Jozef Fecenko
Simona Frisová

POUŽITIE VYTVÁRAJÚCICH FUNKCIÍ PRI ANALÝZE MARKOVOVÝCH REŤAZCOV

Úvod

Cieľom príspevku je prezentovať širšie možnosti využitia vytvárajúcich funkcií pri analýze Markovových reťazcov s podporou open source systému Maxima. Práca vznikla z podnetu state s rovnomenným názvom nachádzajúcej sa vo vysokoškolskej učebnici [3], str. 138 – 150, kde autor spomínanej učebnice pomocou vhodných úprav naznačuje, ako je možné (v špeciálnych prípadoch) úpravami, využitím vytvárajúcich funkcií vyjadriť explicitne vektor absolútnych pravdepodobností v Markovovom reťazci, resp. mocninu matice pravdepodobnosti prechodu. V práci bude ukázaná všeobecná metóda takýchto vyjadrení s využitím teórie diferenčných rovníc, s výpočtovou podporou open source systému počítačovej algebry Maxima. Pripomeňme, že „pomocou Markovových reťazcov je možne modelovať nepreberné množstvo úloh každodennej reality“ [4].

1 MARKOVOVÉ REŤAZCE

Markovov reťazec popisuje spravidla diskrétny stochastický proces, pre ktorý platí, že pravdepodobnosť prechodu do nasledujúceho stavu závisí iba na súčasnom stave a nie na predchádzajúcich stavoch.

Z teórie homogénnych Markovových reťazcov vieme, že vektor absolútnych pravdepodobnosti $\boldsymbol{p}(n)$ pre začiatočný vektor pravdepodobnosti $\boldsymbol{p}(0)$ a maticu prechodu $\boldsymbol{P}$ je možno vyjadriť v tvare

$$\boldsymbol{p}(n) = \boldsymbol{p}(n-1)\boldsymbol{P} \qquad (1)$$

resp.

$$\boldsymbol{p}(n) = \boldsymbol{p}(0)\boldsymbol{P}^{\boldsymbol{n}}. \qquad (2)$$

Markovov reťazec nazývame regulárny, ak existuje

$$\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{p}(n) = \boldsymbol{p},$$

ktorá nezávisí od začiatočného vektora $\boldsymbol{p}(0)$.

V našich úvahách sa budeme zaoberať len homogénnymi, regulárnymi Markovovými reťazcami.

1.1 Aplikácia vytvárajúcich funkcií na určenie vektora absolútnych pravdepodobnosti

Ako už bolo spomenuté, v práci [3] je načrtnutá metóda určenia vektora absolútnych pravdepodobnosti $\boldsymbol{p}(n)$ s použitím vyvárajúcich funkcií. Táto metóda je prezentovaná len na špeciálnych príkladoch, kedy príslušný rozklad na parciálne zlomky obsahuje len parciálne zlomky prvého typu. V našich úvahách sa pokúsime zovšeobecniť tento problém a načrtnúť jeho riešenie s podporou open source systému počítačovej algebry Maxima.

Nech $\{\boldsymbol{F}(n)\}_{n=0}^{\infty}$ je postupnosť matíc a nech existuje $z_0 > 0$ take, že pre všetky $z \in (-z_0, z_0)$ platí

$$\widetilde{\boldsymbol{F}}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \boldsymbol{F}(n) z^n. \tag{3}$$

Potom funkciu $\widetilde{\boldsymbol{F}}(z)$ nazývame vytvárajúcou funkciou postupnosti $\{\boldsymbol{F}(n)\}_{n=0}^{\infty}$. Funkciu $\boldsymbol{F}(n)$, definovanú na množine všetkých celých nezáporných čísel, nazývame tiež vzor matice $\widetilde{\boldsymbol{F}}(z)$ a funkciu $\widetilde{\boldsymbol{F}}(z)$ obraz funkcie $\boldsymbol{F}(n)$.

Označme $\tilde{\boldsymbol{f}}(z)$ vytvárajúcu funkciu postupnosti vektorov absolútnych pravdepodobnosti $\{\boldsymbol{p}(n)\}_{n=0}^{\infty}$. Teda

$$\tilde{\boldsymbol{f}}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \boldsymbol{p}(n) z^n \tag{4}$$

Po úprave dostaneme

$$\tilde{\boldsymbol{f}}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \boldsymbol{p}(n) z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \boldsymbol{p}(0) \boldsymbol{P}^n z^n = \boldsymbol{p}(0) \sum_{n=0}^{\infty} (z\boldsymbol{P})^{\boldsymbol{n}} = \tag{5}$$

$$= \boldsymbol{p}(0)(\boldsymbol{E} - z\boldsymbol{P})^{-1} = \boldsymbol{p}(0)\widetilde{\boldsymbol{F}}(z)$$

kde $(\boldsymbol{E} - z\boldsymbol{P})^{-1}$ je inverzná matica k matici $\boldsymbol{E} - z\boldsymbol{P}$. Vzťah (5) platí za predpokladu, že príslušný nekonečný rad konverguje na nejakom intervale $(-z_0, z_0)$, $z_0 > 0$ a matica $\boldsymbol{E} - z\boldsymbol{P}$ je regulárna pre všetky $z \in (-z_0, z_0)$.

