Martin Lukáčik
Patrik Kupkovič
Martin Benkovič

VEKTOROVO AUTOREGRESNÉ MODELY S KOREKČNÝM ČLENOM[1]

Úvod

V článkoch (Lukáčik, 2012a) a (Lukáčik, 2012b) publikovaných v predošlých ročníkoch tohto časopisu sme sa zaoberali vektorovo autoregresnými modelmi (VAR) a ich využitím pri ekonometrickej analýze. Podrobne bola vysvetlená a prezentovaná základná metodológia celého prístupu. Konštatovali sme, že predstavuje jeden zo základných nástrojov prognostikov. Taktiež sme uviedli, že makroekonomickým aplikáciám dominuje analýza šokov realizovaná prostredníctvom štrukturálnych vektorovo autoregresných modelov (SVAR) a prezentovali sme viaceré spôsoby ich identifikácie.

V tomto článku sa budeme zaoberať modelmi, ktoré využívajú kointegráciu nestacionárnych časových radov, teda vektorovými modelmi s korekčným členom (VECM) a tým doplníme uvedený typ vektorovo autoregresných modelov. Okrem teoretického vysvetlenia prezentujeme postup analýzy tohto typu modelu na konkrétnom príklade analýzy štruktúry skúmajúcej parametre produkčných funkcií na Slovensku a v Českej republike.

1 NESTACIONÁRNE ČASOVÉ RADY A KOINTEGRÁCIA

Väčšina ekonomických časových radov má tendenciu rásť s časom. Pri analýze by sme mali byť schopní rozlíšiť, či skúmaný časový rad obsahuje časový trend. Nevšimnúť si, že dva rady majú trend rovnakým smerom, ale inak nie je medzi nimi súvislosť, môže totiž viesť k nesprávnym záverom, že zmeny jednej premennej sú vyvolané zmenami druhej premennej, teda k tzv. nepravej regresii.

Časový trend sa nepoužíva iba v modeloch trendu, ale je významnou premennou aj v regresných modeloch s inými vysvetľujúcimi premennými. Môže zabrániť nepravej regresii takým spôsobom, že ak sme do modelu nezahrnuli významný faktor vplývajúci na závislú premennú, ktorý v sebe obsahuje trend, jeho úlohu prevezme práve trendová premenná. Takisto môže zvýrazniť významnosť kľúčovej vysvetľujúcej premennej, ktorá má opačný trend ako závislá premenná.

[1] Článok vznikol s podporou projektu VEGA 1/0444/15 "Ekonometrická analýza produkčných možností ekonomiky a trhu práce na Slovensku".

Pri analýze, aby sme sa vyhli možnej nepravej regresii, je výhodné používať časové rady, ktoré sú výsledkom stacionárneho procesu. Praktické analýzy však ukazujú, že veľký počet makroekonomických radov je nestacionárnych, čo znamená, že nepravé regresie môžu predstavovať častý jav pri modelovaní.

Problém nestacionarity premenných sa môže riešiť tak, že pri regresii sa využijú zodpovedajúce diferencie premenných. Takýto postup by ekonometriu ochudobnil o analýzu mnohých ekonomických teórií, ktoré nepredpokladajú vzťahy medzi prírastkami či tempami prírastkov, ale priamo medzi úrovňami premenných.

Engle a Granger (1987) považujú dva nestacionárne rady y_t a x_t za kointegrované rádu (d,b), pričom $d \geq b \geq 0$, ak oba rady sú integrované rádu d a existuje nenulová lineárna kombinácia týchto radov, ktorá je integrovaná rádu $(d-b)$. Matematicky, so symbolom *CI* pre kointegráciu, sa to dá zapísať:

$$\text{nech } y_t \sim I(d) \wedge x_t \sim I(d), \text{ potom ak } \exists(\beta_1 y_t + \beta_2 x_t) \sim I(d-b) \Rightarrow y_t, x_t, \sim CI(d,b)$$

Predmetom záujmu je taký prípad kointegrácie, kde $d = b$, čo znamená stacionaritu lineárnej kombinácie $\beta_1 y_t + \beta_2 x_t$. Vektor koeficientov uvedenej lineárnej kombinácie radov $[\beta_1\ \beta_2]$ sa nazýva *kointegrujúci vektor*. Pretože každý jeho skalárny násobok je tiež kointegrujúcim vektorom, tak sa zvyčajne prvý z koeficientov tohto vektora normalizuje $[1\ \beta_2/\beta_1]$, lebo v takom prípade je normalizovaný vektor jeho jednoznačným vyjadrením.

Z Grangerovej vety vyplýva dôležitá vlastnosť. Ak sú dva nestacionárne rady y_t a x_t integrované rádu 1 a existuje ich stacionárna kombinácia, tak sú kointegrované aj rady y_t a x_{t+j} pre ľubovoľné j. Kointegrácia medzi dvoma radmi predstavuje spôsob, ako sa dá medzi nimi vyjadriť dlhodobá rovnováha. Zapíšme autoregresný model prvého rádu:

$$y_t = \beta_0 + \gamma_1 y_{t-1} + \delta_0 x_t + \delta_1 x_{t-1} + u_t, \quad u_t \sim \text{NID}(0,\sigma^2)$$

Vieme, že krátkodobý multiplikátor okamžitej reakcie na zmenu premennej x je parameter δ_0, ale dlhodobý multiplikátor predstavujúci celkovú reakciu za všetky obdobia sa rovná $(\delta_0 + \delta_1)/(1 - \gamma_1)$, preto postupnými úpravami:

$$\begin{aligned} y_t - y_{t-1} + y_{t-1} &= \beta_0 + \delta_0 x_t - \delta_0 x_{t-1} + \delta_0 x_{t-1} + \delta_1 x_{t-1} + \gamma_1 y_{t-1} + u_t \\ \Delta y_t + y_{t-1} &= \beta_0 + \delta_0 \Delta x_t + \delta_0 x_{t-1} + \delta_1 x_{t-1} + \gamma_1 y_{t-1} + u_t \\ \Delta y_t &= \beta_0 + \delta_0 \Delta x_t + (\delta_0 + \delta_1) x_{t-1} + (\gamma_1 - 1) y_{t-1} + u_t \end{aligned}$$

dostaneme model s korekčným členom (ECM):

$$\Delta y_t = \beta_0 + \delta_0 \Delta x_t + (\gamma_1 - 1)\left(y_{t-1} - \frac{\delta_0 + \delta_1}{1-\gamma_1} x_{t-1} \right) + u_t \qquad (1)$$

Model (1) tvorí člen $\Delta y_t = \beta_0 + \delta_0 \Delta x_t + u_t$ a člen $(\gamma_1 - 1)(y_{t-1} - \theta x_{t-1})$, ktorý je korekciou odklonu od dlhodobej rovnováhy (reziduál dlhodobého vzťahu e_{t-1}). Dôvodom prečo sa nazýva model s korekčným členom je to, že druhý člen v zátvorke, označme ho y^*, predstavuje dlhodobú rovnovážnu hodnotu premennej y. Ak je $(1 - \gamma_1) < 0$, tak y v prípade $y < y^*$ rastie a naopak y v prípade $y > y^*$ klesá k svojej rovnovážnej hodnote. Rozdiel medzi skutočnou hodnotou y a dlhodobou rovnováhou y^* je stacionárny.

Stock a Watson (1988) si všimli, že kointegrované premenné zdieľajú spoločný stochastický trend. Stock (1987) takisto dokázal, že odhad kointegrujúcich vektorov obyčajnou metódou najmenších štvorcov (*MNŠ*) je „superkonzistentný“. Kointegrujúce vektory sa dajú odhadovať *MN*Š aj v prípade, keď premenné pravej strany sú korelované s vektorom náhodných zložiek a odhady dokonca konvergujú rýchlejšie ako v štandardnom prípade. Táto logika je využitá v dvojkrokovom postupe odhadu modelu s korekčným členom v procedúre Engla a Grangera (Lukáčik a Lukáčiková, 2013).

