

Optimálne zaistenie poisťovateľa z pohľadu teórie rizika

Optimal insurance coverage for an insurer from the perspective of risk theory

Ján Gogola¹

Abstrakt

V aktuárstve v teórii krachu sa uplatňujú matematické modely na opis zraniteľnosti poisťovateľa voči krachu. Teoretický základ teórie krachu opisuje prebytok poisťovateľa v akomkoľvek budúcom čase ako náhodnú premennú, ktorej hodnota závisí od prijatého poistného a vyplatených poistných plnení. Poisťovňa chce udržať pravdepodobnosť krachu na čo najmenšej úrovni, alebo aspoň pod vopred stanovenú hranicu. Lundbergova nerovnosť poskytuje hornú hranicu pravdepodobnosti krachu v nekonečnom čase a je jedným z najznámejších výsledkov v teórii krachu. Jednou z možností pre poisťovateľa, ktorý chce znížiť pravdepodobnosť krachu, je uzavrieť zaistenie. Budeme uvažovať o dvoch typoch zaistenia: proporcionálnom zaistení a zaistení škodovej nadmierky. Zaistenie (z pohľadu poisťovateľa) považujeme za optimálne, ak minimalizuje pravdepodobnosť krachu. Cieľom tohto článku je ilustrovať, ako zmeny v parametri rizikovej prirážky poistného (používaného poisťovateľom i zaistovateľom) ovplyvňujú pravdepodobnosť krachu pri oboch druhoch zaistenia. Nájdeme aj optimálny typ zaistenia za určitých podmienok.

Kľúčové slová

Zaistenie, Teória krachu, proporcionálne zaistenie, zaistenie škodovej nadmierky (XL zaistenie), koeficient korekcie, vlastný vrub, zložený Poissonov proces.

Abstract

In actuarial science ruin theory uses mathematical models to describe an insurer's vulnerability to ruin. Theoretical foundation of ruin theory describes an insurance company who experiences two opposing cash flows: incoming cash premiums and outgoing claims. The insurer's surplus at any future time is a random variable since its value depends on premiums and claims. The insurer wants to keep the probability of ruin as small as possible, or at least below a predetermined bound. Lundberg's inequality provides an upper bound for the probability of ruin in infinite time and is one of the most famous results in ruin theory. One of the options for an insurer who wishes to reduce the probability of ruin is to effect reinsurance. We shall consider two kinds of reinsurance arrangement: proportional and excess of loss reinsurance. We could consider a reinsurance arrangement (from an insurer point of view) to be optimal if it minimizes the probability of ruin. The goal of this paper is to illustrate how changes in the premium loading factor (used by insurer and reinsurer) affect the probability of ruin in both kind of reinsurance. We find also the optimal type of reinsurance under certain conditions.

Key words

Reinsurance, Ruin theory, Proportional and Excess of Loss Reinsurance, Adjustment coefficient, Retention level, Compound Poisson process

JEL classification C18, G22

¹ Ekonomická univerzita v Bratislave, Fakulta hospodárskej informatiky, Katedra matematiky a aktuárstva, Dolnozemska cesta 1, 852 35 Bratislava, e-mail: jan.gogola@euba.sk.

1 Úvod

Teória krachu sa zaoberá modelmi kolektívneho rizika v dlhšom časovom období a slúži k posúdeniu náhodného výkyvu hodnoty prebytku poisťovne v časovom intervale niekoľkých rokov. Pod krachom poisťovne rozumieme skutočnosť, keď v určitom čase prebytok poisťovne U po prvýkrát klesne do záporných hodnôt. (Horáková, Mucha, 2006)

Zaistenie je opätovné poistenie časti rizika. Priamy poisťovateľ (alebo prvopoisťovateľ) postupuje časť svojho rizika zaistovní. Tú časť rizika, ktorú si ponecháva, sa nazýva vlastný vrub. Poisťovateľ za presun časti rizika platí zaistné. Zaistením sa poisťovateľ zbavuje časti rizika, ktoré je vyššie než môže poistiť alebo si ponechať na vlastný vrub. Zaistením poisťovateľ dosahuje väčšiu homogenitu poistného kmeňa.

Z hľadiska spôsobu delenia si poistného plnenia medzi poisťovateľom a zaistovňou delíme zaistenie na proporcionálne a neproporcionálne.

Cieľom nášho príspevku je preskúmať aký vplyv majú vybrané formy zaistenia a ich rozsah na pravdepodobnosť krachu.

2 Formulácia problému

Nech náhodná premenná X predstavuje hodnotu poistného plnenia individuálneho rizika. Predpokladajme, že existujú jej momenty $m_1(X) = E(X)$ a $m_2(X) = E(X^2)$, ktoré sú konečné.