Zo vzťahu (5) vyplývajú dve úlohy:

- nájsť vzor vektora $\boldsymbol{p}(0)\widetilde{\boldsymbol{F}}(z)$, t. j. vektor $\boldsymbol{p}(n)$ absolútnych pravdepodobnosti po *n* krokoch (vtedy ak vektor začiatočných pravdepodobnosti je fixne daný)
- nájsť vzor funkcie $\widetilde{\boldsymbol{F}}(z)$, t. j. funkciu $\boldsymbol{F}(n) = \boldsymbol{P}^n$ (výhodné napríklad vtedy ak predpokladáme, že budeme riešiť viacej úloh s meniacim sa začiatočným vektorom pravdepodobnosti $\boldsymbol{p}(0)$). Táto úloha je na rozsah výpočtu náročnejšia.

Pred všeobecnou analýzou tohto problému, uvedieme triviálny príklad.

Príklad 1. ([3], str. 140). Nájdime vektor absolútnych pravdepodobnosti Markovovho reťazca, ktorý je daný maticou prechodu

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 \\ 0,3 & 0,7 \end{pmatrix}$$

a začiatočným vektorom $\boldsymbol{p}(0) = (1; 0)$.

Riešenie.

$$(\boldsymbol{E} - z\boldsymbol{P}) = \begin{pmatrix} 1 - 0,6z & -0,4z \\ -0,3z & 1 - 0,7z \end{pmatrix}$$

$$(\boldsymbol{E} - z\boldsymbol{P})^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{10 - 7z}{3z^2 - 13z + 10} & \dfrac{4z}{3z^2 - 13z + 10} \\ \dfrac{3z}{3z^2 - 13z + 10} & -\dfrac{6z - 10}{3z^2 - 13z + 10} \end{pmatrix}, z \neq 1, z \neq \frac{10}{3} \qquad (6)$$

Po rozklade na parciálne zlomky dostaneme

$$\widetilde{\boldsymbol{F}}(z) = \begin{pmatrix} \dfrac{40}{7(10 - 3z)} + \dfrac{3}{7(1 - z)} & -\dfrac{40}{7(10 - 3z)} + \dfrac{4}{7(1 - z)} \\ -\dfrac{30}{7(10 - 3z)} + \dfrac{3}{7(1 - z)} & \dfrac{30}{7(10 - 3z)} + \dfrac{4}{7(1 - z)} \end{pmatrix}, |z| < 1$$

Poslednú maticu môžeme napísať ako súčet matíc

$$\widetilde{\boldsymbol{F}}(z) = \frac{1}{1 - z}\begin{pmatrix} \frac{3}{7} & \frac{4}{7} \\ \frac{3}{7} & \frac{4}{7} \end{pmatrix} + \frac{1}{1 - \frac{3}{10}z}\begin{pmatrix} \frac{4}{7} & -\frac{4}{7} \\ -\frac{3}{7} & \frac{3}{7} \end{pmatrix}, \qquad |z| < 1$$

Vzor funkcie $\widetilde{\boldsymbol{F}}(z)$ potom môžeme vyjadriť v tvare

$$\boldsymbol{F}(n) = \begin{pmatrix} \frac{3}{7} & \frac{4}{7} \\ \frac{3}{7} & \frac{4}{7} \end{pmatrix} + \left(\frac{3}{10}\right)^n \begin{pmatrix} \frac{4}{7} & -\frac{4}{7} \\ -\frac{3}{7} & \frac{3}{7} \end{pmatrix} = \boldsymbol{P}^n.$$

Potom podľa vzťahu (2)

$$\boldsymbol{p}(n) = (1; 0)\left(\begin{pmatrix} \frac{3}{7} & \frac{4}{7} \\ \frac{3}{7} & \frac{4}{7} \end{pmatrix} + \left(\frac{3}{10}\right)^n \begin{pmatrix} \frac{4}{7} & -\frac{4}{7} \\ -\frac{3}{7} & \frac{3}{7} \end{pmatrix}\right) = \left(\frac{3}{7} + \frac{4}{7}\left(\frac{3}{10}\right)^n; \ \ \frac{4}{7} - \frac{4}{7}\left(\frac{3}{10}\right)^n\right).$$

Poznámka 1. V ilustrovanom príklade determinant matice $\boldsymbol{E} - z\boldsymbol{P}$ (v našom prípade polynóm premennej z) mal navzájom rôzne reálne korene, $z_1 = 1$ a $z_2 = \frac{10}{3}$. Natíska sa otázka, ako by sme postupovali, pri hľadaní absolútneho vektora pravdepodobnosti, ak by korene determinantu matice $\boldsymbol{E} - z\boldsymbol{P}$ boli viacnásobné či dokonca komplexne, prípadne aj viacnásobné komplexné korene. Postup prezentovaný v predchádzajúcom príklade by zrejme nebol príliš úspešný.

2 ANALÝZA PROBLÉMU

Z vlastnosti výpočtu inverznej matice pomocou adjungovanej vyplýva, že prvky matice $(\boldsymbol{E}-z\boldsymbol{P})^{-1}$ sú racionálne funkcie, ktorých stupeň polynómu v menovateli je nanajvýš rovný stupňu matice $\boldsymbol{P}$ a čitateľ stupeň polynómu aspoň o jednotku menší než menovateľ. Aj po vynásobení vektora $\boldsymbol{p}(0)$ maticou $(\boldsymbol{E}-z\boldsymbol{P})^{-1}$ v tomto poradí dostaneme vektor, ktorého zložky sú racionálne funkcie.

Nech vytvárajúca funkcia niektorej zložky matice $(\boldsymbol{E}-z\boldsymbol{P})^{-1}$ alebo zložky vektora

$\boldsymbol{p}(0)(\boldsymbol{E}-z\boldsymbol{P})^{-1}$ je racionálna funkcia

$$c_0+c_1z+c_2z^2+c_3z^3+\cdots=\frac{a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots+a_mz^m}{b_0+b_1z+b_2z^2+\cdots+b_nz^n}, \tag{7}$$

kde $m<n$.

