklickým, alebo víchrovým procesom a javom. V prípade riešenia týchto vzťahov v 1D prípade alebo k procesom zvíchrenia vôbec nemôže dôjsť, alebo príslušné vzťahy strácajú akúkoľvek platnosť. Preto pre existenciu cyklických alebo víchrových procesov je nutná prítomnosť aspoň 2D priestoru. Preto výsledok snahy o priblíženie sa k ľahšiemu pochopeniu úlohy cez zníženie dimenzie môže byť veľmi zavádzajúci, niekedy sa to však pri dodržaní opatrnosti oplatí. Často to vedie k rozpracovaniu riešenia akousi metódou postupných priblížení, navyše postrehnutie rozdielov pri 1D a 2D môže viesť k lepšiemu pochopeniu podstaty úlohy, aj k dovtedy neočakávaným záverom, s ňou súvisiacich.

Prepis vzťahov (4a), (4b), resp. vzťahov (4c), (4d) v 1D prípade po zohľadnení vlastností operácií

$$(\vec{v}\vec{\nabla})\vec{v} \Rightarrow (v_j\nabla_j)v_i \rightarrow v_x\frac{\partial v_x}{\partial x},$$

$$\vec{\nabla}(\rho.\vec{v})=(\vec{v}\vec{\nabla})\rho+\rho(\vec{\nabla}\vec{v}) \Rightarrow (v_j\nabla_j)\rho+\rho(\nabla_j v_j) \rightarrow v_x\frac{\partial\rho}{\partial x}+\rho\frac{\partial v_x}{\partial x} \tag{5}$$

bude možno prepísať pre jednorozmerný prípad osi Ox do tvaru

$$\frac{\partial v_x}{\partial t}+v_x\frac{\partial v_x}{\partial x}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} \quad \wedge \quad \frac{\partial\rho}{\partial t}+v_x\frac{\partial\rho}{\partial x}+\rho\frac{\partial v_x}{\partial x}=0, \tag{6}$$

resp. do tvaru

$$\rho.\frac{\partial v_x}{\partial t}+\rho.v_x\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial p}{\partial x}=0 \quad \wedge \quad \frac{\partial \rho}{\partial t}+v_x\frac{\partial \rho}{\partial x}+\rho\frac{\partial v_x}{\partial x}=0\,. \tag{7}$$

Pre numerické riešenie formálne vyhovuje aj pôvodný zápis sústavy v tvare (7), príp. ďalšia/iná modifikácia jej úpravy. Nie každá úprava je však vhodná aj s ohľadom na stabilitu numerického výpočtu. Zápis sústavy (7) však ponúka riešenie viacerými postupmi aj pre riešenie v analytickom tvare.

Napriek zdanlivej jednoduchosti sústavy (7) znížením dimenzie sústavy (4a,b), resp. (4c,d) z rozmeru 3D/2D→1D je sústava stále „silne nelineárna“ a nepríjemná pre analytické riešenie. V podstate takéto zníženie dimenzie by vôbec neznížilo akýsi stupeň nelinearity pôvodnej sústavy, maximálne iba počet rovníc, pričom by sa stále jednalo o rovnice pre jednotlivé zložky vektora $\vec{v}(...)$, každá s rovnakým prejavom a stupňom nelineárnych vlastností.

Každá diferenciálna sústava, aj sústava (7), môže mať vo všeobecnosti viacero partikulárnych riešení s tým, že celkové výsledné riešenie sústavy (7) je potom ich lineárnou kombináciou. Hľadanie riešenia sústavy (7) v numerickom tvare v podstate umožní nájsť toto celkové riešenie sústavy (malo by). Nájsť však v ňom, v prípade záujmu a v prípade nutnosti, jednotlivé partikulárne riešenia môže byť veľký, až neriešiteľný problém. Okrem zastúpenia veľkosti, a teda aj rozlíšiteľnosti hodnôt jednotlivých zložiek partikulárnych riešení, úspech závisí aj od jemnosti kroku numerického postupu, od konkrétnej numerickej metódy, od zobrazenia presnosti hodnoty na konkrétnom výpočtovom zariadení, ... no a tiež od ďalšieho postupu spracovania tohto a takto už získaného numerického výsledku, s cieľom nájdenia (v ňom) príslušných jednotlivých zložiek – čo je znova použitie rôznych numerických metód so snahou vyhľadávania niečoho, o čom sa ani nevie, ako to má vyzerať a aké to má mať vlastnosti, teda – nevie sa, čo vlastne hľadať. Možno predpokladať, že predstavy o vlastnostiach riešenej úlohy a z toho vyplývajúcom charaktere očakávaných výsledkoch, môžu nejakým spôsobom pomôcť, ale to je pomerne málo.[1]

Preto nájdenie výsledku v analytickom tvare je nielen vec prestíže, ale aj vec precíznosti, jednoznačnosti a úplnosti dosiahnutej informácie. Takže, nájdenie hoci len jedného partikulárneho riešenia v analytickom tvare možno považovať za úspech – navyše aj preto, že existujú teorémy a analytické metódy, umožňujúce pomocou tohto partikulárneho riešenia nájsť pri určitých predpokladoch ďalšie partikulárne riešenia, príp. všetky riešenia a tým aj celkové riešenie.