Pri proporcionálnom zaistení sa poistné plnenie delí medzi poisťovateľa a zaistovňu vo vopred zjednanom pomere α , zvaného podiel na vlastný vrub priameho poisťovateľa. Zaistovateľ platí fixný podiel $1 - \alpha$ z každého poistného plnenia, bez ohľadu na ich výšku. Potom tá časť, ktorú hradí poisťovateľ, má hodnotu

$$Y = \alpha \cdot X. \quad (1)$$

Zaistovňa hradí zostávajúcu časť $1 - \alpha$ z každého poistného plnenia t.j. jej plnenie je

$$Z = (1 - \alpha) \cdot X. \quad (2)$$

Neproporcionálne zaistenie škodovej nadmierky (ang. *excess of loss XL*) je založené na dohode medzi poisťovateľom a zaistovňou, podľa ktorej zaistovňa vyplatí poisťovateľovi plnenie presahujúce vopred zjednanú sumu. Táto suma sa nazýva maximálna úroveň M na vlastný vrub poisťovateľa alebo priorita. Pravdepodobnosť, že výška plnenia je vyššia, než priorita je vo všeobecnosti malá.

Priebeh niektorých číselných charakteristík v závislosti od priority môžeme nájsť v (Fecenko, 2006).

Pri neproporcionálnom zaistení poisťovateľ hradí poistné plnenie v celej výške, pokiaľ hodnota plnenia X nepresiahne vlastný vrub M . Pri poistnom plnení väčšom než M , poisťovateľ hradí sumu M a zostatok zaplatí zaistovňa.

Potom pre plnenie poisťovateľa platí:

$$Y = \min\{X; M\}. \quad (3)$$

a pre plnenie zaistovne:

$$Z = \max\{0; X - M\}. \quad (4)$$

Vo všeobecnosti platí $X = Y + Z$.

3 Použité metódy

Prebytok poisťovateľa $U(t)$ v čase t možno vyjadriť v tvare

$$U(t) = U_0 + c \cdot t - S(t), \quad (5)$$

kde U_0 je počiatočná hodnota rezervného fondu alebo počiatočný kapitál poisťovateľa,

c je konštantná miera intenzity príjmu poistného. Predpokladáme spojitý príjem poistného v čase,

$S(t)$ je výška celkového poistného plnenia v čase t .

Prebytok poisťovateľa je náhodná premenná, ktorej hodnota závisí od výšky plnenia. V našom článku predpokladáme, že proces celkových poistných plnení za jednotku času je zložený Poissonov proces s parametrom λ .

Pravdepodobnosť krachu $\Psi(U)$ v nekonečnom časovom horizonte definujeme ako $\Psi(U) = P[U(t) < 0]$ pre nejaké $0 < t < +\infty$.

Jedným z najdôležitejších výsledkov teórie krachu je Lundbergova nerovnosť (Dickson, Waters, 1993), (Horáková, Mucha, 2006), (Pacáková, 2004), umožňujúca zhora ohraničiť pravdepodobnosť krachu poisťovne v nekonečnom časovom horizonte.

Podľa tejto nerovnosti pre každú hodnotu U počiatočného rezervného fondu poisťovne platí

$$\Psi(U) \leq e^{-RU}. \quad (6)$$

Pričom R je parameter, známy ako koeficient úpravy, resp. koeficient korekcie (ang. *adjustment coefficient* (Dickson, Waters, 1993)). Jeho hodnota závisí od rozdelenia individuálnych poistných plnení a na intenzite prijímania poistného. R môžeme považovať za mieru rizika.

V poisťovníctve sa pravá strana Lundbergovej nerovnosti používa ako aproximácia pri stanovení pravdepodobnosti krachu poisťovne, ktorá sa znižuje s rastúcou hodnotou koeficientu úpravy R .

Preto v našom príspevku budeme maximalizovať koeficient úpravy R , pretože tým minimalizujeme Lundbergovu hornú hranicu pre pravdepodobnosť krachu.

Koeficient úpravy pre zložený Poissonov proces definujeme ako jediný kladný koreň rovnice

$$\lambda + c \cdot R = \lambda \cdot M_X(R), \quad (7)$$

kde $M_X(R)$ je momentová vytvárajúca funkcia v bode R .

Rovnica (7) je implicitná rovnica pre vyjadrenie koeficientu R . Pre niektoré typy rozdelení $F(x)$ individuálnych poistných plnení je možné nájsť explicitné vyjadrenie, pre niektoré (bohužiaľ väčšinu) iba numerické (približné) riešenie.

V prípade, keď individuálne poistné plnenie má exponenciálne rozdelenie s parametrom δ , koeficient úpravy R má jednoduché vyjadrenie $R = \frac{\delta \cdot \theta}{1 + \theta}$,

z ktorého vyplýva, že hodnota R závisí iba na rizikovej prirážke θ poisťovateľa a na parametre δ exponenciálneho rozdelenia.

Pokiaľ individuálne poistné plnenie má exponenciálne rozdelenie $\text{Exp}(\delta)$, je možné odvodiť aj jednoduchý a užitočný vzťah pre pravdepodobnosť krachu $\Psi(U)$ v tvare

$$\Psi(U) = \frac{1}{1 + \theta} \cdot e^{-\frac{\delta \cdot \theta}{1 + \theta} U}. \quad (8)$$

Odvoodenie tohoto vzťahu je možné nájsť v (Gerber, 1979).

4 Rozbor problematiky

Zaistenie je jednou z možností, ako môže poisťovňa minimalizovať pravdepodobnosť krachu, a to maximalizáciou koeficientu úpravy R .