Zrejme $b_0\neq 0$ pretože nekonečný rad na ľavej strane rovnice (7) by nekonvergoval pre $z=0$. Vynásobením rovnice (7) menovateľom výrazu na pravej strane tohto vzťahu a porovnaním výrazov pri rovnakých mocninách na obidvoch stranách rovnice dostaneme

$$\begin{aligned}
b_0c_0&=a_0\\
b_0c_1+b_1c_0&=a_1\\
&\vdots\\
b_0c_m+b_1c_{m-1}+\cdots+b_mc_0&=a_m\\
b_0c_{m+1}+b_1c_m+\cdots+b_{m+1}c_0&=0\\
b_0c_{m+2}+b_1c_{m+1}+\cdots+b_{m+2}c_0&=0\\
&\vdots\\
b_0c_n+b_1c_{n-1}+b_2c_{n-2}+\cdots+b_nc_0&=0\\
&\vdots\\
b_0c_{n+k}+b_1c_{n+k-1}+b_2c_{n+k-2}+\cdots+b_nc_k&=0,\ \text{pre } k\geq 1\,.
\end{aligned} \tag{8}$$

Z prvých n rovníc môžeme vypočítať hodnoty $c_0,c_1,\dots,c_{n-1}$. Ďalšie rovnice vo vzťahu (8) sú diferenčné rovnice, resp. jedna homogénna lineárna diferenčná rovnica n-tého rádu s konštantnými koeficientmi.

Úloha, nájsť obraz racionálnej funkcie na pravej strane vzťahu (7) sa pretransformovala na úlohu nájsť riešenie diferenčnej rovnice

$$b_0c_n+b_1c_{n-1}+b_2c_{n-2}+\cdots+b_nc_0=0, \tag{9}$$

pri vypočítaných začiatočných podmienkach $c_0, c_1, \cdots, c_{n-1}$. Inými slovami, nájsť partikulárne riešenie diferenčnej rovnice (9) so začiatočnými podmienkami $c_0, c_1, \cdots, c_{n-1}$ znamená nájsť vytvárajúcu funkciu postupnosti $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$. Techniky riešenia takýchto diferenčných rovníc môže čitateľ nájsť napríklad v publikácií [6], str. 208 – 212.

Príklad 2. Vypočítajme vyvárajúce funkcie zložiek postupnosti vektora pravdepodobnosti Markovovho reťazca z príkladu 1, využijúc riešenie príslušnej diferenčnej rovnice.

Riešenie.

Najskôr vypočítame zložky vektora $\boldsymbol{p}(1)$.

$$\boldsymbol{p}(1) = (1;0)\begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 \\ 0,3 & 0,7 \end{pmatrix} = (0,6; 0,4)$$

Počítajme

$$\tilde{\boldsymbol{f}}(z) = \boldsymbol{p}(0)(\boldsymbol{E} - z\boldsymbol{P})^{-1} =$$

$$= (1;0)\begin{pmatrix} \dfrac{10-7z}{3z^2-13z+10} & \dfrac{4z}{3z^2-13z+10} \\ \dfrac{3z}{3z^2-13z+10} & -\dfrac{6z-10}{3z^2-13z+10} \end{pmatrix} \tag{10}$$

$$= \left(\frac{10-7z}{3z^2-13z+10}; \frac{4z}{3z^2-13z+10}\right)$$

Z porovnania vzťahov (9), (10) vyplýva, že sa žiada riešiť diferenčná rovnica

$$10c_{n+2} - 13c_{n+1} + 3c_n = 0 \tag{11}$$

so začiatočnými podmienkami $c_0 = 1,\ c_1 = \frac{3}{5}$ (pre prvú zložku vektora $\boldsymbol{p}(n)$).

Charakteristická rovnica diferenčnej rovnice je

$$10\lambda^2 - 13\lambda + 3 = 0$$

a jej korene sú $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = \frac{3}{10}$.

Pre všeobecné riešenie diferenciálnej rovnice (11) dostávame

$$c_n = K_1 \cdot 1^n + K_2 \cdot \left(\frac{3}{10}\right)^n = K_1 + K_2 \cdot \left(\frac{3}{10}\right)^n.$$

Ak zohľadníme začiatočné podmienky pre prvú zložku, t. j. $c_0 = 1,\ c_1 = \frac{3}{5}$, dostaneme systém rovníc

$$1 = K_1 + K_2$$

$$\frac{3}{5} = K_1 + K_2 \cdot \frac{3}{10},$$

ktorého riešením je

$$K_1 = \frac{3}{7}, \quad K_2 = \frac{4}{7}.$$

Partikulárne riešenie pre prvú zložku absolútneho vektora pravdepodobností po *n* krokoch je

$$c_n = \frac{3}{7} + \frac{4}{7} \cdot \left(\frac{3}{10}\right)^n = \boldsymbol{p}_1(n).$$

Podobne dostaneme pre druhu zložku (ak zohľadníme začiatočné podmienky, t. j. ($c_0 = 0,\ c_1 = \frac{2}{5}$)

$$c_n = \frac{4}{7} - \frac{4}{7} \cdot \left(\frac{3}{10}\right)^n = \boldsymbol{p}_2(n).$$

Celý výpočet môžeme jednoducho realizovať v open source programe Maxima.