Celú úvahu možno zovšeobecniť aj pre prípad n premenných. Engle a Granger považujú k nestacionárnych radov $x_{t1}, x_{t2}, ..., x_{tk}$ za kointegrované rádu (d,b), pričom $d \geq b \geq 0$, ak sú rady integrované rádu d a existuje nenulová lineárna kombinácia týchto radov, ktorá je integrovaná rádu $(d-b)$. Matematicky sa to dá zapísať:

$$\text{nech } x_{t1} \sim I(d),\ x_{t2} \sim I(d),\ ...,\ x_{tk} \sim I(d),$$
$$\text{potom ak } \exists(\beta_1 x_{t1} + \beta_2 x_{t2} + \ldots + \beta_k x_{tk}) \sim I(d-b), \text{ tak } x_{t1}, x_{t2}, ..., x_{tk} \sim CI(d,b)$$

Rozdiel predstavuje kointegrujúci vektor $\boldsymbol{\beta}$, lebo v prípade viacerých premenných nie je jednoznačný. Pre k premenných totiž môže existovať až $(k - 1)$ lineárne nezávislých kointegrujúcich vektorov. Počet lineárne nezávislých kointegrujúcich vektorov sa nazýva hodnosťou kointegrácie.

2 KOINTEGRÁCIA A JOHANSENOVA PROCEDÚRA

Uvažujme vektorovo autoregresný model n premenných $\mathbf{y_1}$ až $\mathbf{y_n}$ rádu p s deterministickými členmi (konštanta, trend, ...) tvoriacimi maticu $\mathbf{D_t}$ zapísaný v čase t:

$$\mathbf{y_t} = \mathbf{\Phi D_t} + \mathbf{\Pi_1 y_{t-1}} + \mathbf{\Pi_2 y_{t-2}} + \ldots + \mathbf{\Pi_{p-1} y_{t-p+1}} + \mathbf{\Pi_p y_{t-p}} + \mathbf{v_t} \tag{2}$$

Odčítajme a pričítajme k pravej strane *VAR* modelu (2) vektor $\mathbf{\Pi_p y_{t-p+1}}$:

$$\mathbf{y_t} = \mathbf{\Phi D_t} + \mathbf{\Pi_1 y_{t-1}} + \mathbf{\Pi_2 y_{t-2}} + \ldots + \left(\mathbf{\Pi_{p-1}} + \mathbf{\Pi_p}\right)\mathbf{y_{t-p+1}} - \mathbf{\Pi_p} \Delta \mathbf{y_{t-p+1}} + \mathbf{v_t}$$

Odčítajme a pričítajme k pravej strane *VAR* modelu (2) vektor $(\mathbf{\Pi_{p-1}} + \mathbf{\Pi_p})\mathbf{y_{t-p+2}}$:

$$\mathbf{y_t} = \mathbf{\Phi D_t} + \mathbf{\Pi_1 y_{t-1}} + \ldots + \left(\mathbf{\Pi_{p-2}} + \mathbf{\Pi_{p-1}} + \mathbf{\Pi_p}\right)\mathbf{y_{t-p+2}} - \left(\mathbf{\Pi_{p-1}} + \mathbf{\Pi_p}\right)\Delta \mathbf{y_{t-p+2}} - \mathbf{\Pi_p} \Delta \mathbf{y_{t-p+1}} + \mathbf{v_t}$$

Postupujme rovnakým spôsobom až k $\mathbf{y}_{t-1}$ a nakoniec odčítajme od oboch strán *VAR* modelu $\mathbf{y}_{t-1}$ a dostaneme *vektorový model s korekčným členom*:

$$\Delta\mathbf{y}_{\mathbf{t}} = \mathbf{\Phi D}_{\mathbf{t}} + \mathbf{\Omega y}_{\mathbf{t-1}} + \mathbf{\Phi}_{1}\Delta\mathbf{y}_{\mathbf{t-1}} + \ldots + \mathbf{\Phi}_{\mathbf{p-2}}\Delta\mathbf{y}_{\mathbf{t-p+2}} + \mathbf{\Phi}_{\mathbf{p-1}}\Delta\mathbf{y}_{\mathbf{t-p+1}} + \mathbf{v}_{\mathbf{t}}, \quad \mathbf{v}_{\mathbf{t}} \sim N\left(\mathbf{0}, \mathbf{\Sigma}_{v}\right) \qquad (3)$$

pričom platí:

$$\mathbf{\Omega} = -\left(\mathbf{I} - \mathbf{\Pi}_{1} - \mathbf{\Pi}_{2} - \ldots - \mathbf{\Pi}_{\mathbf{p}}\right) \text{ a } \mathbf{\Phi}_{j} = -\sum_{i=j+1}^{p} \mathbf{\Pi}_{i} \text{ pre } j = 1, 2, \ldots, p-1$$

Ak sú všetky prvky $\mathbf{y}_t$ integrované rádu 1, potom sú všetky $\Delta\mathbf{y}_{t-j}$ stacionárne. Ak sú prvky $\mathbf{y}_t$ kointegrované, tak $\mathbf{\Omega y}_{t-1}$ je stacionárne a model (3) sa dá konzistentne odhadnúť.

Dlhodobé vlastnosti systému charakterizujú vlastnosti matice $\mathbf{\Omega}$.

- Ak sa hodnosť matice $\mathbf{\Omega}$ rovná nula, potom všetky prvky tejto matice sú nulové. V systéme (3) neexistuje korekčný mechanizmus $\mathbf{\Omega y}_{t-1}$ a ani dlhodobý vzťah. Premenné nie sú kointegrované a odhadovaný *VAR* model by mal byť formulovaný pomocou prvých diferencií, ako:

$$\Delta\mathbf{y}_{\mathbf{t}} = \mathbf{\Phi D}_{\mathbf{t}} + \mathbf{\Pi}_{1}\Delta\mathbf{y}_{\mathbf{t-1}} + \mathbf{\Pi}_{2}\Delta\mathbf{y}_{\mathbf{t-2}} + \ldots + \mathbf{\Pi}_{\mathbf{p}}\Delta\mathbf{y}_{\mathbf{t-p}} + \mathbf{v}_{\mathbf{t}}, \quad \mathbf{v}_{\mathbf{t}} \sim N\left(\mathbf{0}, \mathbf{\Sigma}_{v}\right) \qquad (4)$$

resp. ako model (3) bez člena $\mathbf{\Omega y}_{t-1}$.

- Ak sa hodnosť matice $\mathbf{\Omega}$ rovná *n* (plná hodnosť), všetky jej riadky sú lineárne nezávislé a vektorový proces $\mathbf{y}_t$ je stacionárny, lebo všetky premenné musia byť integrované rádu 0. Odhadovaný *VAR* model by mal byť formulovaný v pôvodných úrovniach premenných, ako:

$$\mathbf{y}_{\mathbf{t}} = \mathbf{\Phi D}_{\mathbf{t}} + \mathbf{\Pi}_{1}\mathbf{y}_{\mathbf{t-1}} + \mathbf{\Pi}_{2}\mathbf{y}_{\mathbf{t-2}} + \ldots + \mathbf{\Pi}_{\mathbf{p}}\mathbf{y}_{\mathbf{t-p}} + \mathbf{v}_{\mathbf{t}}, \quad \mathbf{v}_{\mathbf{t}} \sim N\left(\mathbf{0}, \mathbf{\Sigma}_{v}\right) \qquad (5)$$

