Anna Strešňáková

MODELOVANIE PRAVDEPODOBNOSTI KRACHU POISŤOVNE V KONEČNOM ČASE

Úvod

Teória rizika v poisťovníctve sa venuje technikám modelovania a merania rizika spojeného s portfóliom poistných kontraktov. Prvé prístupy pozostávali z modelovania rozdelenia celkovej škody v časovej perióde použitím klasického kolektívneho modelu rizika. Ďalšie prístupy vychádzali zo záujmu poisťovníkov - aktuárov o analýzu vývoja prebytku poistnej spoločnosti vzhľadom na dlhšie časové obdobie. Vytvorené modely slúžia predovšetkým na posúdenie náhodných výkyvov v hodnote prebytku poisťovne v časovom intervale niekoľkých rokov.

Teória krachu poisťovne patrí do jednej z oblastí, ktorou sa zaoberá tória rizika a zaoberá sa analýzou modelu poistných rezerv. Základným problémom je určenie pravdepodobnosti krachu poisťovne, čím sa rozumie skutočnosť, že poistné rezervy by niekedy v budúcnosti mohli z určitej fixnej počiatočnej úrovne klesnúť pod nulovú hodnotu. Na určenie pravdepodobnosti krachu poisťovne sú rozpracované približné metódy určenia pravdepodobnosti krachu poisťovne v závislosti od počiatočných rezerv, výšky poistného, rizikovej prirážky a rôznych typov rozdelenia výšky poistných plnení.

Tým, že pravdepodobnosť krachu v konkrétnom čase je závislá od údajov v predchádzajúcom časovom okamihu, jednou z možností, ako v klasickom modeli prebytku v poisťovníctve vypočítať pravdepodobnosť krachu je využiť rekurentné algoritmy. Medzi prvými sa nimi zaoberali De Vylder a Goovaerts (1988) a Dickson a Waters (1991). Kľúčom pre algoritmus je, že rovina nahradená obdĺžnikovou mriežkou procesu prebytku so spojitým časom je aproximovaný procesom s diskrétnym časom, ktorého množina stavov je skupina rozložených bodov na osi premennej počet. Odvodenie pravdepodobnostných vlastností procesov aproximovaných diskretizáciou je jednoduchšie, ako odhad vlastností originálnych procesov. Jedným zo zjednodušujúcich prvkov je ten, že škálovanie vzhľadom na jednotku času môže byť také, že prijaté poistné a tým pádom aj maximálny prírastok je rovný jednej.

Dicksom a Waters (1999) odvodili rekurentný algoritmus na výpočet pravdepodobnosti krachu pre všeobecný model použitím diskretizácie, ktorú odvodili De Vylder a Goovaerts (1988) a Dickson a Waters (1991). Tento prístup má nedostatok v tom, že v každom fixnom intervale času maximálny prírastok prebytku je závislý nielen na intenzite prijímania poistného, ale aj od počiatočnej úrovne rezerv na začiatku intervalu. Dôsledok týchto komplikácií je, že výsledný algoritmus je nielen náročný čo sa týka výpočtov, ale aj čo sa týka času na spracovanie.

Numerické hodnoty pravdepodobnosti krachu v konečnom čase pre všeobecný model môže byť vyčíslený aj použitím metód, ktoré odvodili Sundt a Teugels (1995) alebo De Vylder (1996).

Ďalší numerický algoritmus bol prezentovaný Dicksonom a Watersom (1999) a neskôr algoritmus upravili Brekelman a De Waegenaere (2001). Dve posledné autorky rozdelili časový horizont do malých rovnomerných intervalov a odvodili algoritmus na odhad dolnej a hornej hranice pre pravdepodobnosť krachu pričom predpokladali, že poistné je prijímané vždy na začiatku, resp. na konci každého časového intervalu. Spriemerovaním týchto hraníc získali aproximáciu pravdepodobnosti krachu. Získané hodnoty boli rovnaké, ako nasimulované hodnoty pravdepodobnosti krachu.

Delbaen a Haezendonck (1987) použili techniku martingálov na získanie integrálnej rovnice na určenie pravdepodobnosti krachu. Vzťah, odvodený Sundtom a Teugelsom (1995), jednoduchším spôsobom vyjadril hornú hranicu pre pravdepodobnosť krachu či už v konečnom, či nekonečnom časovom horizonte. Tú istú techniku použili aj Boogaert a Crijns (1987), ale oni brali do úvahy aj záporné príjmy. V tomto zjednodušenom modeli rizika nie je potrebná podmienka čistého zisku a poisťovateľ pristúpi na možnosť straty, za podmienky zvýšenia konkurencieschopnosti poisťovne na trhu. Spomínaní autori získali hornú hranicu pravdepodobnosti krachu v konečnom aj nekonečnom časovom horizonte.