Skôr než začneme výpočty s diferenčnými rovnicami v systéme Maxima, musíme si privolať procedúru na riešenie rekurentných postupnosti príkazom `load(solve_rec)`, resp. `load("solve_rec")`. Postup výpočtu je zrozumiteľne prezentovaný skriptom v nasledujúcom obrázku (výstupe z Maximy)

Obr. 1: Výstup riešenia príkladu 2 v open source programe Maxima.

```
(%i1) load("solve_rec")$
(%i2) rec: 10*c[n+2]-13*c[n+1]+3*c[n] =0;
```
(%o2) $10\,c_{n+2} - 13\,c_{n+1} + 3\,c_n = 0$

```
(%i3) solve_rec(rec, c[n]);
```
(%o3) $c_n = \dfrac{\%k_1\, 3^n}{10^n} + \%k_2$

```
(%i4) solve_rec(rec, c[n],c[0]=1,c[1]=3/5);
```
(%o4) $c_n = \dfrac{4\, 3^n}{7\, 10^n} + \dfrac{3}{7}$

```
(%i5) solve_rec(rec, c[n],c[0]=0,c[1]=2/5);
```
(%o5) $c_n = \dfrac{4}{7} - \dfrac{4\, 3^n}{7\, 10^n}$

Z predchádzajúcich výpočtov v Maxime vyplýva, že vektor absolútnych pravdepodobností

$$\boldsymbol{p}(n) = \left(\frac{3}{7} + \frac{4}{7}\cdot\left(\frac{3}{10}\right)^n ; \frac{4}{7} - \frac{4}{7}\cdot\left(\frac{3}{10}\right)^n\right) =$$

$$= \left(\frac{3}{7};\frac{4}{7}\right) + \left(\frac{4}{7}\cdot\left(\frac{3}{10}\right)^n ; -\frac{4}{7}\cdot\left(\frac{3}{10}\right)^n\right), \tag{12}$$

ktoré je, ako vidíme, možné rozdeliť na súčet dvoch vektorov. Prvý v poradí vo vzťahu (12) určuje stacionárnu zložku vektora absolútnych pravdepodobností. Druhý závisí od počtu krokov n a zároveň nám vyjadruje „rýchlosť konvergencie" vektora $\boldsymbol{p}(n)$, k vektoru stacionárnych pravdepodobnosti

$$\left(\frac{3}{7};\frac{4}{7}\right).$$

Vypočítajme zo vzťahu (6) ešte maticu $\boldsymbol{F}(n)$.

Nájdime postupnosť, ktorej vytvárajúcou funkciou je racionálna funkcia

$$\widetilde{\boldsymbol{F}}(z)_{1,1} = \frac{10-7z}{3z^2-13z+10},$$

ktorá sa nachádza v prvom riadu a v prvom stĺpci matice (6).

Začiatočné podmienky príslušnej diferenčnej rovnice môžeme určiť napríklad z Taylorovho rozvoja

$$c_0 = \widetilde{\boldsymbol{F}}(0)_{1,1} = 1, \qquad c_1 = \left(\widetilde{\boldsymbol{F}}(0)_{1,1}\right)' = \frac{3}{5}$$

alebo z mocnín matice prechodu

$$\boldsymbol{P}^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{P}^1 = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{3}{10} & \frac{7}{10} \end{pmatrix}.$$

Dostávame $c_0 = 1, c_1 = \frac{3}{5}$ a diferenčnú rovnicu, ktorú sme už riešili predtým. Jej riešením je

$$c_n = \frac{3}{7} + \frac{4}{7}\cdot\left(\frac{3}{10}\right)^n = \boldsymbol{F}_{1,1}$$

Vypočítajme ešte napríklad $\boldsymbol{F}_{2,2}$:

$$c_0 = 1, c_1 = \frac{7}{10}.$$

Riešením diferenčnej rovnice

$$10c_{n+2} - 13c_{n+1} + 3c_n = 0$$

s vyššie uvedenými začiatočnými podmienkami je

$$c_n = \frac{3^{1+n}}{7 \cdot 10^n} + \frac{4}{7} = \boldsymbol{F}_{2,2}.$$

Podobným spôsobom vypočítame ostatné zložky matice $\boldsymbol{F}(n)$. Dostaneme

$$\boldsymbol{F}(n) = \begin{pmatrix} \frac{3}{7} + \frac{4}{7} \cdot \left(\frac{3}{10}\right)^n & \frac{4}{7} - \frac{4 \cdot 3^n}{7 \cdot 10^n} \\ \frac{3}{7} - \frac{3^{1+n}}{7 \cdot 10^n} & \frac{3^{1+n}}{7 \cdot 10^n} + \frac{4}{7} \end{pmatrix}.$$

Príklad 3. ([3], str. 142) Nájdime vektor absolútnych pravdepodobností Markovovoho reťazca, ktorý je daný maticou prechodu

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{3}{20} & \frac{1}{20} \\ \frac{9}{10} & \frac{1}{20} & \frac{1}{20} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a vektorom začiatočných pravdepodobností $\boldsymbol{p}(0) = (1; 0; 0)$.