Kontinuálne prostredie je známe aj tým, že sa v ňom dokážu rozvinúť prenosové a výmenné procesy, či už súvisiace s prenosom a výmenou substancie samotného

[1] Nemalým problémom v prípade existencie viacerých čiastkových riešení sústavy, alebo bifurkačných stavov, vyplývajúcich z riešení dynamických nelineárnych sústav, je dať odpoveď na otázku, s akým váhovým podielom je konkrétne čiastkové riešenie alebo daný stav zastúpený v celkovom riešení úlohy. Súvisí to s prerozdelením medzi jednotlivými stavmi: energia (fyzika), entropia (fyzika, informatika), financie (ekonomika), ...

prostredia, alebo iba s prenosom jeho ďalších atribútov, teda prenosom zmien iba jeho vlastností alebo charakteristík. Jeden z procesov prenosu je aj vlnový proces, šírenie sa vlny. Preto nech platí predpoklad, že sústava (7) umožňuje v danom sociálno-ekonomickom prostredí vznik a následnú toleranciu vlnového procesu. Pre jednoduchosť, nech prostredie nezaťažuje procesy disperznými vlastnosťami, teda platí, že šíriaci sa vlnový proces sa postupne kvôli stratám „nerozplýva" v danom prostredí. Potom riešenie všetkých veličín možno v 1D očakávať v tvare funkcie $f(x \pm at)$, kde $x \pm a.t$ je argument funkcie $f(...)$, premenná $\pm a$ je fázová rýchlosť šíriaceho sa vlnového vzruchu proti smeru ($+a$), v smere ($-a$) osi Ox, pričom premenná p je zadaná a premenné v_x, ρ sú hľadané. Potom za uvedeného predpokladu $v_x(x \pm at)$, $\rho(x \pm at)$ bude vzhľadom na zložený argument $x \pm at$ pre každú funkciu $f(x \pm a.t)$ platiť $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial (x \pm a.t)} . \frac{\partial (x \pm a.t)}{\partial x} = f'$, $\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial (x \pm a.t)} . \frac{\partial (x \pm a.t)}{\partial t} = \pm a. f'$, čo vedie k vzťahom $\partial v_x / \partial t = \pm a. \partial v_x / \partial x$, $\partial \rho / \partial t = \pm a. \partial \rho / \partial x$, čiarka nad premennými v_x, ρ vyjadruje deriváciu podľa vonkajšieho argumentu $x \pm a.t$. Potom sústavu (7) možno prepísať do tvaru (kvôli jednoduchosti ďalej iba pre znak „-")

$$-a.\rho.v_x' + \rho.v_x.v_x' + p' = 0 \quad \wedge \quad -a.\rho' + v_x.\rho' + \rho.v_x' = 0 \ , \tag{8}$$

alebo po nasledujúcej úprave

$$\rho.v_x'(v_x - a) + p' = 0 \quad \wedge \quad \rho'(v_x - a) + \rho.v_x' = 0 \tag{9}$$

možno pristúpiť k postupnému integrovaniu diferenciálnej sústavy, začínajúc z druhej rovnice (obe premenné v_x aj ρ sú v zmysle predchádzajúcich úprav derivované podľa rovnakého argumentu: $x - a.t$)

$$\frac{\rho'}{\rho} = \frac{-v_x'}{v_x - a} \Rightarrow \left(\ln \frac{\rho}{\rho_0} \right)' = -\left(\ln \frac{v_x - a}{v_{x0} - a} \right)' \Rightarrow \ln \frac{\rho}{\rho_0} = \ln \left(\frac{v_x - a}{v_{x0} - a} \right)^{-1} , \tag{10}$$

čo privedie po úprave k výrazu

$$\ln \frac{\rho}{\rho_0} = \ln \left(\frac{v_x - a}{v_{x0} - a} \right)^{-1} = \ln \frac{v_{x0} - a}{v_x - a} \Rightarrow \rho = \rho_0 . \frac{v_{x0} - a}{v_x - a} \Rightarrow v_x = a + \frac{\rho_0 (v_{x0} - a)}{\rho} , \tag{11}$$

aj k zmenenému zápisu prvej diferenciálnej rovnice, lebo po substitúcii výrazu pre premennú ρ do prvej rovnice sa jej zápis upraví do tvaru

$$\rho_0 . v_x{}' .(v_{x0} - a) + p' = 0 \quad \Rightarrow \quad v_x{}' = \frac{p'}{\rho_0 .(a - v_{x0})} \ , \tag{12}$$

pričom si treba uvedomiť, že oproti (10), (11) je tu rozdiel v deriváciách, $v_x{}' = \dfrac{\partial v_x}{\partial (x - a.t)}$, $\rho' = \dfrac{\partial \rho}{\partial (x - a.t)}$, oproti $p' = \dfrac{\partial p}{\partial x}$, ale keďže z predchádzajúcich úprav tiež platí $v_x{}' = \dfrac{\partial v_x}{\partial x}$, možno (12) prepísať do tvaru