- Ak sa hodnosť matice $\mathbf{\Omega}$ rovná *k*, pričom $0 < k < n$, potom jej riadky nie sú lineárne nezávislé a maticu $\mathbf{\Omega}$ môžeme rozpísať v tvare $\mathbf{\Omega} = \boldsymbol{\alpha\beta}^T$ ako súčin kointegrujúcej matice $\boldsymbol{\beta}$, ktorej stĺpce zodpovedajú vektorom kointegrácie a matice prispôsobenia $\boldsymbol{\alpha}$. Ak je $\mathbf{y_t} \sim I(1)$, tak $\boldsymbol{\beta}^T\mathbf{y_t} \sim I(0)$ a hodnosť matice $\mathbf{\Omega}$ je určená počtom kointegrujúcich vektorov, preto sa nazýva hodnosť kointegrácie. Odhadovaný *VAR* model by mal byť formulovaný ako vektorový model s korekčným členom, teda model (3):

$$\Delta\mathbf{y}_{\mathbf{t}} = \mathbf{\Phi D}_{\mathbf{t}} + \boldsymbol{\alpha\beta}^{T}\mathbf{y}_{\mathbf{t-1}} + \mathbf{\Phi}_{1}\Delta\mathbf{y}_{\mathbf{t-1}} + \ldots + \mathbf{\Phi}_{\mathbf{p-1}}\Delta\mathbf{y}_{\mathbf{t-p+1}} + \mathbf{v}_{\mathbf{t}}, \quad \mathbf{v}_{\mathbf{t}} \sim N\left(\mathbf{0}, \mathbf{\Sigma}_{v}\right) \qquad (6)$$

Problémom identifikácie v tomto type modelov je, že matice $\boldsymbol{\alpha}$ a $\boldsymbol{\beta}$ nie sú jedinečné. Existuje viacero súčinov matíc, ktoré spĺňajú kointegrujúci vzťah. Parametre kointegrujúcich vzťahov nie sú bez ďalších podmienok konzistentné, lebo pomocou jednoduchej transformácie: $\boldsymbol{\alpha}^* = \boldsymbol{\alpha}\mathbf{K}^{-1}$ a $\boldsymbol{\beta}^{T*} = \mathbf{K}\boldsymbol{\beta}^T$ získame:

$$\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\alpha}\mathbf{K}^{-1}\mathbf{K}\boldsymbol{\beta}^T = \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^T$$

Identifikujúce ohraničenia môžeme zaviesť buď normalizáciou, ako je to obvyklé v softvéri, že prvú časť $\boldsymbol{\beta}^T$ tvorí zodpovedajúca jednotková matica, teda $\boldsymbol{\beta}^T = [\mathbf{I}_k\ \boldsymbol{\beta}^T_{((n-k)\times k)}]$, alebo pomocou ohraničení vyplývajúcich z teórie.

Johansen (1988) odvodil prezentované závery o hodnosti matice $\boldsymbol{\Omega}$, navrhol zároveň procedúru na zisťovanie počtu kointegrujúcich vektorov. Tá je založená na tom, že hodnosť matice sa rovná počtu jej nenulových charakteristických koreňov. Procedúra odhadu postupuje takto:

- Pomocou informačných kritérií, prípadne na základe ďalších testov, určíme rád p vektorovo autoregresného modelu formulovaného v pôvodných úrovniach.
- Odhadneme model, kde $\Delta\mathbf{y_t}$ závisí od $\Delta\mathbf{y_{t-1}}, \Delta\mathbf{y_{t-2}}, ..., \Delta\mathbf{y_{t-p+1}}$ a skonštruujeme n-rozmerný vektor $\mathbf{R}_{0t}$ reziduálov:

$$\Delta\mathbf{y_t} = \mathbf{G_1}\Delta\mathbf{y_{t-1}} + \mathbf{G_2}\Delta\mathbf{y_{t-2}} + \ldots + \mathbf{G_{p-2}}\Delta\mathbf{y_{t-p+2}} + \mathbf{G_{p-1}}\Delta\mathbf{y_{t-p+1}} + \mathbf{v_t}$$

- Následne odhadneme model, kde $\mathbf{y_t}$ závisí od $\Delta\mathbf{y_{t-1}}, \Delta\mathbf{y_{t-2}}, ..., \Delta\mathbf{y_{t-p+1}}$ a skonštruujeme n-rozmerný vektor $\mathbf{R}_{1t}$ reziduálov:

$$\mathbf{y_t} = \mathbf{H_1}\Delta\mathbf{y_{t-1}} + \mathbf{H_2}\Delta\mathbf{y_{t-2}} + \ldots + \mathbf{H_{p-2}}\Delta\mathbf{y_{t-p+2}} + \mathbf{H_{p-1}}\Delta\mathbf{y_{t-p+1}} + \mathbf{w_t}$$

- Pôvodný model (6) je „očistený“ o vplyv deterministických zložiek a model je zredukovaný na tvar:

$$\mathbf{R_{0t}} = \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^T\mathbf{R_{1t}} + \mathbf{e_t}$$

- Vypočítame štyri matice súčtov štvorcov a súčtov súčinov reziduálov:

$$\mathbf{S_{00}} = T^{-1}\sum_{t=1}^{T}\mathbf{R_{0t}}\mathbf{R_{0t}},\ \ \mathbf{S_{01}} = T^{-1}\sum_{t=1}^{T}\mathbf{R_{0t}}\mathbf{R_{1t}},\ \ \mathbf{S_{10}} = T^{-1}\sum_{t=1}^{T}\mathbf{R_{1t}}\mathbf{R_{0t}},$$
$$\mathbf{S_{11}} = T^{-1}\sum_{t=1}^{T}\mathbf{R_{1t}}\mathbf{R_{1t}}$$

- Procedúra je maximalizácia vierohodnostnej funkcie najskôr vzhľadom na $\boldsymbol{\alpha}$ pri konštantnom $\boldsymbol{\beta}$ a potom vzhľadom na $\boldsymbol{\beta}$. Pre $\boldsymbol{\alpha}$ platí:

$$\boldsymbol{\alpha}^T = \left(\boldsymbol{\beta}^T\mathbf{S_{11}}\boldsymbol{\beta}\right)\boldsymbol{\beta}^T\mathbf{S_{10}}$$

- Podmienené maximum vierohodnostnej funkcie vzhľadom na **β** je:

$$L(\boldsymbol{\beta})^{-2/T} = \left|\mathbf{S_{00}} - \mathbf{S_{01}}\boldsymbol{\beta}\left(\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\mathbf{S_{11}}\boldsymbol{\beta}\right)^{-1}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\mathbf{S_{10}}\right|$$

Maximalizácia vierohodnosti vzhľadom na **β** znamená minimalizáciu tohto determinantu a je ekvivalentná hľadaniu charakteristických hodnôt $\hat{\lambda}_i$ rovnice:

$$\left|\lambda\mathbf{S_{11}} - \mathbf{S_{10}}\mathbf{S_{00}^{-1}}\mathbf{S_{01}}\right| = 0$$

Koreňmi tejto rovnice je k kanonických korelácií medzi $\mathbf{R}_{0t}$ a $\mathbf{R}_{1t}$.

Pre n premenných môže existovať maximálne n charakteristických hodnôt. Ich zoradením získame klesajúcu postupnosť $\hat{\lambda}_1 > \hat{\lambda}_2 > \ldots > \hat{\lambda}_n$, ktorej zodpovedajú charakteristické vektory $v_1, v_2, \ldots, v_n$. Ak premenné nie sú kointegrované, hodnosť matice **Ω** sa rovná 0 a všetky charakteristické korene sú nulové. Výraz $\ln(1 - \lambda_i)$ bude pre všetky korene nulový. Ak sa hodnosť matice **Ω** rovná 1, jeden charakteristický koreň bude $0 < \lambda_1 < 1$, jemu zodpovedajúci $\ln(1 - \lambda_1)$ bude záporný a ostatné korene budú nulové.

Maximum vierohodnostnej funkcie má (za predpokladu normálneho rozdelenia náhodných zložiek) tvar:

$$L(\boldsymbol{\beta})_{\max}^{-2/T} = \left|\mathbf{S_{00}}\right|\prod_{j=1}^{k}\left(1-\hat{\lambda}_j\right)$$

Na testovanie Johansen (1991) navrhol dve základné štatistiky koeficientov vierohodnosti.