Riešenie. Vieme, že vytvárajúca postupnosť jednotlivých zložiek vektorov pravdepodobností je racionálna funkcia, ktorej menovateľ má stupeň nanajvýš rovný n a stupeň čitateľa bude nanajvýš rovný $n-1$, kde n je stupeň matice $\mathbf{P}$, v našom prípade $n=3$. Vypočítajme ešte

$$\mathbf{p}(1) = \mathbf{p}(0)\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{3}{20} & \frac{1}{20} \end{pmatrix}.$$

Nájdime obraz vektora $\boldsymbol{p}(n)$

$$\boldsymbol{p}(\mathbf{0})(\boldsymbol{E} - z\boldsymbol{P})^{-1}$$
$$= (1,0,0) \begin{pmatrix} \frac{10z-200}{19z^2+170z-200} & -\frac{30z}{19z^2+170z-200} & \frac{z}{19z^2-39*z+20} \\ \frac{180z}{19z^2+170z-200} & \frac{160z-200}{19z^2+170z-200} & \frac{z}{19z^2-39*z+20} \\ 0 & 0 & \frac{1}{1-z} \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} \frac{10z-200}{19z^2+170z-200} & \frac{10z-200}{19z^2+170z-200} & \frac{z}{19z^2-39*z+20} \end{pmatrix}.$$

Nasledujúci skript prezentuje výpočet vektora absolútnych pravdepodobností (vzoru vektora $\boldsymbol{p}(n)$**)** použitím open source systému Maxima

Obr. 2: Výpočet jednotlivých zložiek absolútneho vektora pravdepodobností v Maxime z príkladu 3.

```
(%i1) load("solve_rec")$
(%i2) p[0]:matrix([1,0,0]);
```

$$(\%o2)\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

```
(%i3) p[1]:matrix([4/5,3/20,1/20]);
```

$$(\%o3)\ \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & \frac{3}{20} & \frac{1}{20} \end{bmatrix}$$

```
(%i4) rec:200*c[n+2]-170*c[n+1]-19*c[n]=0;
```

$$(\%o4)\ 200\, c_{n+2} - 170\, c_{n+1} - 19\, c_n = 0$$

```
(%i5) for i:1 while i<=2 do
      print(solve_rec(rec,c[n],c[0]=p[0][1,i],c[1]=p[1][1,i]));
```

$$c_n = \frac{6\, 19^n}{7\, 20^n} + \frac{(-1)^n}{7\, 10^n}$$

$$c_n = \frac{19^n}{7\, 20^n} - \frac{(-1)^n}{7\, 10^n}$$

(%o5) *done*

```
(%i6) rec:20*c[n+2]-39*c[n+1]+19*c[n]=0;
```

$$(\%o6)\ 20\, c_{n+2} - 39\, c_{n+1} + 19\, c_n = 0$$

```
(%i7) solve_rec(rec,c[n],c[0]=p[0][1,3],c[1]=p[1][1,3]);
```

$$(\%o7)\ c_n = 1 - \frac{19^n}{20^n}$$

Vypočítali sme vektor absolútnych pravdepodobností

$$\mathbf{p}(n) = \left(\frac{6}{7}\cdot\left(\frac{19}{20}\right)^n + (-1)^n \cdot \frac{1}{7}\cdot\left(\frac{1}{10}\right)^n ; \frac{1}{7}\cdot\left(\frac{19}{20}\right)^n - (-1)^n \cdot \frac{1}{7}\cdot\left(\frac{1}{10}\right)^n ; 1 - \left(\frac{19}{20}\right)^n \right) =$$

$$= (0;0;1) + \left(\frac{6}{7}\cdot\left(\frac{19}{20}\right)^n + (-1)^n \cdot \frac{1}{7}\cdot\left(\frac{1}{10}\right)^n ; \frac{1}{7}\cdot\left(\frac{19}{20}\right)^n - (-1)^n \cdot \frac{1}{7}\cdot\left(\frac{1}{10}\right)^n ; \left(\frac{19}{20}\right)^n \right).$$

Z výpočtu vyplýva, že v tomto prípade „rýchlosť konvergencie“ vektora $\boldsymbol{p}(n)$ k stacionárnemu vektoru pravdepodobnosti $(0; 0; 1)$ je relatívne pomalá (avšak stále exponenciálneho typu, nie polynomického), pretože najväčší základ $\frac{19}{20}$ vo vyjadrení $\boldsymbol{p}(n)$ je blízko jednotky.

Prezentovaný postup môžeme uplatniť aj v prípade, že determinant matice $\boldsymbol{E} - z\boldsymbol{P}$ má komplexné alebo násobné korene. Úspešnosť riešenia takejto úlohy, s využitím softvéru Maxima, závisí iba od toho, či spomínaný softvér dokáže vyriešiť diferenčné rovnice vyplývajúce zo vzťahu $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{0})(\boldsymbol{E} - z\boldsymbol{P})^{-1}$.

Postup riešenia v prípade komplexných koreňov ilustrujeme na nasledujúcom príklade.

Príklad 4. Nájdime vektor absolútnych pravdepodobností Markovovho reťazca, ktorý je daný maticou prechodu

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & 0 & \frac{1}{5} \\ \frac{9}{10} & 0 & \frac{1}{10} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

a vektorom začiatočných pravdepodobností $\boldsymbol{p}(0) = (1; 0; 0)$.

Riešenie. Vypočítame maticu $(\boldsymbol{E} - z\boldsymbol{P})^{-1}$:

$$(\mathbf{E} - z\mathbf{P})^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-50+20z+z^2}{z^3-11z^2+60z-50} & -\frac{2z^2}{z^3-11z^2+60\cdot z-50} & -\frac{10z}{z^3-11z^2+60z-50} \\ \frac{16z^2-45z}{z^3-11z^2+60z-50} & -\frac{50-60z+12z^2}{z^3-11z^2+60z-50} & -\frac{5z+5z^2}{z^3-11z^2+60z-50} \\ -\frac{20z+9z^2}{z^3-11z^2+60z-50} & \frac{8z^2-10z}{z^3-11z^2+60z-50} & \frac{40z-50}{z^3-11z^2+60z-50} \end{pmatrix}$$

.

Samotný výpočet vektoru absolútnych pravdepodobností realizujeme opäť v open source programe Maxima.