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = \frac{\frac{\partial p}{\partial x}}{\rho_0 .(a - v_{x0})} \quad \Rightarrow \quad v_x = \frac{p - p_0}{\rho_0 (a - v_{x0})} + g(t) , \tag{13a}$$

kde funkcia $g(t)$ by mohla byť ľubovoľná funkcia, ale vzhľadom na to, že rýchlosť sa nemôže ľubovoľne meniť s časom, tak musí pre tento prípad platiť $g(t) \equiv 0$. Hodnoty v_{x0}, ρ_0, p_0 sú počiatočné hodnoty príslušných premenných v_x, p, ρ pre $t = t_0$. V prípade nulových počiatočných hodnôt $v_{x0} = 0,\ p_0 = 0$ pre $t = t_0$

$$v_x{}' = \frac{p'}{\rho_0 .a} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial v_x}{\partial x} = \frac{\frac{\partial p}{\partial x}}{\rho_0 .a} \quad \Rightarrow \quad v_x = \frac{p}{\rho_0 .a} \tag{13b}$$

a v prípade $p = 0$ aj rýchlosť $v_x = 0$, čo neodporuje selfkonzistentnosti úlohy.

Po substitúcii premennej v_x z výrazu (13a), resp. výrazu (13b) do výrazu (11) možno získať bezprostrednú závislosť medzi premennými ρ a p

$$\rho = \frac{\rho_0{}^2 (a - v_{x0})^2}{a.\rho_0 (a - v_{x0}) + p_0 - p} . \tag{14a}$$

V prípade nulových počiatočných hodnôt $v_{x0} = 0,\ p_0 = 0$ bude mať výraz pre odozvu tvar

$$\rho = \frac{\rho_0{}^2 . a^2}{\rho_0 . a^2 - p}, \tag{14b}$$

ktorý vedie za predpokladu nulového podnetu $p = 0$ k hodnote $\rho = \rho_0$, čiže k priznaniu nezmeneného stavu, čo jednoznačne hovorí o selfkonzistentnosti nielen dosiahnutého výrazu (14b), ale tiež všetkých dosiahnutých výsledkov (11) až (14b) a v podstate aj celého modelu.

Vo vzťahoch (11) až (14b) vystupujú dve rýchlosti:
- fázová rýchlosť a, ktorou sa šíria zmeny do okolia, a preto má globálny prejav,
- rýchlosť zmien prostredia v danom mieste v_x, a preto má lokálny prejav.

Vzájomnú súvislosť medzi týmito rýchlosťami vyjadruje zápis $v_x(x - a.t)$, kde zápis v zátvorke $x - at$ je argumentom funkcie v_x (...), za určitých okolností hoci aj v tvare $v_x \cong A + B.(x - a.t)^c$, z ktorého vyplýva význam fázovej rýchlosti: ak sa hodnota tohto argumentu nebude meniť, teda $x - a.t = const$, tak sa aj hodnota v_x tiež nebude meniť napriek tomu, že proces sa presunul o pozíciu $x = a.t$ s fázovou rýchlosťou a. Inými slovami, zmena miestnej rýchlosti v_x sa šíri do okolia fázovou rýchlosťou a. To isté platí aj pre zmenu veličiny $\rho(x - a.t)$.

V prípade neakceptovania záporných hodnôt pre odozvu ρ musí z dôsledku vlastností výrazu (14b) platiť $a^2.\rho_0 - p > 0 \;\Rightarrow\; p < a^2.\rho_0$, čo znamená, že v rámci tohto modelu existuje ohraničenie na veľkosť podnetu, inými slovami – prostredie tohto modelu vedie k saturácii podnetu a jeho vplyvu. Analogická situácia nastane aj v súvislosti so vzťahom (14a), v tomto prípade však platí $a.\rho_0.(a - v_{x0}) + p_0 - p > 0 \;\Rightarrow$ $p < p_0 + a.\rho_0.(a - v_{x0}) = a^2.\rho_0 + p_0 - a.\rho_0.v_{x0}$, teda miera saturácie môže byť iná v porovnaní s prvým prípadom, závisí to od rozdielu znaku výrazu: $p_0 - \rho_0.a.v_{x0}$. Zaujímavé je, že v oboch prípadoch sa na tejto saturácii podieľa fázová rýchlosť a, čím je väčšia, tak k saturácii dochádza neskôr. Môže to súvisieť s tým, že pri väčšej fázovej rýchlosti sa podnet môže rozptýliť do väčšieho priestoru a následne neskôr dôjde k „presýteniu“ (saturácii) prostredia pôsobiacim podnetom a jeho vplyvom.

Z výrazov (11) až (13b) vyplýva nepriamoúmerná závislosť medzi odozvou a rýchlosťou $\rho \approx 1/v_x$, resp. $v_x \approx 1/\rho$, čo je dôsledok požiadavky, vyjadrenej rovnicou kontinuity (4b), resp. (4d) a jej úprav v následných vzťahoch, ktoré napokon prešli do zachovania miery zmien odozvy a rýchlosti týchto zmien v zmysle výrazu (11), resp. v jeho schematickom vyjadrení $\rho.v_x \approx const$. V podstate dochádza k niečomu podobnému v jednoduchom modeli obsluhy: keby sa za predpokladu stacionárneho stavu obslužných činností v jednoradovom zástupe menila rýchlosť zmien postupu, potom by sa musela nepriamoúmerne meniť aj hustota rozloženia jednotlivcov, prítomných v zástupe.