Prvou štatistikou je test stopy (test lambda trace):

$$\lambda_{trace}(k) = -T\sum_{j=k+1}^{n}\ln\left(1-\hat{\lambda}_j\right)$$

kde $\hat{\lambda}_j$ predstavuje odhadnuté charakteristické korene, T reprezentuje počet pozorovaní a preverujeme sekvenciu hypotéz:

H_0: $k = 0$ oproti H_1: $k \geq 1$, ak $\lambda_{trace}(k)$ je väčšia ako kritická hodnota, následne
H_0: $k \leq 1$ oproti H_1: $k \geq 2$, ak $\lambda_{trace}(k)$ je väčšia ako kritická hodnota, až po
H_0: $k \leq n - 1$ oproti H_1: $k = n$, ak $\lambda_{trace}(k)$ je väčšia ako kritická hodnota.

Druhou štatistikou je test maxima (test lambda max):

$$\lambda_{\max}\left(k \mid k+1\right) = -T\ln\left(1-\hat{\lambda}_{k+1}\right)$$

v ktorej preverujeme sekvenciu hypotéz:

H_0: $k = 0$ oproti H_1: $k = 1$, ak $\lambda_{max}(k)$ je väčšia ako kritická hodnota, následne
H_0: $k \leq 1$ oproti H_1: $k = 2$, ak $\lambda_{max}(k)$ je väčšia ako kritická hodnota, až po
H_0: $k \leq n - 1$oproti H_1: $k = n$, ak $\lambda_{max}(k)$ je väčšia ako kritická hodnota.

V oboch testoch sa testovanie končí prvou nezamietnutou nulovou hypotézou. Zodpovedajúca hodnota *k* z nulovej hypotézy predstavuje počet kointegrujúcich vektorov. V prípade, ak testy poskytujú rozdielne závery, preferuje sa výsledok testu stopy.

Kritické hodnoty testov však závisia aj od špecifikácie deterministických zložiek modelu, ktoré tvoria maticu $\mathbf{D_t}$.

Ak sú deterministické zložky modelu (3), ktoré tvoria maticu $\mathbf{D_t}$ neohraničené:

$$\mathbf{\Phi D_t} = \boldsymbol{\mu}_\mathbf{0} + \boldsymbol{\mu}_\mathbf{1}\mathbf{t}$$

časový rad $\mathbf{y_t}$ môže mať kvadratický trend a kointegrujúci vektor lineárny trend.

$$\Delta\mathbf{y_t} = \boldsymbol{\mu}_\mathbf{0} + \boldsymbol{\mu}_1\mathbf{t} + \boldsymbol{\alpha\beta}^T\mathbf{y_{t-1}} + \mathbf{\Phi_1}\Delta\mathbf{y_{t-1}} + \ldots + \mathbf{\Phi_{p-2}}\Delta\mathbf{y_{t-p+2}} + \mathbf{\Phi_{p-1}}\Delta\mathbf{y_{t-p+1}} + \mathbf{v_t}$$

Ohraničením parametrov $\boldsymbol{\mu}_\mathbf{0}$ a $\boldsymbol{\mu}_\mathbf{1}$ obmedzíme trend podľa požiadaviek. Rozlišujeme päť rôznych prípadov:

1. $\mathbf{\Phi D_t} = \mathbf{0}$, čo znamená neprítomnosť konštanty a model má tvar:

$$\Delta\mathbf{y_t} = \boldsymbol{\alpha\beta}^T\mathbf{y_{t-1}} + \mathbf{\Phi_1}\Delta\mathbf{y_{t-1}} + \ldots + \mathbf{\Phi_{p-2}}\Delta\mathbf{y_{t-p+2}} + \mathbf{\Phi_{p-1}}\Delta\mathbf{y_{t-p+1}} + \mathbf{v_t} \tag{7}$$

Rady tvoriace vektor $\Delta\mathbf{y}$ neobsahujú konštantu ani lineárny trend a rovnako tak kointegrujúci vzťah $\boldsymbol{\beta}^T\mathbf{y_t}$ má nulový priemer.

2. $\mathbf{\Phi D_t} = \boldsymbol{\mu}_\mathbf{0} = \boldsymbol{\alpha\rho}_\mathbf{0}$, čo znamená ohraničenú konštantu a model má tvar:

$$\Delta\mathbf{y_t} = \boldsymbol{\alpha}\left(\boldsymbol{\beta}^T\mathbf{y_{t-1}} + \boldsymbol{\rho}_\mathbf{0}\right) + \mathbf{\Phi_1}\Delta\mathbf{y_{t-1}} + \ldots + \mathbf{\Phi_{p-2}}\Delta\mathbf{y_{t-p+2}} + \mathbf{\Phi_{p-1}}\Delta\mathbf{y_{t-p+1}} + \mathbf{v_t} \tag{8}$$

Rady tvoriace vektor $\Delta\mathbf{y}$ neobsahujú konštantu ani trend, ale kointegrujúci vzťah $\boldsymbol{\beta}^T\mathbf{y_t}$ má nenulový priemer.

3. $\mathbf{\Phi D_t} = \boldsymbol{\mu}_\mathbf{0}$, čo znamená neohraničenú konštantu a model má tvar:

$$\Delta\mathbf{y_t} = \boldsymbol{\mu}_\mathbf{0} + \boldsymbol{\alpha\beta}^T\mathbf{y_{t-1}} + \mathbf{\Phi_1}\Delta\mathbf{y_{t-1}} + \ldots + \mathbf{\Phi_{p-2}}\Delta\mathbf{y_{t-p+2}} + \mathbf{\Phi_{p-1}}\Delta\mathbf{y_{t-p+1}} + \mathbf{v_t} \tag{9}$$

Rady tvoriace vektor $\Delta\mathbf{y}$ obsahujú konštantu ale nemajú lineárny trend (rad $\mathbf{y}$ bude mať lineárny trend) a kointegrujúci vzťah $\boldsymbol{\beta}^T\mathbf{y_t}$ má nenulový priemer.

4. $\boldsymbol{\Phi}\mathbf{D_t} = \boldsymbol{\mu_0} + \boldsymbol{\alpha\rho_1}\mathbf{t}$, čo znamená neohraničenú konštantu a ohraničený trend:

$$\Delta\mathbf{y_t} = \boldsymbol{\mu_0} + \boldsymbol{\alpha}\left(\boldsymbol{\beta}^T\mathbf{y_{t-1}} + \boldsymbol{\rho}_1\mathbf{t}\right) + \boldsymbol{\Phi}_1\Delta\mathbf{y_{t-1}} + \ldots + \boldsymbol{\Phi}_{\mathbf{p-2}}\Delta\mathbf{y_{t-p+2}} + \boldsymbol{\Phi}_{\mathbf{p-1}}\Delta\mathbf{y_{t-p+1}} + \mathbf{v_t} \tag{10}$$

Rady tvoriace vektor $\Delta\mathbf{y}$ obsahujú konštantu, no nemajú lineárny trend, ale kointegrujúci vzťah $\boldsymbol{\beta}^T\mathbf{y_t}$ má nenulový priemer a obsahuje aj lineárny trend.

5. $\boldsymbol{\Phi}\mathbf{D_t} = \boldsymbol{\mu_0} + \boldsymbol{\mu_1}\mathbf{t}$, čo znamená neohraničenú konštantu aj trend:

$$\Delta\mathbf{y_t} = \boldsymbol{\mu_0} + \boldsymbol{\mu}_1\mathbf{t} + \boldsymbol{\alpha\beta}^T\mathbf{y_{t-1}} + \boldsymbol{\Phi}_1\Delta\mathbf{y_{t-1}} + \ldots + \boldsymbol{\Phi}_{\mathbf{p-2}}\Delta\mathbf{y_{t-p+2}} + \boldsymbol{\Phi}_{\mathbf{p-1}}\Delta\mathbf{y_{t-p+1}} + \mathbf{v_t} \tag{11}$$

Rady $\Delta\mathbf{y}$ obsahujú lineárny trend, čo znamená kvadratický trend $\mathbf{y}$ a rovnako tak kointegrujúci vzťah $\boldsymbol{\beta}^T\mathbf{y_t}$ obsahuje aj lineárny trend.