Obr. 3: Výpočet vektora absolútnych pravdepodobností z príkladu 4.

(%i1) load("solve_rec")$

(%i2) P:matrix([4/5,0,1/5],[9/10,0,1/10],[2/5,1/5,2/5]);

$$(\%o2)\quad \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & 0 & \frac{1}{5} \\ \frac{9}{10} & 0 & \frac{1}{10} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix}$$

(%i3) p[0]:matrix([1,0,0]);

$$(\%o3)\quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(%i4) for i:1 while i<=2 do
print(concat("p[",i,"]="),p[i]:p[i-1].P);

$$p[1]= \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & 0 & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

$$p[2]= \begin{bmatrix} \frac{18}{25} & \frac{1}{25} & \frac{6}{25} \end{bmatrix}$$

(%o4) *done*

(%i5) rec:-50*c[n+3]+60*c[n+2]-11*c[n+1]+c[n]=0;

$$(\%o5)\quad -50\, c_{n+3}+60\, c_{n+2}-11\, c_{n+1}+c_n=0$$

(%i6) /* Riešenie v kompexnom tvare */
for i:1 while i<=3 do
print(solve_rec(rec,c[n],c[0]=p[0][1,i],c[1]=p[1][1,i],c[2]=p[2][1,i]));

$$c_n=\frac{(1-\%i)^n\,(6+13\,\%i)}{41\;10^n}-\frac{(1+\%i)^n\,(13\,\%i-6)}{41\;10^n}+\frac{29}{41}$$

$$c_n=-\frac{(1-\%i)^n\,(1+9\,\%i)}{41\;10^n}+\frac{(1+\%i)^n\,(9\,\%i-1)}{41\;10^n}+\frac{2}{41}$$

$$c_n=-\frac{(1-\%i)^n\,(5+4\,\%i)}{41\;10^n}+\frac{(1+\%i)^n\,(4\,\%i-5)}{41\;10^n}+\frac{10}{41}$$

(%o6) *done*

```
(%i7) /* Riešenie v reálnom tvare */
      for i:1 while i<=3 do
      print(expand(ratsimp(realpart
          (solve_rec(rec,c[n],c[0]=p[0][1,i],c[1]=p[1][1,i],c[2]=p[2][1,i])))));
```

$$c_n = \frac{13\, 2^{1+\frac{n}{2}} \sin\left(\frac{\pi n}{4}\right)}{41\, 10^n} + \frac{3\, 2^{2+\frac{n}{2}} \cos\left(\frac{\pi n}{4}\right)}{41\, 10^n} + \frac{29}{41}$$

$$c_n = -\frac{9\, 2^{1+\frac{n}{2}} \sin\left(\frac{\pi n}{4}\right)}{41\, 10^n} - \frac{2^{1+\frac{n}{2}} \cos\left(\frac{\pi n}{4}\right)}{41\, 10^n} + \frac{2}{41}$$

$$c_n = -\frac{2^{3+\frac{n}{2}} \sin\left(\frac{\pi n}{4}\right)}{41\, 10^n} - \frac{5\, 2^{1+\frac{n}{2}} \cos\left(\frac{\pi n}{4}\right)}{41\, 10^n} + \frac{10}{41}$$

(%o7) *done*

Dostali sme vektor absolútnych pravdepodobností vyjadrený v komplexnom tvare

$$\mathbf{p}(n) = \begin{pmatrix} \frac{29}{41} & \frac{2}{41} & \frac{10}{41} \end{pmatrix} +$$

$$+\left(\frac{6+13i}{41}\left(\frac{1-i}{10}\right)^n - \frac{13i-6}{41}\left(\frac{1+i}{10}\right)^n ; \quad -\frac{1+9i}{41}\left(\frac{1-i}{10}\right)^n + \frac{9i-1}{41}\left(\frac{1+i}{10}\right)^n ; \quad -\frac{5+4i}{41}\left(\frac{1-i}{10}\right)^n + \frac{4i-5}{41}\left(\frac{1+i}{10}\right)^n \right)$$

a v reálnom tvare (po krátkej úprave)

$$\mathbf{p}(n) = \begin{pmatrix} \frac{29}{41} & \frac{2}{41} & \frac{10}{41} \end{pmatrix} +$$

$$+\left(\frac{1}{5\sqrt{2}}\right)^n \left(\frac{12}{41}\cos\left(n\frac{\pi}{4}\right) + \frac{26}{41}\sin\left(n\frac{\pi}{4}\right); \quad -\frac{2}{41}\cos\left(n\frac{\pi}{4}\right) - \frac{18}{41}\sin\left(n\frac{\pi}{4}\right); \quad -\frac{10}{41}\cos\left(n\frac{\pi}{4}\right) - \frac{8}{41}\sin\left(n\frac{\pi}{4}\right) \right).$$

Pre ilustráciu vypočítajme $\boldsymbol{p}(5)$ pomocou iterácií a explicitného vyjadrenia $\boldsymbol{p}(n)$.