Z výrazov (11) až (13b) vyplýva tiež skutočnosť, že miestna/lokálna rýchlosť závisí nielen od veľkosti podnetu p , ale aj od pôvodného stavu prostredia ρ_0 , počiatočných podmienok v_{x0}, p_0 a prekvapujúco, opätovne tiež aj od fázovej rýchlosti a . Toto všetko sú parametre modelu, ktorými možno riadiť a ovplyvňovať jeho prejav. Napr., zo vzťahov (13a), (13b) vyplýva, že rýchlosť miestnych zmien v_x je priamoúmerná pôsobeniu podnetu p , nepriamoúmerná súčinu robustnosti ρ_0 pôvodného stavu prostredia a fázovej rýchlosti a , teda $v_x \approx p/(a.\rho_0)$, čo je pochopiteľné, lebo väčší vplyv p sa musí prejaviť aj väčším účinkom, a väčšia robustnosť ρ_0 pôvodného stavu systému a väčšia oblasť, zasiahnutá v dôsledku väčšej fázovej rýchlosti a , sa musia prejaviť znížením výsledného efektu. Inými slovami, pri želaní vyvolať väčšiu rýchlosť v_x miestnych/lokálnych zmien, treba pôsobiť väčším podnetom p , ale pri väčšej robustnosti ρ_0 systému a pri očakávaní väčšieho rozsahu vplyvu v dôsledku väčšieho zásahu vďaka väčšej rýchlosti šírenia sa podnetu fázovou rýchlosťou a , sa prejav bude zmenšovať.

Vidieť, že v rámci Eulerovho priblíženia sa v modeli kontinuálneho prostredia môžu sa rozvinúť pod vplyvom podnetu procesy s charakterom vlnového prejavu, ale v rámci 1D modelu by tieto procesy napriek svojej existencii trpeli rôznymi ohraničeniami, ktoré by vlastne boli rešpektovaním možností prejavu príslušných premenných v 1D modeli.

Tiež je vidieť, že napriek nanúteným ohraničeniam v dôsledku 1D modelu sú dosiahnuté výsledky pre jednotlivé premenné selfkonzistentné v rámci modelu, aj vo vzájomnej konformite v rámci jeho porovnania s prípadnou skutočnosťou.

2.2 Nájdenie vlnového riešenia v dvojrozmernom prípade

Snáď sa každý stotožní s tvrdením, že spoločenské procesy sa za bežnej situácie, bez výnimočnej nutnosti bližšej špecifikácie, odohrávajú v rámci času a dvojrozmerného priestoru. Nutnosť rešpektovania tretieho rozmeru prichádza do úvahy síce pomerne často (iste môže nastať situácia s priznaním rozdielu, že sa niečo uskutočnilo na 2. alebo 3. poschodí budovy), ale pre popis a postihnutie prejavu a vlastností mnohých sociálno-ekonomických javov a procesov postačujú dva rozmery. Bez snahy o zníženie všeobecnosti: stačí to nielen na sledovanie šírenia sa informácie, klebety a verejnej mienky, na sledovanie epidemického šírenia sa rôznych nemocí, migrácie ekosystémov, a pod. Preto snaha postihnúť vlastnosti systému, predstaveného sústavou (4a), (4b) či (4c), (4d) a nájsť jej riešenie pre prípad 2D, je opodstatnený.

Podobne, ako v 1D prípade, je potrebné upraviť druhý člen v druhej rovnici pôsobením vektorového diferenciálneho operátora $\vec{\nabla}$ na premenné v zátvorke, potom rovnice (4a), (4b) prejdú do tvaru

$$\frac{\partial \vec{v}(\vec{r},t)}{\partial t}+\left(\vec{v}(\vec{r},t)\vec{\nabla}\right)\vec{v}(\vec{r},t)=\frac{1}{\rho(\vec{r},t)}\left(\vec{F}(\vec{r},t)-\vec{\nabla}p(\vec{r},t)\right), \qquad \vec{F}(...)=0 \tag{15a}$$

$$\frac{\partial \rho(\vec{r},t)}{\partial t}+\vec{v}(\vec{r},t)\vec{\nabla}\rho(\vec{r},t)+\rho(\vec{r},t)\vec{\nabla}\vec{v}(\vec{r},t)=0\,, \tag{15b}$$

ktorý sa bude dať ľahšie využiť pre naznačený zámer.