3 APLIKÁCIA VEKTOROVÉHO MODELU S KOREKČNÝM ČLENOM

V tejto časti si ukážeme postup využívajúci vektorový model s korekčným členom (VEC model). Prezentovanou aplikáciou je testovanie parametrov v rámci odhadu parametrov produkčnej funkcie navrhnuté Szomolányim a spoluautormi (2013), v ktorej podrobne rozoberieme túto štrukturálnu analýzu pre Slovensko a Českú republiku.

Szomolányi so spoluautormi vychádzajú pri odhade parametrov produkčnej funkcie z úlohy firmy, ktorá si vyberá množstvo kapitálu a práce (označíme ich *K* a *N*), aby maximalizovala svoj zisk. Podmienkou prvého rádu pre prácu je, že sa mzda *w* rovná marginálnemu produktu práce *MPN*:

$$w_t = MPN_t \tag{12}$$

Szomolányi so spoluautormi uvažujú CES produkčnú funkciu v tvare:

$$Y_t = A_t\left[\alpha\left(\kappa K_t\right)^\gamma + \left(1-\alpha\right)\left(\nu N_t\right)^\gamma\right]^{\frac{1}{\gamma}} \tag{13}$$

ktorej vstupmi sú kapitál a práca a v ktorej A_t je parameter celkovej produktivity faktorov. Parameter γ popisuje faktor substitúcie, lebo ak sa $\gamma = 1$, produkčná funkcia je lineárna a vstupy sa dajú dokonale substituovať. Ak sa $\gamma = -\infty$, vstupy sa nedajú substituovať a ak sa $\gamma = 0$, produkčná funkcia je Cobbova-Douglasova. Parameter distribúcie α je z intervalu od 0 po 1 a určuje rozdelenie produkcie na podiely faktorov. Parametre κ a ν závisia od jednotiek, v ktorých sú produkcia a vstupy merané, a nehrajú žiadnu významnú úlohu.

Autori predpokladajú, že parameter produktivity rastie konštantnou mierou g:

$$A_t = A_0 e^{gt} \tag{14}$$

Marginálny produkt práce vyjadrený z CES produkčnej funkcie (13) má tvar:

$$MPN_t = A_t \left[\alpha \left(\kappa K_t \right)^{\gamma} + \left(1-\alpha\right)\left(\nu N_t\right)^{\gamma} \right]^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} \left(1-\alpha\right) \nu^{\gamma} N_t^{\gamma-1}$$

a po zlogaritmovaní ho môžeme zapísať takto:

$$\ln\left(MPN_t\right) = \ln\left(A_t\right) + \frac{1-\gamma}{\gamma} \ln\left(\alpha\left(\kappa K_t\right)^{\gamma} + \left(1-\alpha\right)\left(\nu N_t\right)^{\gamma}\right) + \ln\left(1-\alpha\right) + \gamma \ln\left(\nu\right) + \left(\gamma-1\right)\ln\left(N_t\right) \tag{15}$$

Priemerný produkt práce vyjadrený z CES produkčnej funkcie (13) má tvar:

$$APN_t = \frac{A_t \left[\alpha \left(\kappa K_t \right)^{\gamma} + \left(1-\alpha\right)\left(\nu N_t\right)^{\gamma} \right]^{\frac{1}{\gamma}}}{N_t}$$

a po zlogaritmovaní ho môžeme zapísať takto:

$$\ln\left(APN_t\right) = \ln\left(A_t\right) + \frac{1}{\gamma} \ln\left(\alpha\left(\kappa K_t\right)^{\gamma} + \left(1-\alpha\right)\left(\nu N_t\right)^{\gamma}\right) - \ln\left(N_t\right) \tag{16}$$

Spojením vzťahov (15) a (16) získame vzťah medzi logaritmami marginálneho a priemerného produktu práce:

$$\ln\left(MPN_t\right) = \ln\left(1-\alpha\right) + \gamma \ln\left(\nu\right) + \gamma \ln\left(A_t\right) + \left(1-\gamma\right)\ln\left(APN_t\right) \tag{17}$$

v ktorom nahradením *MPN* podľa (12) a dosadením (14) za A_t získame špecifikáciu:

$$\ln\left(w_t\right) = \beta_0 + \beta_1 \ln\left(APN_t\right) + \beta_2 t + u_t \tag{18}$$

Stochastický člen u_t spĺňa klasické predpoklady regresného modelu a obsiahne dopytové, monetárne aj reálne šoky. Jednotlivé parametre špecifikácie (18) reprezentujú:

$$\beta_0 = \ln\left(1-\alpha\right) + \gamma \ln\left(\nu\right) + \gamma \ln\left(A_0\right)$$
$$\beta_1 = 1-\gamma$$
$$\beta_2 = \gamma g$$

Logaritmická špecifikácia (18) je žiaľ preidentifikovaná, no napriek tomu poskytuje niekoľko dôležitých informácií o produkčnej funkcii. Z parametra β_1 vieme vypočítať elasticitu substitúcie vstupov a určiť typ produkčnej funkcie, ktorý jej zodpovedá. Zároveň z parametrov β_1 a β_2 vieme vypočítať priemernú mieru rastu produktivity g.

Keďže počiatočná podmienka (12) platí v nominálnych aj reálnych jednotkách, môžeme analýzu realizovať v nominálnych aj reálnych jednotkách. Použité premenné HDP merané v bežných cenách a kompenzácie zamestnancov sú nominálne, prevzaté z portálu Eurostat (z jedného zdroja kvôli porovnateľnosti výsledkov oboch krajín) a boli sezónne očistené štandardnou procedúrou Tramo/Seats.

Prvým krokom celej analýzy je overenie stacionarity časových radov a v prípade nestacionarity zistenie rádu ich integrácie. Špecifikácia (18) využíva len dve premenné HDP a kompenzácie zamestnancov. Na testovanie sme využili rozšírený Dickeyho-Fullerov test a výsledky potvrdili integráciu rádu 1 pre všetky rady použité pri analýze.

Na testovanie kointegrácie sme aplikovali vysvetľovanú Johansenovu procedúru so štatistikami lambda trace a lambda max. Dôvodom jej použitia je možnosť testovať parametre dlhodobého vzťahu. Kointegračnej špecifikácii (18) zodpovedá štvrtá schéma deterministických zložiek (10). Kvôli možnosti testovať významnosť parametra β_2 pri trende pomocou štatistiky koeficientu vierohodnosti (ktorá vyžaduje odhad modelu s aplikovanou hypotézou aj bez nej) sme odhadovali aj tretiu schému deterministických zložiek (9). V prípade nezamietnutia hypotézy o významnosti parametra pri trende sa dá vypočítať priemerná miera rastu produktivity $g = \beta_2/(1 - \beta_1)$.

Ak sa hypotéza o významnosti parametra pri trende zamietne, teda ak $\beta_2 = 0$, Szomolányi so spoluautormi pokračujú v testovaní hypotézy $\beta_1 = 1$. Ak nezamietneme túto hypotézu, tak platí $\gamma = 0$, elasticita substitúcie vstupov je jednotková a podiel práce $(1 - \alpha)$ sa vypočíta ako $e^{\beta 0}$ a podiel kapitálu α je zvyšok do jednej. Zároveň tým potvrdíme, že Cobbova-Douglasova produkčná funkcia je vhodná na opis produkčných možností skúmanej ekonomiky a už nie je treba uvažovať produkčnú funkciu s konštantnou elasticitou substitúcie (CES), z ktorej vychádza celá úvaha.