$$\mathbf{p}(3) = \mathbf{p}(2)\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \frac{177}{250} & \frac{6}{125} & \frac{61}{250} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{p}(4) = \mathbf{p}(3)\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \frac{442}{625} & \frac{61}{1250} & \frac{61}{250} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{p}(5) = \mathbf{p}(4)\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \frac{8841}{12500} & \frac{61}{1250} & \frac{3049}{12500} \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{p}_1(5)=\frac{(1-i)^5(6+13i)}{4100000}-\frac{(1+i)^5(13i-6)}{4100000}+\frac{29}{41}=\frac{8841}{12500}$$
$$\mathbf{p}_2(5)=-\frac{(1-i)^5(1+9i)}{4100000}+\frac{(1+i)^5(9i-1)}{4100000}+\frac{2}{41}=\frac{61}{1250}$$
$$\mathbf{p}_3(5)=-\frac{(1-i)^5(5+4i)}{4100000}+\frac{(1+i)^5(4i-5)}{4100000}+\frac{10}{41}=\frac{3049}{12500}$$

$$\mathbf{p}_1(5)=\left(\frac{1}{5\sqrt{2}}\right)^5\left(\frac{12}{41}\cos\left(5\frac{\pi}{4}\right)+\frac{26}{41}\sin\left(5\frac{\pi}{4}\right)\right)+\frac{29}{41}=\frac{8841}{12500}$$
$$\mathbf{p}_2(5)=\left(\frac{1}{5\sqrt{2}}\right)^5\left(-\frac{2}{41}\cos\left(5\frac{\pi}{4}\right)-\frac{18}{41}\sin\left(5\frac{\pi}{4}\right)\right)+\frac{2}{41}=\frac{61}{1250}$$
$$\mathbf{p}_3(5)=\left(\frac{1}{5\sqrt{2}}\right)^5\left(-\frac{10}{41}\cos\left(5\frac{\pi}{4}\right)-\frac{8}{41}\sin\left(5\frac{\pi}{4}\right)\right)+\frac{10}{41}=\frac{3049}{12500}$$

Vidíme, že postup riešenia s podporou open source systému je prehľadnejší a podstatne jednoduchší, čo sa týka náročnosti.

Je dôležité poznamenať, že pokiaľ by nám stačilo poznať iba hodnotu vektora absolútnych pravdepodobností pre niektoré konkrétne n, resp. pre všetky $n \leq n_0$, kde n_0 je nejaké prirodzené číslo, je podstatne jednoduchšie využiť vhodný program, ktorý generuje iterácie vektorov absolútnych pravdepodobností.

Následné uvádzame dva takéto skripty v open source programe Maxima

Obr. 4: Výpočet vektora/vektorov absolútnych pravdepodobností pomocou iterácií. Prvý skript zahrňuje prvé štyri príkazy. Druhý sa odlišuje od prvého iba posledným príkazom, ktorý nahradíme v poradí štvrtým príkazom.

```
-->  /* Zadaj maticu pravdepodobností prechodu*/
     P:matrix(...)

-->  /* Zadaj začiatočný vektor pravdepodobností*/
     p[0]:matrix(...)

-->  /* Zadaj hodnotu začiatočnej iterácie*/
     n0:...

-->  /* Dostaneme iba výpis jednej hodnoty*/
     p:p[0]
     for n:1 while n<=n0 do p:p.P
     p
```

```
--> /* Dostaneme výpis všetkých hodnôt od n = 1 do n = n0*/
    for n:1 while n<=n0 do
    (p[n]:p[n-1].P,
    print("p(",n,")=",p[n]))
```

Príklad 5. Nech

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 & 0 \\ 0{,}8 & 0 & 0{,}2 \\ 0 & 0{,}8 & 0{,}2 \end{pmatrix}$$

je matica pravdepodobností prechodu v bonus-malus systéme ([1], str. 203). Poistenec sa nachádza v druhej bonus-malus triede. Určme vektor absolútnych pravdepodobností a vypočítajte vektor stacionárnych pravdepodobností a pravdepodobnosť s akou sa bude poistenec nachádzať v jednotlivých bonus-malus triedach po piatich rokoch.

Riešenie. Najjednoduchší výpočet posledných dvoch úloh je pomocou iterácií, použitím vyššie uvedeného programu s výpisom iba poslednej iterácie. Dostaneme

$$\mathbf{p}(5) = (0{,}76288;\quad 0{,}1856;\quad 0{,}05152).$$

Vektor stacionárnych pravdepodobností budeme aproximovať vektorom $\mathbf{p}(100)$. Dostaneme

$$\mathbf{p}(100) = (0{,}7619047619047643;\quad 0{,}1904761904761911;\quad 0{,}04761904761904777).$$

Výpočet explicitného vyjadrenia vektora $\mathbf{p}(n)$ dáva

$$(\mathbf{E} - z\mathbf{P})^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{-25+5z+4z^2}{4z^3-4z^2-25z+25} & -\frac{z^2-5z}{4z^3-4z^2-25z+25} & \frac{z^2}{4z^3-4z^2-25z+25} \\ -\frac{4z^2-20z}{4z^3-4z^2-25z+25} & \frac{25-25z+4z^2}{4z^3-4z^2-25z+25} & -\frac{4z^2-5z}{4z^3-4z^2-25z+25} \\ \frac{16\cdot z^2}{4z^3-4z^2-25z+25} & -\frac{16\cdot z^2-20\cdot z}{4z^3-4z^2-25z+25} & -\frac{-25+20\cdot z+4z^2}{4z^3-4z^2-25z+25} \end{pmatrix}$$

$$(0;1;0)(\mathbf{E} - z\mathbf{P})^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{4z^2-20z}{4z^3-4z^2-25z+25} & \frac{25-25z+4z^2}{4z^3-4z^2-25z+25} & -\frac{4z^2-5z}{4z^3-4z^2-25z+25} \end{pmatrix}.$$

Vektor absolútnych pravdepodobností určíme tak, ako v predchádzajúcich príkladoch využitím procedúry “solve_rec“ v Maxime. Dostaneme

$$\mathbf{p}(n) = \begin{pmatrix} \frac{16}{21} & \frac{4}{21} & \frac{1}{21} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{2^n}{3\cdot 5^n} - \frac{3\cdot(-2)^n}{7\cdot 5^n} & \frac{2^{n-1}}{3\cdot 5^n} - \frac{9\cdot(-2)^{n-1}}{7\cdot 5^n} & \frac{2^{n-1}}{3\cdot 5^n} + \frac{3\cdot(-2)^{n-1}}{7\cdot 5^n} \end{pmatrix}.$$

odkiaľ vieme priamo vypočítať presnú hodnotu vektora stacionárnych pravdepodobností, ktorá je $\begin{pmatrix} \frac{16}{21} & \frac{4}{21} & \frac{1}{21} \end{pmatrix}$.