Predpokladajme, že zníženie variability poistných plnení zvýši istotu poisťovateľa, a tým sa zníži aj pravdepodobnosť krachu. Z tohoto pohľadu sa bude zaist'ovacia zmluva, resp. rozsah zaistenia považovať za optimálny, pokiaľ povedie k minimalizácii pravdepodobnosti krachu $\Psi(U)$. Pretože je všeobecne ťažké nájsť jej presné riešenie, pokiaľ poznáme vzťah medzi $\Psi(U)$ a R , budeme maximalizovať hodnotu R .

Uvažujme dva druhy zaistenia:

- proporcionálne zaistenie (*proportional reinsurance*),
- zaistenie škodovej nadmierky (*excess of loss reinsurance*)

4.1 Maximalizácia koeficientu úpravy R pri proporcionálnom zaistení

Predpokladajme, že poisťovňa uzavrela proporcionálne zaistenie poistných plnení s podielom α na vlastný vrub.

Ďalej predpokladajme príjem poistného c_p za jednotku času (napr. rok) pred zaistením v tvare

$$c_p = (1 + \theta) \cdot \lambda \cdot m_1, \quad (9)$$

čo predstavuje priemerné celkové poistné plnenie za jednotku času pre zložený Poissonov proces s parametrom λ a s rizikovou prirážkou θ .

Predpokladáme, že zaistné sa počíta podľa vzťahu

$$c_z = (1 + \xi) \cdot (1 - \alpha) \cdot \lambda \cdot m_1, \quad (10)$$

kde ξ je riziková prirážka zaistovateľa.

Pretože zaistovňa platí podiel $1 - \alpha$ z každého poistného plnenia, výraz $E(Z) = (1 - \alpha) \cdot \lambda \cdot m_1$, predstavuje očakávané plnenie zaistovne za jednotku času. Z toho pre čistý príjem poistného priameho poisťovateľa po zaistení za jednotku času dostávame vzťah

$$c^* = [(1 + \theta) - (1 + \xi) \cdot (1 - \alpha)] \cdot \lambda \cdot m_1. \quad (11)$$

Ďalej budeme predpokladať, že $\xi \geq \theta$. V opačnom prípade by bolo možné pre poisťovateľa presunúť celé riziko na zaistovňu a mať istý zisk. Napríklad keby bolo $\theta = 0,2$ a $\xi = 0,1$, tak by poisťovateľ prijal poistné vo výške $1,2 \cdot \lambda \cdot m_1$. Potom by zaistil celé riziko za zaistné $1,1 \cdot \lambda \cdot m_1$ a ponechal si istý zisk $0,1 \cdot \lambda \cdot m_1$.

Aby bol čistý príjem poistného pre priameho poisťovateľa po zaistení kladný, musí platiť nerovnosť

$$(1 + \theta) > (1 + \xi) \cdot (1 - \alpha) \quad \text{resp.} \quad \alpha > \frac{\xi - \theta}{1 + \xi}. \quad (12)$$

Existuje však značný tlak na poisťovateľa, lebo jeho čistý príjem za jednotku času po zaistení $\alpha \cdot \lambda \cdot m_1$ musí byť vyšší než celkové očakávané plnenie za jednotku času. Preto požadujeme, aby platila nerovnosť $(1 + \theta) - (1 + \xi) \cdot (1 - \alpha) > \alpha$, alebo po úprave

$$\alpha > 1 - \frac{\theta}{\xi} \geq 0. \quad (13)$$

Posledná nerovnosť stanovuje minimálnu hodnotu rizikovej prirážky poisťovateľa, pretože $1 - \frac{\theta}{\xi} \geq \frac{\xi - \theta}{1 + \xi}$ pre $\theta \leq \xi$. Pokiaľ sú rizikové prirážky rovnaké, tak $\alpha > 0$ a v tom prípade môže vlastný vrub α nadobudnúť akúkoľvek hodnotu z intervalu $(0, 1)$. Pokiaľ je však $\theta < \xi$, tak poisťovateľ si musí ponechať časť rizika.

Určme koeficient úpravy R ako funkciu podielu na vlastný vrub α , pokiaľ poistné plnenie má exponenciálne rozdelenie s distribučnou funkciou $F(x) = 1 - e^{-0,1 \cdot x}$, $x > 0$, a poisťovňa aj zaistovňa používajú rovnakú rizikovú prirážku t.j. $\theta = \xi$.