Používanie pravouhlej karteziánskej súradnicovej sústavy v 2D alebo (3D) prípade nie je nič neobvyklé, kvôli jej názornosti a transparentnosti sa však častejšie používa skôr s didaktickým zámerom, než pre riešenie konkrétnych praktických úloh. Každá úloha, každý problém má určitý druh symetrie, preto je takmer vždy pre riešenie danej úlohy výhodné použiť nejaký konkrétny druh súradnicovej sústavy, často aj krivočiarej. Vzhľadom na zjednodušenie zápisov sa však prevažne využívajú rôzne krivočiare *ortogonálne*, alebo ešte lepšie, *ortonormálne* súradnicové sústavy, napr. pri úlohe s guľovou symetriou – sférická, pri valcovej – cylindrická, príp. aj iné: toroidalná, paroboloidalná, elipsoidálno-hyperbolická, a pod. Pre problém sledovania šírenia sa odozvy na podnet v rámci 2D priestoru mnohé javy závisia od vzdialenosti $r=\sqrt{x^2+y^2}$ od nejakého mysleného bodu, ktorý môže byť stotožnený s počiatočným, východiskovým bodom procesu. Preto je výhodné použiť cylindrickú pravouhlú súradnicovú sústavu na úrovni $z=0$, teda s potlačením tretieho rozmeru, sústava sa tak stáva cylindrickou sústavou na ploche. Vyjadrenie rovníc (15a), (15b) v cylindrickej sústave však povedie k zložitým výrazom a hlavne k veľmi prácnemu postupu. Aby sa však dalo vyhnúť pomerne zložitým matematickým operáciám, tak by bolo vhodné pri bezpodmienečnej nutnosti zostať v cylindrickej sústave, ale všetko vyjadriť v symbolike karteziánskych súradníc. Táto úloha to výnimočne umožňuje pri zohľadnení $r=\sqrt{x^2+y^2}$: $\vec{v}(r-a.t)=\vec{v}\left(\sqrt{x^2+y^2}-a.t\right)$, $\rho(r-a.t)=\rho\left(\sqrt{x^2+y^2}-a.t\right)$. Potom vzťahy (17) bude možné prepísať do tvaru

$$\frac{\partial v_x}{\partial t}+(v_x.\nabla_x)v_x+(v_y.\nabla_y)v_x+\frac{1}{\rho}(\nabla_x.p)=0\,,$$
$$\frac{\partial v_y}{\partial t}+(v_x.\nabla_x)v_y+(v_y.\nabla_y)v_y+\frac{1}{\rho}(\nabla_y.p)=0\,,$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+(v_x.\nabla_x)\rho+(v_y.\nabla_y)\rho+\rho(\nabla_x.v_x)+\rho(\nabla_y.v_y)=0\,. \tag{16}$$

Následne, po zohľadnení $r=\sqrt{x^2+y^2} \Rightarrow \vec{v}(\sqrt{x^2+y^2}-at),\ \rho(\sqrt{x^2+y^2}-at)$, v dôsledku zloženého vonkajšieho argumentu $\sqrt{x^2+y^2}-a.t$, bude možné po príslušných úpravách získať výrazy pre rovnice sústavy (16), v tvare

$$-a.v_x' + v_x.v_x'.\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + v_y.v_x'.\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = 0,$$

$$-a.v_y' + v_x.v_y'.\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + v_y.v_y'.\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} = 0, \tag{17}$$

$$-a.\rho' + v_x.\rho'.\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + v_y.\rho'.\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + \rho.v_x'.\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + \rho.v_y'.\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0,$$

pričom v týchto všetkých vzťahoch, analogicky ako v 1D, čiarka nad príslušnou premennou znamená deriváciu podľa vonkajšieho argumentu $\sqrt{x^2+y^2}-a.t$.

Ďalšia úprava tejto sústavy do tvaru

$$v_x'.\left(\frac{x.v_x+y.v_y}{\sqrt{x^2+y^2}}-a\right)+\frac{1}{\rho}.\frac{\partial p}{\partial x}=0, \qquad v_y'.\left(\frac{x.v_x+y.v_y}{\sqrt{x^2+y^2}}-a\right)+\frac{1}{\rho}.\frac{\partial p}{\partial y}=0$$

$$\rho'.\left(\frac{x.v_x+y.v_y}{\sqrt{x^2+y^2}}-a\right)+\rho\frac{x.v_x'+y.v_y'}{\sqrt{x^2+y^2}}=0 \tag{18}$$

umožňuje jej integráciu. Sústava (18) je silno nelineárna, jednotlivé zložky rýchlosti v_x, v_y a hustoty odozvy ρ a ich derivácií v_x', v_y', ρ' podľa vonkajšieho argumentu $\sqrt{x^2+y^2}-a.t$ sú v zložitých funkčných vzťahoch zviazané s priestorovými deriváciami podnetu $\frac{\partial p}{\partial x}$, $\frac{\partial p}{\partial y}$ a fázovou rýchlosťou a. Napriek zdanlivej jej najväčšej zložitosti je najvýhodnejšie začať integráciu sústavy (18) z tretej rovnice úpravou do tvaru

$$\frac{\rho'}{\rho} = -\frac{x.v_x' + y.v_y'}{x.v_x + y.v_y - a.\sqrt{x^2+y^2}}, \tag{19}$$

ktorý umožňuje, vzhľadom na deriváciu podľa rovnakého argumentu $\sqrt{x^2+y^2} - a.t$, riešenie v tvare

$$\ln\frac{\rho}{\rho_0} = -\ln\frac{x.v_x + y.v_y - a.\sqrt{x^2+y^2}}{x.v_{x0} + y.v_{y0} - a.\sqrt{x^2+y^2}} = \left(\frac{x.v_x + y.v_y - a.\sqrt{x^2+y^2}}{x.v_{x0} + y.v_{y0} - a.\sqrt{x^2+y^2}}\right)^{-1} \tag{20}$$

a po odlogaritmovaní v tvare

$$\rho = \rho_0.\frac{x.v_{x0} + y.v_{y0} - a.\sqrt{x^2+y^2}}{x.v_x + y.v_y - a.\sqrt{x^2+y^2}}. \tag{21}$$

Z porovnania vzťahu (21) pre 2D s príslušným analogickým vzťahom (11) pre 1D vyplýva ich rovnaký charakter, ktorý by sa mal viditeľnejšie prejaviť pri degenerácii 2D $\to$ 1D.