Aplikovanie Johansenovej procedúry je spojené s vektorovými modelmi. Pri ich výbere musíme zohľadniť rozhodnutia o maximálnom oneskorení modelu, overiť stabilitu modelov a zároveň testovať reziduály. Testy prezentuje Lütkepohl (2005). Rozhodovanie o oneskorení systému uľahčujú informačné kritériá, medzi ktorými obvykle preferujeme Schwarzovo kritérium (*SC*) alebo Akaikeho informačné kritérium (*AIC*).

Overenie stability pri modeloch VAR vychádza z nutnej podmienky, aby všetky korene polynómu operátora oneskorenia ležali mimo jednotkového kruhu množiny komplexných čísel (inverzné korene vypočítavané softvérom by mali ležať vnútri tohto kruhu). Pri modeloch VEC z vlastností kointegračnej matice vyplýva, že v systéme n premenných, v ktorom je k kointegrujúcich vzťahov, vystupuje $(n - k)$ lineárne nezávislých spoločných trendov, a preto musí systém obsahovať práve $(n - k)$ jednotkových koreňov.

Keďže závery sa v prípade Slovenska a Českej republiky odlišujú, postup analýzy a jednotlivé výstupy a výpočty oddelíme pre každú krajinu zvlášť.

3.1 Výsledky získané pre Slovensko

Počiatočným rozhodnutím pri vektorovom modeli je rozhodnutie o maximálnom oneskorení modelu, ktoré sa následne overuje testami reziduálov. Spolu s Johansenovym testom tvoria podstatnú časť pre výber vhodného modelu určeného na testovanie.

Tabuľka 1: Informačné kritériá pre výber rádu vektorového modelu

VAR Lag Order Selection Criteria

Lag	LogL	LR	FPE	AIC	SC	HQ
0	329.4084	NA	1.95e-07	-9.773384	-9.707572	-9.747342
1	340.4574	21.10868*	1.58e-07*	-9.983804*	-9.786369*	-9.905679*
2	342.9635	4.638141	1.65e-07	-9.939210	-9.610151	-9.809001
3	343.2092	0.439963	1.85e-07	-9.827140	-9.366458	-9.644847
4	347.9598	8.224941	1.81e-07	-9.849546	-9.257241	-9.615169

* indicates lag order selected by the criterion Zdroj: Vlastné výpočty v EViews

Všetky informačné kritériá z tab. 1 odporúčajú maximálne 1 oneskorenie. Keďže analyzujeme vzťah 2 premenných, môže existovať maximálne 1 kointegrujúci vzťah. Preto odhadneme model VEC s jedným kointegrujúcim vzťahom a maximálne s jedným oneskorením.

Tabuľka 2: Skrátený zápis odhadnutého modelu VEC

Vector Error Correction Estimates
Standard errors in ( ) & t-statistics in [ ]

Cointegrating Eq:	CointEq1	Error Correction:	D(LOG(W))	D(LOG(Y))
LOG(W(-1))	1.00000	CointEq1	-0.370653	-0.150499
LOG(Y(-1))	-1.01212		(0.09275)	(0.09049)
	(0.08243)		[-3.99640]	[-1.66320]
	[-12.2780]	D(LOG(W(-1)))	0.162661	0.303976
@TREND	0.002794		(0.14313)	(0.13964)
	(0.00215)		[1.13649]	[2.17686]
	[1.29652]	D(LOG(Y(-1)))	0.093628	-0.004491
C	0.953645		(0.17714)	(0.17282)
			[0.52856]	[-0.02599]
		C	0.015927	0.015554
			(0.00401)	(0.00392)
			[3.96731]	[3.97109]

Zdroj: Vlastné výpočty v EViews

Z odhadnutého modelu v tab. 2 vidíme, že parameter pri trende bude pravdepodobne nevýznamný, ale skôr ako potvrdíme tento záver testom koeficientu vierohodnosti, preveríme stabilitu modelu, testujeme normalitu reziduálov a prítomnosť autokorelácie. Testovaný model spĺňa podmienku stability, ako vidíme v tab. 3 obsahuje práve jeden jednotkový koreň (splnená podmienka ich počtu rovnajúca sa $n - k = 2 - 1$).

Tabuľka 3: Overovanie podmienky stability

Roots of Characteristic Polynomial	
Root	Modulus
1.000000	1.000000
0.830766	0.830766
0.249759	0.249759
-0.14069	0.140686
VEC specification imposes 1 unit root(s).	

Zdroj: Vlastné výpočty v EViews

Tabuľka 4: Testovanie autokorelácie a portmanteau test

VAR Residual Serial Correlation LM Tests Null: no serial correlation at lag order h			Residual Portmanteau Tests for Autocorrelations Null: no residual autocorrelations up to lag h					
Lags	LM-Stat	Prob	Lags	Q-Stat	Prob.	Adj Q-Stat	Prob.	df
1	8.805894	0.0661	1	0.48320	NA*	0.4902	NA*	NA*
2	1.516338	0.8237	2	1.89348	0.9655	1.94196	0.9630	7
3	1.814769	0.7698	3	3.67543	0.9785	3.8037	0.9753	11
4	9.138556	0.0577	4	13.5219	0.5621	14.2469	0.5069	15

Zdroj: Vlastné výpočty v EViews

V testovanom modeli nie je významná autokorelácia reziduálov. Skúšané zvyšovanie maximálneho oneskorenia nijak nezmenilo dosiahnuté závery tohto modelu.

Tabuľka 5: Testovanie normálneho rozdelenia reziduálov

VEC Residual Normality Tests				
Component	Skewness	Chi-sq	df	Prob.
1	-0.00354	0.000146	1	0.9904
2	0.070184	0.057468	1	0.8105
Joint		0.057614	2	0.9716
Component	Kurtosis	Chi-sq	df	Prob.
1	3.70797	1.461896	1	0.2266
2	2.926238	0.015869	1	0.8998
Joint		1.477765	2	0.4776
Component	Jarque-Bera	df	Prob.	
1	1.462042	2	0.4814	
2	0.073337	2	0.9640	
Joint	1.535378	4	0.8204	

Zdroj: Vlastné výpočty v EViews

Reziduály z oboch rovníc modelu majú normálne rozdelenie. Deterministický trend v kointegrujúcom vzťahu by mal byť potvrdený aj Johansenovym testom a závermi získanými z lambda trace a lambda max štatistiky. Výsledky z tab. 6 ukazujú, že medzi týmito nestacionárnymi premennými nie je kointegrujúci vzťah podľa schémy (10). Napriek tomu odhadneme tento model aj podľa schémy (9) a parameter testujeme.

Tabuľka 6: Johansenov test kointegrácie schémy (10)

Unrestricted Cointegration Rank Test (Trace)				
Hypothesized No. of CE(s)	Eigenvalue	Trace Statistic	0.05 Critical Value	Prob.
None	0.211423	23.35360	25.87211	0.0997
At most 1	0.091625	6.726829	12.51798	0.3739
Trace test indicates no cointegration at the 0.05 level				
Unrestricted Cointegration Rank Test (Maximum Eigenvalue)				
Hypothesized No. of CE(s)	Eigenvalue	Max-Eigen Statistic	0.05 Critical Value	Prob.
None	0.211423	16.62677	19.38704	0.1204
At most 1	0.091625	6.726829	12.51798	0.3739
Max-eigenvalue test indicates no cointegration at the 0.05 level				

Zdroj: Vlastné výpočty v EViews

Test ohraničenia $\beta_2 = 0$ si v programe vyžaduje zadať aj normalizačné ohraničenie, že parameter pri logaritme odmien sa rovná 1. Výsledok testu koeficientu vierohodnosti 0,9952 v tab. 7 potvrdil, že nemôžeme zamietnuť nulovú hypotézu, že koeficient pri deterministickom trende $\beta_2 = 0$. Tým sme vlastne nepriamo odhadli špecifikáciu (9).