Rozdelenie individuálneho plnenia poisťovateľa po zaistení je opäť exponenciálne, s parametrom $\frac{0,1}{\alpha}$. Vyplýva to z toho, že pokiaľ poistné plnenie poisťovateľa je $Y = \alpha \cdot X$, potom

$$F(y) = P(Y \leq y) = P\left(X \leq \frac{y}{\alpha}\right) = 1 - e^{-\frac{0,1 \cdot y}{\alpha}}.$$

Preto rovnica určujúca R má tvar

$$\begin{aligned}\lambda + c \cdot R &= \lambda \cdot M_Y(R) \\ \lambda + (1 + \theta) \cdot \lambda \cdot 10 \cdot \alpha \cdot R &= \lambda \cdot \int_0^\infty e^{Ry} \cdot \frac{0,1}{\alpha} \cdot e^{-\frac{0,1 \cdot y}{\alpha}} dy \\ 1 + (1 + \theta) \cdot 10 \cdot \alpha \cdot R &= \frac{1}{1 - 10 \cdot \alpha \cdot R} \\ R &= \frac{\theta}{(1 + \theta) \cdot 10 \cdot \alpha}, \text{ pre } 0 < \alpha \leq 1.\end{aligned}\tag{14}$$

Vidíme, že R je klesajúcou funkciou vlastného vrubu α . To znamená, že pokiaľ α klesá, rastie hodnota R , a teda klesá i pravdepodobnosť krachu poisťovne $\Psi(U)$ v nekonečnom časovom horizonte. Obrátene, pokiaľ α rastie, klesá hodnota R , a teda rastie hodnota pravdepodobnosti krachu $\Psi(U)$ v nekonečnom časovom horizonte. To je prirodzené, lebo čím menší vlastný rub, tým menšie je riziko krachu pre poisťovateľa.

Praktická ukážka 1. Uvažujme prípad, keď riziková prirážka poisťovateľa a zaist'ovne sa líši. Nech je distribučná funkcia poistného plnenia opäť $F(x) = 1 - e^{-0,1 \cdot x}$, $x > 0$, a riziková prirážka poisťovateľa a zaist'ovne sú

- a) $\theta = 0,1$ a $\xi = 0,15$,
- b) $\theta = 0,1$ a $\xi = 0,30$.

a) Čistý príjem poisťovateľa po zaistení podľa vzťahu (11) je $c^* = (11,5 \cdot \alpha - 0,5) \cdot \lambda$.

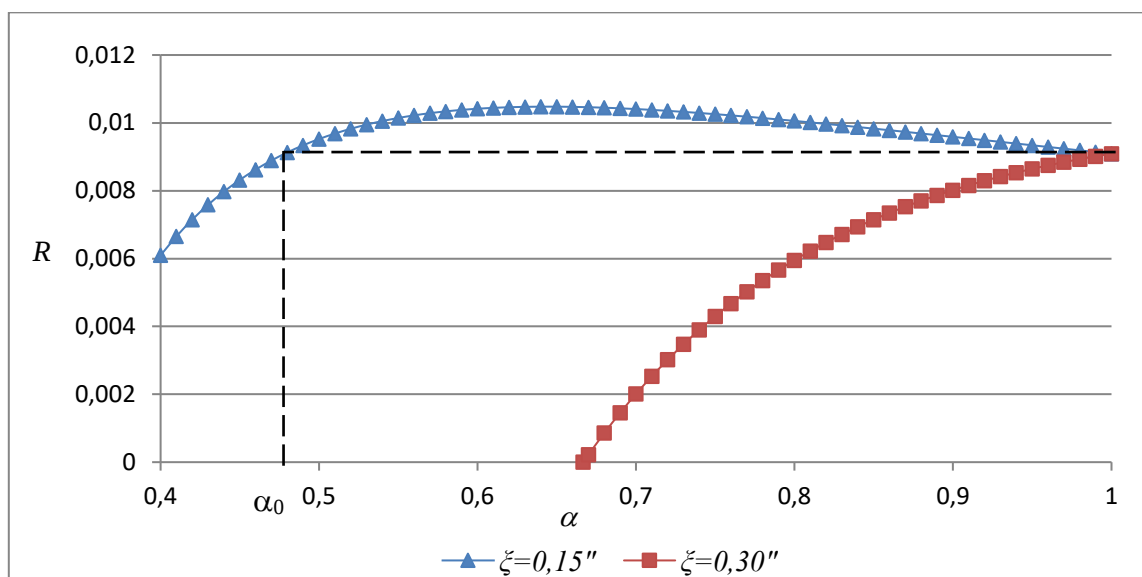
Nerovnosť (13) nám hovorí, že $\frac{1}{3} < \alpha \leq 1$, t.j. poisťovateľ si musí ponechať aspoň tretinu z každého plnenia.

Rovnica, ktorá definuje R , má tvar $\lambda + (11,5 \cdot \alpha - 0,5) \cdot \lambda \cdot R = \frac{\lambda}{1 - 10 \cdot \alpha \cdot R}$,

čo vedie k $R = \frac{1,5 \cdot \alpha - 0,5}{10 \cdot (11,5 \cdot \alpha^2 - 0,5 \cdot \alpha)}$ alebo $R = \frac{3 \cdot \alpha - 1}{230 \cdot \alpha^2 - 10 \cdot \alpha}$, pre $\frac{1}{3} < \alpha \leq 1$.

Vidíme, že koeficient úpravy R opäť závisí na hodnote vlastného vrubu α .

Obr. 1. ukazuje koeficient úpravy R ako funkciu podielu α na vlastný vrub priameho poisťovateľa pre hodnoty α z intervalu 0,4 až 1.