Preto v prípade $\exists\,(y, v_y, v_{y0})$, resp. v prípade $\exists\,(x, v_{x,}\ v_{x0})$

$$\rho = \rho_0.\frac{x.v_{x0} - a.x}{x.v_x - a.x} = \rho_0.\frac{v_{x0} - a}{v_x - a}, \qquad \rho = \rho_0.\frac{y.v_{y0} - a.y}{y.v_y - a.y} = \rho_0.\frac{v_{y0} - a}{v_y - a} \tag{22}$$

vidieť, že výsledky sú zhodné s výsledkami 1D pre single Ox, resp. Oy - z čoho jednoznačne vyplýva vzájomná kompatibilita výsledkov, získaných v 1D a 2D situácii, čo znova hovorí o selfkonzistentosti modelu, v podstate aj o správnosti prechodu k 2D a rozpracovaní úlohy v 2D.

Prvé dve rovnice diferenciálnej sústavy (18) majú rovnakú štruktúru (modelu nebol „nanútený“ nehomogénny a neizotropný prejav), preto aj postup ich integrácie bude rovnaký.

Po formálnej úprave prvej, resp. druhej rovnice sústavy (18) a substitúcií výrazu pre ρ z rovnice (21) možno odvodiť vzťahy

$$v_x' = \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial x}\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{a.\sqrt{x^2+y^2} - x.v_{x0} - y.v_{y0}}, \quad v_y' = \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial y}\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{a.\sqrt{x^2+y^2} - x.v_{x0} - y.v_{y0}}, \tag{23}$$

ktoré sa v prípade prechodu 2D $\to$ 1D $\Rightarrow\ \exists\,(y,\ v_y,\ v_{y0})$, resp. $\exists\,(x,\ v_x,\ v_{x0})$, zmenia na výrazy

$$v_x{}' = \frac{x.\dfrac{\partial p}{\partial x}}{\rho_0.\left(a.x - x.v_{x0}\right)} = \frac{1}{a.\rho_0}.\frac{\partial p}{\partial x}, \quad v_y{}' = \frac{y.\dfrac{\partial p}{\partial y}}{\rho_0.\left(a.y - y.v_{y0}\right)} = \frac{1}{a.\rho_{0.}}.\frac{\partial p}{\partial y}, \tag{24}$$

čo znovu vedie ku vzťahom, konformným so vzťahmi (19a) a (19b), získanými v1D prípade.

Integrácia vzťahov (23) v 2D však bude v porovnaní s integráciou vzťahu (13a) v 1D náročnejšia. V prípade 1D na pravej strane výrazu (13a) stál ku gradientu podnetu $\dfrac{\partial p}{\partial x}$ konštantný množiteľ $\dfrac{1}{\rho_0(a - v_{x0})}$, v 2D prípade sú gradientné zložky podnetu $\dfrac{\partial p}{\partial x},\ \dfrac{\partial p}{\partial y}$ vo výrazoch (23) v multiplikatívnom vzťahu so zložitými výrazmi: $\int f(.)\dfrac{\partial p}{\partial x}.dx = \int f(.)dp$, $\int f(.)\dfrac{\partial p}{\partial y}dx = \int f(.)dp$, $f(.) = \dfrac{\sqrt{x^2 + y^2}}{a.\sqrt{x^2 + y^2} - x.v_{x0} - y.v_{y0}}$.

Navyše, v 1D platili jednoduchšie vzájomné vzťahy medzi deriváciami oproti vzťahom v 2D.

Integráciu (23) sa ponúka vykonať viacerými spôsobmi:

A) Metódou per-partes $\int f(..).dp = p.f(..) - \int p.df(..)$, ktorú by bolo možno vykonať po explicitnom zadaní funkčnej závislosti podnetu $p(x,\ y,\ t)$. V pôvodnom integráli na ľavej strane per-partes má výraz funkcie $f(..)$ vzhľadom na priestorové súradnice rozmer $\dfrac{(x,\ y)^1}{(x,\ y)^1} \approx (x,\ y)^0$. Po úprave bude mať získaná funkcia po jej derivácii na pravej strane úpravy per-partes vzhľadom na priestorové súradnice rozmer $\dfrac{(x,\ y)^1}{(x,\ y)^2} \approx \dfrac{1}{(x,\ y)^1} \approx (x,\ y)^{-1}$, čo môže byť výhodné pre asymptotické riešenia $(x,\ y) \to \infty$, pretože tento integrál môže byť v mnohých prípadoch pri ohraničených hodnotách podnetu p a jeho gradientu $\dfrac{\partial p}{\partial x},\ \dfrac{\partial p}{\partial y}$ zanedbaný a výsledky potom budú rovné prvému výrazu pravej strany úpravy per-partes, tzn. súčinu $p.f(..)$ a budú pre v_x aj v_y

rovnaké (možno overiť príslušným limitným prechodom), čo v prípade nulových počiatočných podmienok $v_{x0}=0,\ v_{y0}=0$ vedie tiež k výrazu

$$v_x\Big|_{(x,y)\to\infty}=v_y\Big|_{(x,y)\to\infty}\approx\frac{p}{\rho_0(a-v_{x0}-v_{y0})},\quad v_x\Big|_{(x,y)\to\infty}=v_y\Big|_{(x,y)\to\infty}\approx\frac{p}{\rho_0.a} \tag{25}$$

a znovu vidieť, že tento výsledný výraz je vo vzájomnej konformite s už doteraz získanými výsledkami aj vzhľadom na 1D, vzťahy (13a), (13b).