Vypočítajme ešte chybu aproximácie vektora stacionárnych pravdepodobnosti vektorom $\mathbf{p}(100)$.

$$\begin{pmatrix} \frac{16}{21} & \frac{4}{21} & \frac{1}{21} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0,7619047619047643 & 0,1904761904761911 & 0,04761904761904777 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -2,442490654175344 \cdot 10^{-15} & -6,383782391594650 \cdot 10^{-16} & -1,526556658859590 \cdot 10^{-16} \end{pmatrix}.$$

Záver

V práci boli prezentované dve metódy vyjadrenia vektora pravdepodobností Markovovho reťazca a to exaktná metóda jeho explicitného vyjadrenia a výpočtom pomocou iterácií. Pri explicitnom vyjadrení boli využité diferenčné rovnice a ich riešenie s podporou open source systému Maxima. Ukázali sme, že presnosť výpočtu vektora stacionárnych pravdepodobnosti aproximatívnym výpočtom pomocou iterácií (použitím dostatočného počtu operácií) dosahuje požadovanú presnosť.

Kľúčové slov

Markovove reťazce, vytvárajúce funkcie, vektor absolútnych pravdepodobností, diferenčné rovnice, Maxima – open source program

Klasifikácia JEL: C02, C10

Klasifikácia MSC (Mathematics Subject Classification): 60J10

Príspevok bol spracovaný v rámci riešenia grantovej úlohy VEGA č. 1/0806/14: Kalkulácia SCR na krytie rizík neživotného poistenia v súlade s potrebami praxe.

LITERATÚRA

[1] Fecenko, J. (2012) *Neživotné poistenie*. Ekonóm, Bratislava, ISBN 798-80-225-3400-0

[2] Horáková, G. – Huťka, V. (2012) *Teória pravdepodobnosti* 1, Ekonóm, Bratislava, ISBN 978-80-225-2888-7

[3] Huťka, V. (2002) *Teória pravdepodobnosti* 2, Ekonóm, Bratislava, ISBN 80-225-1573-6

[4] Janková, K.– Kilianová, S. – Brunovský, P. – Bokes, P. (2015) *Markovové reťazce a ich aplikácie*. Epos, Bratislava, ISBN: 97-880-5620-075-9

[5] Leydold, J. – Petry, M. (2016) *Introduction to Maxima for Economics, Institute for Statistics and Mathematics*, WU Wien http://statmath.wu.ac.at/~leydold/maxima/ (prístup 20.4.2016)

[6] Peller, F. – Pinda, Ľ. – Fecenko, J. (2001) *Matematika* 3, IURA EDITION, Bratislava, ISBN 80-88715-97-0

[7] Pfeiffer, P.E. (1990) *Probability for Applications*, Springer, New-York, ISBN-13: 978-1-4615-7678-5

[8] Sakálová, K. (2014) *Difference equations in Life Insurance Mathematics*. Managing and modelling of financial risks: 7th international scientific conference, PTS I-III Pages: 684-690, Ostrava

[9] Skřivánková, V. (2004) *Náhodné procesy a ich aplikácie*, UPJŠ Košice, ISBN 80-7097-542-3

RESUMÉ

Pomocou Markovových reťazcov je možne modelovať nepreberné množstvo úloh každodennej reality. Cieľom príspevku je prezentovať širšie možnosti použitia vytvárajúcich funkcií pre analýzu Markovových reťazcov s využitím teórie diferenčných rovníc a s podporou open source systému Maxima. Práca prezentuje originálnu metódu určovania explicitného vyjadrenia vektora absolútnych pravdepodobností v Markovových reťazcoch vytvorenú jedným z autorom príspevku. Zaoberá sa tiež výpočtom spomínaného vektora pravdepodobností iteračnou metódou a porovnáva presnosť odhadu vektora stacionárnych pravdepodobností touto metódou s exaktným výpočtom pomocou explicitného vyjadrenia.

SUMMARY

Use generating functions in the analysis of Markov chains

Markov chains can be modeled many of tasks of everyday reality. The aim of this paper is to present extensive opportunities of applications generating functions for the analysis of Markov chains using the theory of difference equations with supporting open source system Maxima and also to present an original method of determining an explicit expression a vector of absolute probabilities of Markov chains. It in addition deals with the calculation of said probability vector using an iterative method and compares the accuracy of the estimate vector stationary probability mentioned method with exact calculations using explicit expression.

Kontakt

Fecenko, Jozef, doc. RNDr., CSc., Katedra matematiky a aktuárstva, Fakulta hospodárskej informatiky, Ekonomická univerzita v Bratislave, Dolnozemská cesta 1, 852 35 Bratislava, tel. +421 2/672 95 814,
e-mail: jozef.fecenko@euba.sk

Frisová Simona, Ing., Asseco Central Europe, a. s., Trenčianska 56/A, 821 09 Bratislava, tel.: +421 220 838 611, simona.frisova@asseco-ce.com