Obr. 1: Koeficient R ako funkcia podielu α na vlastný vrub

Zdroj: vlastné spracovanie

Z grafu vidíme, že existuje určité rozpätie hodnôt α , $\alpha_0 < \alpha < 1$, také, že pokiaľ je podiel α na vlastný vrub z tohoto intervalu, potom koeficient R prekročí hodnotu, ktorú dosiahneme pri $\alpha = 1$, teda pre prípad poistenia bez zaistenia.

V našom prípade je $\alpha_0 = 0,4783$.

Nájdime ešte takú hodnotu α , ktorá maximalizuje hodnotu R .

Deriváciou R podľa α dostaneme $\frac{dR}{d\alpha} = \frac{-690 \cdot \alpha^2 + 460 \cdot \alpha - 10}{(230 \cdot \alpha^2 - 10 \cdot \alpha)^2}$.

Maximálna hodnota R potom dostaneme, ak $\frac{dR}{d\alpha} = 0$.

Korene rovnice sú: $\alpha_1 = 0,0225$ a $\alpha_2 = 0,6442$. Potom maximálnu úroveň má koeficient úpravy R pre hodnotu, ktorá je z intervalu $(\frac{1}{3}; 1)$, t.j. $\alpha = 0,6442$.

Teda, pokiaľ je naším cieľom minimalizovať pravdepodobnosť krachu, tak optimálny podiel na vlastný vrub poisťovateľa má hodnotu 0,6442.

Poznamenajme ešte, že optimálne riešenie v jednom zmysle nemusí byť optimálnym v inom zmysle.

Napríklad, ak sa poisťovateľ rozhodne nevyužiť zaistenie (ponechá si všetko riziko), tak jeho očakávaný zisk za jednotku času je $\theta \cdot \lambda \cdot m_1$. Konkrétne v našom prípade $0,1 \cdot \lambda \cdot 10 = \lambda$.

Pokiaľ sa poisťovateľ rozhodne uskutočniť zaistenie s podielom $\alpha = 0,6442$ na vlastný vrub, tak jeho očakávaný zisk za jednotku času je „iba“ $0,4663 \cdot \lambda$, t.j. rozdiel príjmu

$$c^* = [(1 + \theta) - (1 + \xi) \cdot (1 - \alpha)] \cdot \lambda \cdot m_1$$

$$c^* = [(1 + 0,1) - (1 + 0,15) \cdot (1 - 0,6442)] \cdot \lambda \cdot 10 = 6,9079 \cdot \lambda$$

a očakávaného plnenia

$$\alpha \cdot \lambda \cdot m_1 = 6,442 \cdot \lambda.$$

b) Čistý príjem poisťovateľa po zaistení podľa vzťahu (11) je $c^* = (13 \cdot \alpha - 2) \cdot \lambda$.

Nerovnosť (13) nám hovorí, že $\frac{2}{3} < \alpha \leq 1$, t.j. poisťovateľ si musí ponechať aspoň dve tretiny z každého plnenia.

Rovnica, ktorá definuje R , má tvar $\lambda + (13 \cdot \alpha - 2) \cdot \lambda \cdot R = \frac{\lambda}{1 - 10 \cdot \alpha \cdot R}$,

čo vedie k $R = \frac{3 \cdot \alpha - 2}{10 \cdot (13 \cdot \alpha^2 - 2 \cdot \alpha)}$, pre $\frac{2}{3} < \alpha \leq 1$.

Z Obr. 1. vidíme, že R je rastúcou funkciou α , poisťovateľ by si musel ponechať celé riziko, aby maximalizoval koeficient úpravy R . V tomto prípade náklady na zaistenie prevážia nad znížením vo variabilite poistného plnenia.

4.2 Maximalizácia koeficientu úpravy R pri zaistení škodovej nadmierky

Pri zaistení škodovej nadmierky (XL - excess of loss) s maximálnou úrovňou M na vlastný vrub poisťovateľa sa zaistné poisťovne za jednotku času rovná

$$c_z = (1 + \xi) \cdot \lambda \cdot E(Z), \quad (15)$$

kde ξ je riziková prirážka zaistovateľa a $Z = \max\{0, X - M\}$.

Pre poistné plnenie Y poisťovateľa platí $Y = \min\{X, M\}$.

Čistý príjem poistného priameho poisťovateľa za jednotku času po zaistení je

$$c^* = (1 + \theta) \cdot \lambda \cdot m_1 - (1 + \xi) \cdot \lambda \cdot E(Z). \quad (16)$$

Z týchto predpokladov získame rovnicu definujúcu R v tvare

$$\begin{aligned} \lambda + c^* \cdot R &= \lambda \cdot M_Y(R) \\ \lambda + c^* \cdot R &= \lambda \cdot \left[\int_0^M e^{R \cdot x} \cdot f(x) dx + e^{R \cdot M} \cdot (1 - F(M)) \right]. \end{aligned} \quad (17)$$

Praktická ukážka 2. Nech individuálne poistné plnenie X má rovnomerné rozdelenie na intervale $(0; 20)$, teda $f(x) = 0,05$ pre $0 < x < 20$. Určíme koeficient úpravy R , keď poisťovňa aj zaistovňa používajú rovnakú rizikovú prirážku, t.j. $\theta = \xi = 0,1$.