B) Čiarky nad v_x', v_y', ρ' označujú deriváciu premennej podľa vonkajšieho argumentu $\dfrac{\partial -dtto-}{\partial\left(\sqrt{x^2+y^2-a.t}\right)}$, po nasledujúcej úprave vzťahov $\dfrac{\partial v_x}{\partial x}=v_x'.\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\dfrac{\partial v_x}{\partial y}=v_x'.\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\dfrac{\partial v_y}{\partial x}=v_y'.\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\dfrac{\partial v_y}{\partial y}=v_y'.\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\dfrac{\partial \rho}{\partial x}=\rho'.\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\dfrac{\partial \rho}{\partial y}=\rho'.\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$, možno ich využiť na vyjadrenie v_x', v_y' cez jednoduché derivácie $\dfrac{\partial -dtto-}{\partial x}, \dfrac{\partial -dtto-}{\partial y}$ a potom upraviť výrazy (23)

$$\frac{\partial v_x}{\partial x}=\left|\begin{matrix}\to\\ \exists\, y, v_{y0}\end{matrix}\right|=\frac{1}{\rho_0(a-v_{x0})}\frac{\partial p}{\partial x},\quad \frac{\partial v_y}{\partial y}=\left|\begin{matrix}\to\\ \exists\, x, v_{x0}\end{matrix}\right|=\frac{1}{\rho_0(a-v_{y0})}\frac{\partial p}{\partial y} \tag{26}$$

a tiež upraviť aj výrazy (24)

$$\frac{\partial v_x}{\partial x}=\left|\begin{matrix}v_{x0}=0\\ v_{y0}=0\end{matrix}\right|=\left|\begin{matrix}\to\\ \exists\ y\end{matrix}\right|=\frac{1}{a.\rho_0}\frac{\partial p}{\partial x},\quad \frac{\partial v_y}{\partial y}=\left|\begin{matrix}v_{x0}=0\\ v_{y0}=0\end{matrix}\right|=\left|\begin{matrix}\to\\ \exists\ x\end{matrix}\right|=\frac{1}{a.\rho_0}\frac{\partial p}{\partial y}. \tag{27}$$

Dôsledky prechodu 2D$\to$1D sú, že výrazy (26), (27) v prípade $\overline{\exists}\ (y,\ v_{y0})$ a v prípade $\overline{\exists}\ (x,\ v_{x0})$ sa zmenia na rovnaký tvar, ako v 1D prípade a budú v podstate zhodné s výrazmi (13a), (13b). V tomto zmysle vidieť aj ich vzájomnú kompatibilitu.

Posledné úpravy umožnili prejsť v príslušných výrazoch k deriváciám podľa rovnakého argumentu. Potom v podstate nič nebráni integrovaniu výsledných vzťahov (26), (27) za predpokladu explicitného zadania gradientu podnetu $\vec{\nabla}p=\vec{i}\,\dfrac{\partial p}{\partial x}+\vec{j}\,\dfrac{\partial p}{\partial y}$.

Vidieť, že na šírenie sa odozvy v sociálno-ekonomickom prostredí nemá vplyv ani tak samotná veľkosť podnetu p, ako veľkosť jeho priestorovej zmeny, vyjadrenej príslušnými parciálnymi deriváciami $\partial p/\partial x$, resp. $\partial p/\partial y$ - dokonca s možnosťou zohľadnenia ich rastu/poklesu so znakom $\pm\partial p/\partial x$, $\pm\partial p/\partial y$ v následnom súlade so smerom šírenia sa odozvy. Toto podčiarkuje silný vplyv rozdielnosti veľkosti podnetu v prostredí jeho pôsobenia (teda priestorovej nehomogenity jeho prejavu) na vznik odozvy, akoby takáto rozdielnosť hodnoty podnetu vzhľadom na miesto jeho pôsobenia bola prostredím akceptovateľnejšia. Nakoniec, veď existuje známe *„divide et impera“*.

Záver

Cieľom príspevku bolo poukázať na možnosť vzniku odozvy na podnet v sociálno-ekonomickom prostredí vo forme vlnového procesu. Za základ modelu boli vybraté Eulerove vzťahy, vhodné pre popis správania sa kontinuálneho prostredia. Model teda vykazuje veľkú mieru nelinearity. Vidieť, že aj v najjednoduchšej situácii v 1D aj v 2D rozmernom sociálno-ekonomickom prostredí v Eulerovom priblížení môže vzniknúť a byť udržiavaný vlnový proces s konštantnou fázovou rýchlosťou. Jeho amplitúda závisí od gradientu podnetu a pôvodného stavu systému, ktorý sa vo vzťahoch prejavuje v úlohe robustnosti systému. Nájdenie príslušných vzťahov túto možnosť potvrdilo.