Tabuľka 7: Skrátený zápis odhadnutého modelu VEC s testom $\beta_2 = 0$

Vector Error Correction Estimates

Cointegration Restrictions: B(1,1)=1, B(1,3)=0
Convergence achieved after 2 iterations.
Restrictions identify all cointegrating vectors
LR test for binding restrictions (rank = 1):
Chi-square(1) **0.995222**
Probability 0.318469

Cointegrating Eq:	CointEq1	Error Correction:	D(LOG(W))	D(LOG(Y))
LOG(W(-1))	1.00000	CointEq1	-0.381890	-0.209967
LOG(Y(-1))	-0.906093		(0.09430)	(0.09054)
	(0.01337)		[-4.04954]	[-2.31896]
	[-67.7648]	D(LOG(W(-1)))	0.206668	0.338748
@TREND	0.000000		(0.14451)	(0.13875)
C	0.097491		[1.43008]	[2.44139]
		D(LOG(Y(-1)))	0.079176	-0.057224
			(0.17790)	(0.17081)
			[0.44505]	[-0.33501]
		C	-0.381890	-0.209967
			(0.09430)	(0.09054)
			[-4.04954]	[-2.31896]

Zdroj: Vlastné výpočty v EViews

Alebo inak, keby sme v programe priamo odhadli špecifikáciu (9), získaný výstup by sa od uvedeného líšil iba v tom, že by v kointegrujúcej rovnici nebol uvedený @TREND a pri ňom ohraničená hodnota parametra na 0. Ohraničenia v tomto type modelov analyzuje Johansen (1995). V prípade tejto deterministickej špecifikácie aj Johansenov test zobrazený v tab. 8 potvrdil prostredníctvom oboch testov lambda trace aj lambda max testu 1 kointegrujúci vektor.

Tabuľka 8: Johansenov test kointegrácie schémy (9)

Unrestricted Cointegration Rank Test (Trace)				
Hypothesized No. of CE(s)	Eigenvalue	Trace Statistic	0.05 Critical Value	Prob.
None *	0.200131	15.63848	15.49471	0.0476
At most 1	9.91E-05	0.006935	3.841466	0.9331
Trace test indicates 1 cointegrating eqn(s) at the 0.05 level				
Unrestricted Cointegration Rank Test (Maximum Eigenvalue)				
Hypothesized No. of CE(s)	Eigenvalue	Max-Eigen Statistic	0.05 Critical Value	Prob.
None *	0.200131	15.63155	14.26460	0.0302
At most 1	9.91E-05	0.006935	3.841466	0.9331
Max-eigenvalue test indicates 1 cointegrating eqn(s) at the 0.05 level				

Zdroj: Vlastné výpočty v EViews

Test ohraničenia $\beta_1 = 1$ sa v programe musí zadať s opačným znamienkom, tak ako parameter vystupuje v kointegrujúcom vektore a nie v rovnici. Samozrejme opäť musí byť pridané normalizačné ohraničenie, ktoré ako sme videli aj v predošlom prípade, nevplýva na počet stupňov voľnosti testovacej štatistiky.

Tabuľka 9: Skrátený zápis odhadnutého modelu VEC s testom $\beta_1 = 1$

Vector Error Correction Estimates				
Cointegration Restrictions: B(1,1)=1, B(1,2)=-1				
LR test for binding restrictions (rank = 1):				
Chi-square(1)	**13.53171**			
Probability	0.000235			
Cointegrating Eq:	CointEq1	Error Correction:	D(LOG(W))	D(LOG(Y))
LOG(W(-1))	1.00000	CointEq1	-0.079124	-0.040668
LOG(Y(-1))	-1.00000		(0.05629)	(0.05080)
C	0.946141		[-1.40571]	[-0.80055]
		D(LOG(W(-1)))	0.121511	0.290766
			(0.15756)	(0.14220)
			[0.77120]	[2.04475]
		D(LOG(Y(-1)))	0.337576	0.087268
			(0.18117)	(0.16351)
			[1.86335]	[0.53373]
		C	0.011230	0.013737
			(0.00418)	(0.00377)
			[2.68628]	[3.64079]

Zdroj: Vlastné výpočty v EViews

Výsledok testu koeficientu vierohodnosti 13,53 v tab. 9 ukázal, že môžeme zamietnuť nulovú hypotézu, že koeficient $\beta_1 = 1$. Uvedený záver znamená, že na Slovensku nemáme jednotkovú elasticitu substitúcie vstupov a Cobbova-Douglasova produkčná funkcia nie je vhodná na opis produkčných možností hospodárstva na Slovensku.

3.2 Výsledky získané pre Českú republiku

Postup zopakujeme aj pre Českú republiku. Spočiatku sa opakujú závery zo Slovenska, preto zobrazujeme iba odhady modelov a testovanie parametrov dlhodobých vzťahov.

Tabuľka 10: Skrátený zápis odhadnutého modelu VEC

Vector Error Correction Estimates				
Cointegrating Eq:	CointEq1	Error Correction:	D(LOG(W))	D(LOG(Y))
LOG(W(-1))	1	CointEq1	-0.553822	-0.360809
LOG(Y(-1))	-1.006992		(0.14354)	(0.17674)
	(0.06099)		[-3.85833]	[-2.04147]
	[-16.5104]	D(LOG(W(-1)))	0.004057	0.269248
@TREND	-0.000178		(0.16002)	(0.19704)
	(0.00126)		[0.02536]	[1.36647]
	[-0.14143]	D(LOG(Y(-1)))	0.23851	-0.091018
C	0.958739		(0.18340)	(0.22582)
			[1.30049]	[-0.40305]
		C	0.017624	0.018079
			(0.00271)	(0.00334)
			[6.49783]	[5.41354]

Zdroj: Vlastné výpočty v EViews

Až pri testovaní ohraničenia $\beta_1 = 1$ dochádza k odlišnému záveru medzi Slovenskom a Českou republikou, lebo hypotézu na základe hodnoty koeficientu vierohodnosti 2,004 nemôžeme zamietnuť. Uvedený záver znamená, že v Českej republike je jednotková elasticita substitúcie vstupov a Cobbova-Douglasova produkčná funkcia je vhodná na opis produkčných možností českého hospodárstva.

Tabuľka 11: Skrátený zápis odhadnutého modelu VEC s testom $\boldsymbol{\beta_2} = 0$

Vector Error Correction Estimates

Cointegration Restrictions: B(1,1)=1, B(1,3)=0
Convergence achieved after 2 iterations.
Restrictions identify all cointegrating vectors
LR test for binding restrictions (rank = 1):

Chi-square(1)	**0.021371**
Probability	0.883773

Cointegrating Eq:	CointEq1	Error Correction:	D(LOG(W))	D(LOG(Y))
LOG(W(-1))	1.00000	CointEq1	-0.556852	-0.365993
LOG(Y(-1))	-1.015514		(0.14394)	(0.17719)
	(0.00877)		[-3.86865]	[-2.06551]
	[-115.784]	D(LOG(W(-1)))	0.002981	0.270028
@TREND	0.000000		(0.15977)	(0.19668)
C	1.037658		[0.01866]	[1.37296]
		D(LOG(Y(-1)))	0.233735	-0.096397
			(0.18387)	(0.22634)
			[1.27123]	[-0.42589]
		C	0.017766	0.018186
			(0.00272)	(0.00335)
			[6.53322]	[5.43282]

Zdroj: Vlastné výpočty v EViews

Tabuľka 12: Skrátený zápis odhadnutého modelu VEC s testom $\boldsymbol{\beta_1} = 1$

Vector Error Correction Estimates

Cointegration Restrictions: B(1,1)=1, B(1,2)=-1
Restrictions identify all cointegrating vectors
LR test for binding restrictions (rank = 1):