Zo zadania vyplýva:

$$E(Z) = \int_M^\infty (x - M) \cdot f(x) dx = \int_M^{20} (x - M) \cdot 0,05 dx = 10 - M + 0,025 \cdot M^2,$$

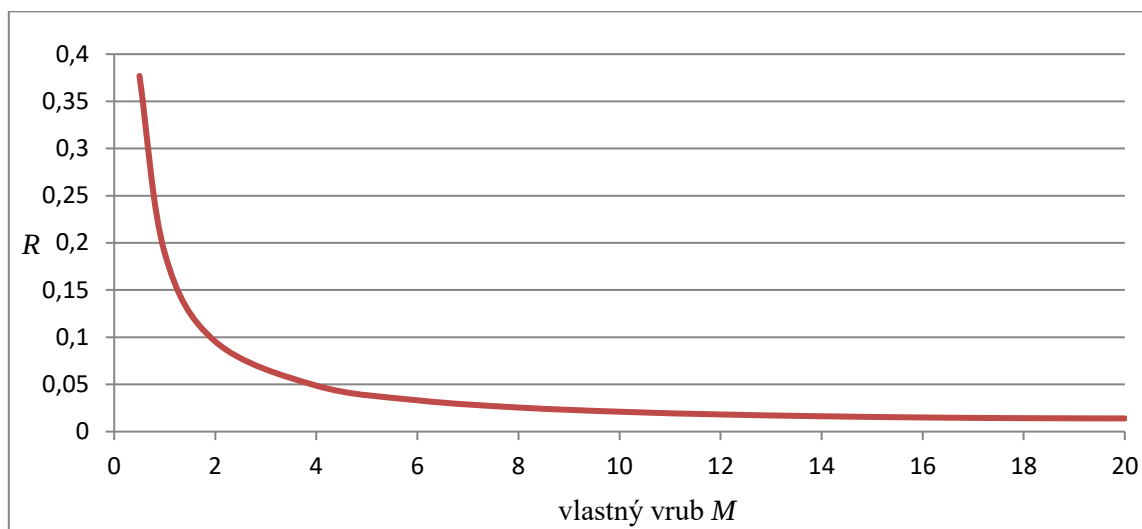
$$\text{a} \quad M_Y(R) = \int_0^M e^{R \cdot x} \cdot 0,05 dx + e^{R \cdot M} (1 - 0,05 \cdot M)$$

$$M_Y(R) = \frac{0,05}{R} \cdot (e^{R \cdot M} - 1) + e^{R \cdot M} \cdot (1 - 0,05 \cdot M).$$

Potom dostaneme rovnicu, ktorá definuje R v tvare

$$\begin{aligned} \lambda + (1,1 \cdot \lambda \cdot M - 1,1 \cdot 0,025 \cdot \lambda \cdot M^2) \cdot R &= \lambda \cdot \left[\frac{0,05}{R} \cdot (e^{R \cdot M} - 1) + e^{R \cdot M} (1 - 0,05 \cdot M) \right] \\ 1 + (1,1 \cdot M - 1,1 \cdot 0,025 \cdot M^2) \cdot R &= \frac{0,05}{R} (e^{R \cdot M} - 1) + e^{R \cdot M} (1 - 0,05 \cdot M). \end{aligned} \quad (18)$$

Rovnicu (18) môžeme spočítať numericky pomocou nástroja „Solver“ programu MS Excel (Brož, 2006). Obr. 2. nám ukazuje koeficient úpravy R ako funkciu M .

Obr. 2: R ako funkcia M , pre $\theta = \xi = 0,1$.

Zdroj: vlastné spracovanie

Vidíme, že každá úroveň M na vlastný vrub je možná, keď sa rizikové prirážky rovnajú. R je klesajúcou funkciou M , a $\lim_{M \rightarrow 0^+} R(M) = +\infty$.

Praktická ukážka 3. Nech platia rovnaké predpoklady ako v predchádzajúcom príklade, iba $\theta < \xi$. Určme koeficient úpravy R , ak

- a) $\theta = 0,1$ a $\xi = 0,15$,
- b) $\theta = 0,1$ a $\xi = 0,30$.

a) Pokiaľ je $\theta = 0,1$ a $\xi = 0,15$, tak $c^* = 1,1 \cdot \lambda \cdot 10 - 1,15 \cdot \lambda \cdot (10 - M + 0,025 \cdot M^2)$ resp. po úprave

$$c^* = -0,5 \cdot \lambda + 1,15 \cdot \lambda \cdot M - M - 1,15 \cdot 0,025 \cdot \lambda \cdot M^2.$$

Táto hodnota musí prevýšiť očakávané plnenie poisťovateľa očistené o zaistenie.

Očakávané plnenie poisťovateľa potom je:

$$\lambda \cdot E(X) - \lambda \cdot E(Z) = \lambda \cdot 10 - \lambda \cdot (10 - M + 0,025 \cdot M^2) = \lambda \cdot (M - 0,025 \cdot M^2).$$

Dostávame nerovnicu $-0,5 + 1,15 \cdot M - 1,15 \cdot 0,025 \cdot M^2 > M - 0,025 \cdot M^2$

alebo po úprave

$$3 \cdot M^2 - 120 \cdot M + 400 < 0. \quad (19)$$

Riešením nerovnice (19) je interval (3,67; 36,33).