Úpravy a odvodzovanie vzťahov boli zdôvodňované priebežne a taktiež prejav jednotlivých parametrov a premenných modelu bol komentovaný vo vzájomnom porovnávaní, ale aj v rámci 1D aj 2D situácie. V každej analyzovanej situácii bola na konkrétnych analytických výrazoch konštatovaná ich selkonzistnentnosť a tiež aj konformita s prípadnou modelovanou skutočnosťou.

Model pre sledovanie odozvy na podnet zámerne bližšie neupresňuje imanentné vlastnosti sociálno-ekonomického prostredia, zostáva iba na úrovni zohľadnenia základných procesných vlastností, vyskytujúcich sa obligatórne pri analýze každej podobnej situácie. Možno práve tým získava model na všeobecnosti.

Na úrovni Eulerovho prístupu model nezohľadňuje disipatívne procesy, vedúce k takýmto stratám podnetu, resp. šírenia sa odozvy. Znižovanie hodnoty odozvy počas jej šírenia sa je zapríčinené iba jej rozptylom do väčšieho priestoru.

Zohľadnenie disipatívnych procesov bude vyžadovať zohľadnenie nielen imanentných (endogénnych, inherentných) vlastností sledovaného prostredia, ale aj exogénneho vplyvu naň.

Kľúčové slová

sociálno-ekonomické prostredie, kontinuálne prostredie, nelineárne vzťahy, parciálna diferenciálna rovnica, vlnový proces, odozva, podnet

Klasifikácia JEL

C16, G17, G35

LITERATÚRA

[1] SHONE, R. 1997. *Economic dynamics*. Cambridge : Cambridge univ. Press, 1997.
[2] MANTEGNA, R. N. – STANLEY, H. E. 2000. *An introduction to econophysics*. Cambridge : Cambr. univ. press, 2000.
[3] HOLODNIOK, M. a kol. 1986. *Metody analýzy nelin. dyn. Modelů*. Praha : Academia, 1986.
[4] KOŠĽIJAKOV, N. S. – GLINER, E. B. – SMIROV, M. M. 1970. *Uravnenija v častnych proizvodnych matematičeskoj fiziki*. Moskva : Vyššaja škola, 1970.
[5] GLENDING, P. 1994. *Stability, instability and chaos*. Cambridge : Cambr. univ. press, 1994.
[6] Sir JEFFREYS, H. – SWIRLES, B. (Lady Jeffreys). 1969. *Methods of mathematical physics*. Cambridge : Cambr. univ. press (1, 2, 3), 1969.
[7] VOIT, J. 2005. *The Statistical Mechanics of Financial Markets, Theoretical and Mathematical Physics*. Berliln : Springer, 2005.

RESUMÉ

Vznik a nástup procesov v sociálno-ekonomickom prostredí je veľakrát spôsobený podnetmi, ktoré často vznikajú ako dôsledok hromadiacich sa problémov, následne vytvárajúcich spoločenské napätie a spoločenský tlak. Postihnutie tohto stavu a snaha o jeho riešenie samotným prostredím tak potom znova tvorí podnet, ktorý vedie k zmene stavu prostredia a táto zmena prostredia zasa môže iným spôsobom akceptovať ďalší vývojový stupeň podnetu. Vzniká tak stupňujúci sa cyklický proces, nastupuje spätná spojitosť, často vedúca k vytvoreniu nelineárnych väzieb. Sociálno-ekonomické systémy sú teda vo všeobecnosti nelineárne, preto za predpokladu riešenia takýchto úloh v modeli kontinua budú tieto úlohy popisované sústavou nelineárnych diferenciálnych rovníc. Publikovaný príspevok sa snaží dať odpoveď na otázku, či v Eulerovom modeli kontinua môže vzniknúť a byť udržiavaný vlnový proces ako odpoveď na nejaký podnet a vplyv. Nájdenie príslušných vzťahov túto možnosť potvrdilo.

SUMMARY

Formation and the onset of processes in socio-economic environment is often caused by stimuli which often arise as a result of accumulating problems, then creating social tension and social pressure. Disability of this condition and the search for a solution medium itself then forms a stimulus that leads to a change in the environment, and this in turn can change the environment otherwise accept further development initiative. This gives rise to an escalating cyclical process starts feedback link, often leading to the creation of non-linear links. Socio-economic systems are therefore generally nonlinear, therefore providing solutions to such problems in continuum model of these tasks described by a system of nonlinear differential equations. Published contribution tries to answer the question whether the Euler continuum models may arise and be maintained wave processes in response to any stimulus and influence. Finding the equation confirmed this possibility.

Kontakt

RNDr. Ľubomír Turňa, CSc., Katedra aplikovanej informatiky, Fakulta hospodárskej informatiky, Ekonomická univerzita v Bratislave, Dolnozemská cesta 1, 852 35 Bratislava, tel.: + 421 2/672 95 877, e-mail: stefanluboturna@post.sk