Chi-square(1)	**2.004028**
Probability	0.156882

Cointegrating Eq:	CointEq1	Error Correction:	D(LOG(W))	D(LOG(Y))
LOG(W(-1))	1.00000	CointEq1	-0.444749	-0.315677
LOG(Y(-1))	-1.00000		(0.11959)	(0.14565)
C	0.882159		[-3.71898]	[-2.16731]
		D(LOG(W(-1)))	-0.042654	0.251132
			(0.15703)	(0.19126)
			[-0.27162]	[1.31306]
		D(LOG(Y(-1)))	0.293329	-0.074768
			(0.17853)	(0.21744)
			[1.64301]	[-0.34385]
		C	0.017377	0.018046
			(0.00272)	(0.00331)
			[6.38735]	[5.44628]

Zdroj: Vlastné výpočty v EViews

Zároveň vieme z modelu zo vzťahu $\beta_0 = \ln(1 - \alpha)$ vypočítať podiel práce $(1 - \alpha)$, ktorý sa rovná $e^{\beta_0} = e^{-0.882159} = 0{,}4139$. Dopočítaním do 1 získame podiel kapitálu $\alpha = 0{,}5861$. Pripomíname, že vo výpise z programu sú všetky parametre s výnimkou normalizačného parametra v kointegrujúcej rovnici zapísané s opačným znamienkom, tak ako vystupujú v kointegrujúcom vektore.

Szomolányi so spoluautormi pokračovali v analýze Cobbovej-Douglasovej produkčnej funkcie, kde využili analogickú lineárnu špecifikáciu. Szomolányi (2014) sa problematikou zaoberal aj ďalej, pričom poukázal na rôzne spôsoby normalizácie produkčnej funkcie s konštantnou elasticitou substitúcie.

Záver

V článku boli prezentované modely, ktoré využívajú kointegráciu nestacionárnych časových radov, teda vektorové modely s korekčným členom (VECM) a tým sme doplnili vektorovo autoregresné modely a štrukturálne vektorovo autoregresné modely, ktoré boli prezentované v predchádzajúcich článkoch tohto časopisu.

Okrem teoretického vysvetlenia prezentujeme postup analýzy tohto typu modelu na konkrétnom príklade analýzy štruktúry skúmajúcej parametre produkčnej funkcie s konštantnou elasticitou substitúcie na Slovensku a v Českej republike za obdobie rokov 1995 až 2012. Tento príklad vysvetľuje vzťah medzi jednotlivými deterministickými schémami, medzi ktorými si analytik vždy musí vyberať pri práci s týmito modelmi.

Vektorové modely s korekčným členom predstavujú silný nástroj umožňujúci analytikom modelovať správanie ekonomických premenných, v ktorom sa jedinečne spája krátkodobé a dlhodobé správanie premenných. Takúto možnosť síce ponúkajú aj jednorovnicové modely s korekčným členom získané v dvojkrokovej procedúre Engla a Grangera, ale tie neumožňujú testovanie parametrov dlhodobej rovnováhy, ktoré sú často kľúčové a takisto neumožňujú ani súčasne modelovať viacero dlhodobých vzťahov. A ako ukázali Lukáčik so spoluautormi (2007), vektorové modely s korekčným členom sú zároveň aj výborným nástrojom na prognózovanie.

<u>Kľúčové slová</u>

vektorové modely s korekčným členom, kointegrácia, Johansenova procedúra, test koeficientu vierohodnosti, produkčná funkcia s konštantnou elasticitou substitúcie, Cobbova-Douglasova produkčná funkcia

<u>Klasifikácia JEL</u>

C32, C50

LITERATÚRA

[1] ENGLE, R.F. – GRANGER, C.W.J. (1987): Cointegration and Error Correction: Representation, Estimation and Testing. Econometrica, roč. 55, s. 251-276.

[2] JOHANSEN, S. (1988): Statistical Analysis of Cointegration Vectors. Journal of Economic Dynamics and Control, roč. 12, s. 231-254.

[3] JOHANSEN, S. (1991): Estimation and Hypothesis Testing of Cointegration Vectors in Gaussian Vector Autoregressive Models. Econometrica, roč. 59, s. 1551-1580.

[4] JOHANSEN, S. (1995): Identifying Restrictions of Linear Equations with Applications to Simultaneous Equations and Cointegration. Journal of Econometrics, roč. 69, s. 111-132.

[5] LUKÁČIK, M. (2012a): Vektorovo autoregresné modely v ekonometrii. Ekonomika a informatika, roč. X, č. 1, 2012, s. 130-144.

[6] LUKÁČIK, M. (2012b): Štrukturálne vektorovo autoregresné modely. Ekonomika a informatika, roč. X, č. 2, 2012, s. 67-83.

[7] LUKÁČIK, M. – LUKÁČIKOVÁ, A. (2013): Vektorovo autogresné modely a ich aplikácie v makroekonomickej analýze. Bratislava: Vydavateľstvo EKONÓM.

[8] LUKÁČIK, M. – LUKÁČIKOVÁ, A. – SZOMOLÁNYI, K. (2007): Ekonometrické prognózovanie importu Slovenskej republiky na základe modelov s korekčným členom. In: Ekonomické rozhľady, roč. 36, č. 2, s. 179-192.

[9] LÜTKEPOHL, H. (2005): New Introduction to Multiple Time Series Analysis. Berlín: Springer-Verlag.

[10] STOCK, J.H. (1987): Asymptotic Properties of Least Square Estimators of Cointegrating Vectors. Econometrica, roč. 55, s. 1035-1056.

[11] STOCK, J.H. – WATSON, M.W. (1988): Testing for Common Trends, Journal of the American Statistical Association, roč. 83, s. 1097-1107.

[12] SZOMOLÁNYI, K. (2014): Normalizovaná produkčná funkcia s konštantnou elasticitou substitúcie vstupov. In: Nové trendy v ekonometrii a operačním výzkumu, Bratislava: Vydavateľstvo EKONÓM.

[13] SZOMOLÁNYI, K. - LUKÁČIK, M. - LUKÁČIKOVÁ, A. (2013): Estimation of the production function parameters in V4 economies. In: Mathematical methods in economics 2013, Jihlava: College of Polytechnics Jihlava, s. 898-902.

RESUMÉ

VEC modely ako modely patriace medzi VAR modely majú výhodu oproti tradičným rozsiahlym makroekonomickým modelom v tom, že ich výsledky nie sú skryté v komplikovaných konštrukciách, ale sú ľahko dostupné a interpretovateľné. Význam vektorových modelov s korekčným členom je v súčasnej ekonometrii nespochybniteľný, preto je v tomto článku prezentovaná ich metodológia a zároveň aj aplikácia poukazujúca na ich všestranné využitie pri ekonomických analýzach.

SUMMARY

The VEC models as models belonging to the VAR models have the advantage over traditional large-scale macroeconomic models in that the results are not hidden by a large complicated structure, but are easily available and interpreted. The importance of the vector error correction models is in currently econometrics indisputable, so this paper presents the methodology and also the application showing their versatility in the economic analysis.

Kontakt

doc. Ing. Martin Lukáčik, PhD., Katedra operačného výskumu a ekonometrie, Fakulta hospodárskej informatiky, Ekonomická univerzita v Bratislave, Dolnozemská cesta 1, 852 35 Bratislava, tel.: +421 2/672 95 822, e-mail: martin.lukacik@euba.sk

Ing. Patrik Kupkovič, Katedra operačného výskumu a ekonometrie, Fakulta hospodárskej informatiky, Ekonomická univerzita v Bratislave, Dolnozemská cesta 1, 852 35 Bratislava, e-mail: patrik.kupkovic@gmail.com

Ing. Martin Benkovič, Katedra operačného výskumu a ekonometrie, Fakulta hospodárskej informatiky, Ekonomická univerzita v Bratislave, Dolnozemská cesta 1, 852 35 Bratislava, e-mail: benkovic.m@gmail.com