To znamená, že minimálna úroveň M na vlastný vrub je 3,67.

Teda rovnako ako pri proporcionálnom zaistení s rôznymi hodnotami θ a ξ , existuje istá minimálna úroveň, ktorú si poisťovateľ musí ponechať.

b) Pokiaľ je $\theta = 0,1$ a $\xi = 0,30$, dostávame nerovnicu $-2 + 1,3 \cdot M - 1,3 \cdot 0,025 \cdot M^2 > M - 0,025 \cdot M^2$ alebo po úprave

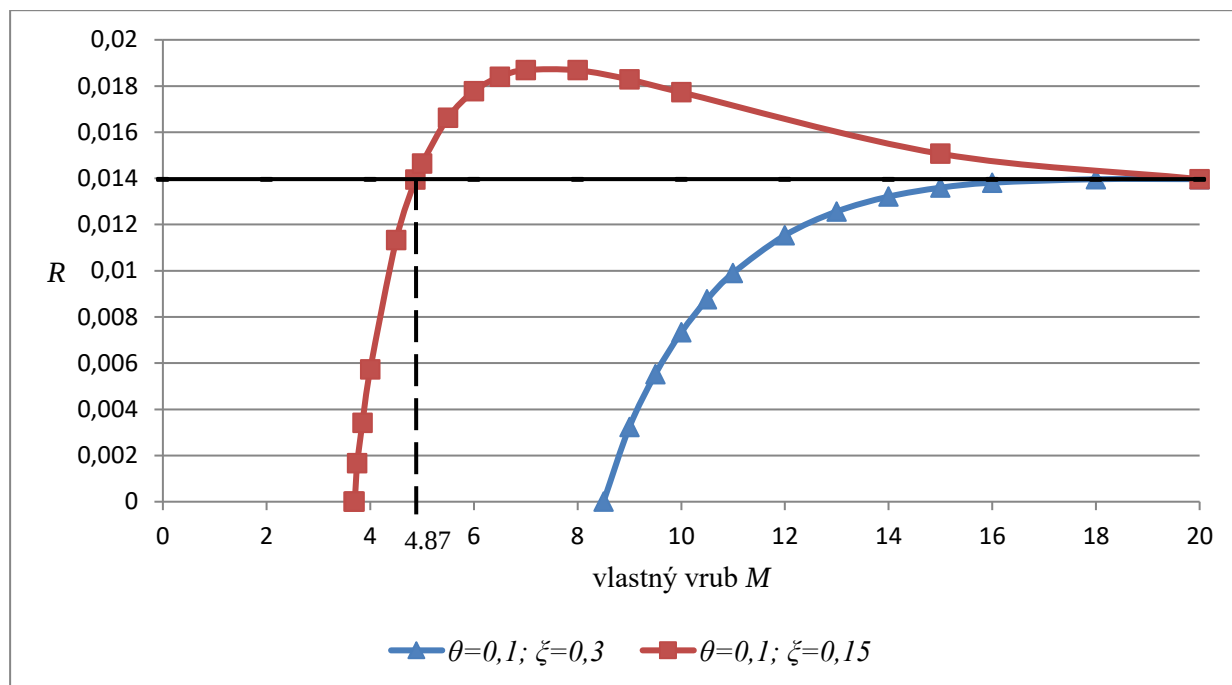
$$3 \cdot M^2 - 120 \cdot M + 800 < 0. \quad (20)$$

Riešením nerovnice (20) je interval (8,45; 31,55).

Teda minimálna úroveň M na vlastný vrub je 8,45.

Na Obr. 3. vidíme koeficient úpravy R ako funkciu úrovne M na vlastný vrub poisťovateľa.

Obr. 3: Koeficient R ako funkcia M .



Zdroj: vlastné spracovanie

V prípade bez zaistenia, teda pre $M = 20$, má koeficient úpravy hodnotu 0,1397 (bez ohľadu na rizikovú prirážku zaist'ovne).

Na Obr. 3 môžeme vidieť, že pre $\zeta = 0,15$ platí $R(M) > R(20)$, ak $4,87 < M < 20$ a $R(M) < R(20)$, ak $3,67 < M < 4,87$.

Pre $\zeta = 0,3$ platí $R(M) < R(20)$ pre všetky prípustné hodnoty M .

Preto, ak $\zeta = 0,15$ a $\theta = 0,1$, priamy poisťovateľ môže zvýšiť hodnotu koeficientu úpravy R efektívnym zaistením tak, že úroveň M na vlastný vrub zvolí vyšší než 4,87.

V prípade, že $\zeta = 0,30$ a $\theta = 0,1$, poisťovateľ by si musel ponechať celé riziko, aby maximalizoval koeficient úpravy R .

Zamyslime sa ešte nad tým, čo ak budeme predpokladať rovnaké podmienky pre oba typy zaistenia, aké sú pravdepodobnosti krachu poisťovateľa?

Aby bolo porovnanie možné, predpokladajme, že očakávané poistné plnenie poisťovateľa pri oboch typoch zaistenia sa rovnajú, t.j.

$$E[\min\{X; M\}] = E[\alpha \cdot X]. \quad (21)$$

Uvažujme poistné plnenie s distribučnou funkciou $F(x) = 1 - e^{-0,1 \cdot x}$, $x > 0$ a rizikovú prirážku poisťovateľa $\theta = 0,1$ a rizikovú prirážku zaist'ovne $\zeta = 0,15$ (rovnako ako v Príklade 1.). Ďalej predpokladajme, že poisťovateľ uzavrel proporcionálne zaistenie s podielom $\alpha = 0,6$ na vlastný vrub.

Potom $E(Y) = E(\alpha X) = \alpha \cdot E(X) = 0,6 \cdot 10 = 6$,

a $c^* = [(1 + \theta) - (1 + \xi) \cdot (1 - \alpha)] \cdot \lambda \cdot m_1 = (1,1 - 1,15 \cdot 0,4) \cdot \lambda \cdot 10 = 6,4 \cdot \lambda$.

Rovnica pre výpočet R má tvar: $\lambda + c^* \cdot R = \lambda \cdot M_Y(R)$,

$$\lambda + 6,4 \cdot \lambda \cdot R = \lambda \cdot \frac{1}{1 - 6 \cdot R}$$

$$R = 0,01042.$$

Uvažujme teraz zaistenie škodovej nadmierky s maximálnou úrovňou M na vlastný vrub poisťovateľa. Hodnota vlastného vrubu M musí byť taká, aby očakávaná hodnota poistného plnenia poisťovateľa po zaistení bola 6 (rovnaká hodnota ako pri proporcionálnom zaistení).

Potom $E(Y) = \int_0^M x \cdot f(x) dx + M \cdot (1 - F(M)) = 6$,

$$10 \cdot (1 - e^{-0,1 \cdot M}) = 6$$

$$e^{-0,1 \cdot M} = 0,4$$

$$M = 9,163.$$

Ak teraz predpokladáme, že $\theta = 0,1$ a $\xi = 0,15$, tak pre rovnicu na výpočet R dostávame:

$$\lambda + c^* \cdot R = \lambda \cdot \left(\int_0^M e^{R \cdot x} \cdot 0,1 \cdot e^{-0,1 \cdot x} dx + e^{R \cdot M} \cdot e^{-0,1 \cdot M} \right)$$

$$\lambda + 6,4 \cdot \lambda \cdot R = \lambda \cdot \left(0,1 \cdot \frac{1 - e^{-(0,1-R) \cdot M}}{0,1 - R} + e^{-(0,1-R) \cdot M} \right)$$

Za M dosadíme hodnotu 9,163 a rovnicu riešime numericky.

Výsledkom je hodnota $R = 0,01635$.

Koeficient úpravy pri zaistení škodovej nadmierky je väčší než pri proporcionálnom zaistení. Teda za inak nemenných podmienok je zaistenie škodovej nadmierky (XL zaistenie) výhodnejšie pre poisťovateľa, pretože dáva menšiu pravdepodobnosť krachu.

5 Záver

V našom príspevku sa zaoberáme vplyvom rizikovej prirážky poisťovateľa a zaistovne na pravdepodobnosť krachu poisťovateľa. Z výsledkov nám vyplýva, že pri určitých hodnotách rizikových prirážok dokážeme maximalizovať koeficient úpravy a tým minimalizovať pravdepodobnosť krachu, pri niektorých, ak je cena zaistenia príliš vysoká, je lepšie si ponechať celé riziko.

Pokiaľ porovnáme proporcionálne zaistenie a zaistenie škodovej nadmierky z pohľadu poisťovateľa je výhodnejšie zaistenie škodovej nadmierky. Do praxe sa tento výsledok môže premietnuť tak, že zaistovňa stanoví vyššiu rizikovú prirážku pre zaistenie škodovej nadmierky než pre proporcionálne zaistenie (za inak nemenných podmienok).

Pri zaistení sa poisťovateľ musí rozhodnúť, či chce maximalizovať zisk, pričom súčasne zvyšuje riziko krachu, alebo minimalizovať riziko.

Poisťovňa musí nájsť kompromis medzi mierou zisku a pravdepodobnosťou krachu.

Literatúra

1. Brož, M. (2006). *Microsoft Excel – Vzorce, funkce, výpočty*, Computer press Praha,, ISBN 9788025110881.
2. Dickson, D. C. M., Waters, H. R. (1993). *Ruin theory*, University of Melbourne and Heriot-Watt University, Edinburgh.
3. Fecenko, J. (2006). *Neživotné poistenie*, Vydavateľstvo EKONÓM, Bratislava, ISBN 80-225-2191-4.
4. Gerber, H. U. (1979). *An Introduction to Mathematical Risk Theory*, Philadelphia, PA, S.S. Huebner Foundation.
5. Horáková, G., Mucha, V. (2006). *Teória rizika v poistení, I. časť*, Bratislava, Vydavateľstvo EKONÓM.
6. Pacáková, V. (2004). *Aplikovaná poistná štatistika*, IURA EDITION, Bratislava, ISBN 80-8078-004-8.