Ďalší komplikovaný, ale presný vzťah pre pravdepodobnosť krachu odvodili Knessl a Peters (1994) použitím Laplaceovej transformácie a rozvitím pomocou Bromwichovho vrstevnicového integrálu a zbiehajúcej sa hypergeometrickej funkcie. Knessl a Peters (1996) analyzovali asymptotické vlastnosti tohto presného výrazu a numerickým integrovaním získali aproximáciu pravdepodobnosti krachu v konečnom čase. Presný výsledok v špeciálnych prípadoch uviedol Albrecher s kolektívom (2001). Odvodili možnosť vyjadrenia doplnkovej pravdepodobnosti pomocou gamma postupnosti.

1 PROCES PREBYTKU A PRAVDEPODOBNOSŤ KRACHU

Prebytkom poisťovne na konci časového úseku $\langle 0,t\rangle$, $t\in(0,\infty)$ rozumieme hodnotu počiatočného poistného rezervného fondu, zvýšenú o prijaté poistné v období $\langle 0,t\rangle$ a zníženú o celkové poistné plnenie v období $\langle 0,t\rangle$. Pričom *t* je časový okamih vyjadrený v príslušných časových jednotkách (obyčajne roky)

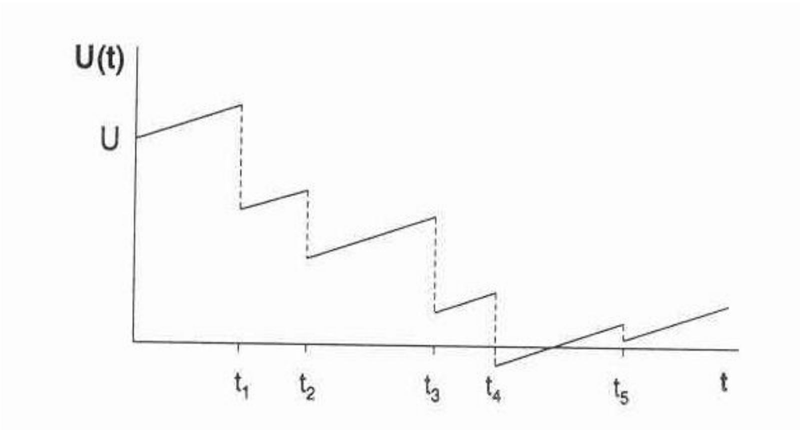
Základný model peňažných tokov poisťovne, resp. model prebytku poisťovne možno vyjadriť v tvare (odvodenie je možné pozrieť napríklad v Bühlmann (1970))

$$U(t)=U+c\cdot t-S(t) \tag{1}$$

kde

– $U(t)$ je prebytok poisťovne na konci časového úseku $\langle 0,t\rangle$,

- $U = U(0)$ je hodnota rezervného poistného fondu na začiatku sledovaného obdobia, teda prebytok poisťovne v čase $t = 0$
- c je konštantná miera intenzity prijímania poistného v časovom intervale jednotkovej dĺžky,
- $S(t)$ je výška celkového poistného plnenia v časovom intervale $\langle 0, t \rangle$,



Obr. 1 Proces prebytku poisťovne

Krachom poisťovne budeme rozumieť skutočnosť, že v určitom časovom okamihu prebytok poisťovne po prvý raz klesne na zápornú hodnotu.

Pravdepodobnosť krachu $\Psi(U)$ v nekonečnom časovom horizonte pri hodnote U počiatočného rezervného fondu definujeme:

$$\Psi(U) = P\big(U(t) < 0 \text{ pre } t \in (0, \infty)\big)$$

Pravdepodobnosť krachu v konečnom časovom okamihu τ definujeme:

$$\Psi(U) = P\big(U(\tau) < 0 \text{ pre } \tau \in (0, t)\big)$$

Pravdepodobnosť krachu v diskrétnom čase a nekonečnom časovom horizonte definujeme s časovou jednotkou h a pre všetky $n \in \mathrm{N}$

$$\Psi_h(U) = P\big(U(n \cdot h) < 0 \text{ pre } n = 1,2,3...\big)$$

a pravdepodobnosť krachu v konečnom diskrétnom časovom intervale:

$$\Psi_h(U, t) = P\big(U(n \cdot h) < 0 \text{ pre } n = 1,2,...,t/h\big)$$

2 PRAVDEPODOBNOSŤ KRACHU V KONEČNOM ČASOVOM HORIZONTE

Nech $\{N(t) : t \in \mathbf{R}^+\}$ označuje náhodný proces, ktorý ráta počet poistných plnení v poistnom portfóliu poisťovne. Predpokladajme, že je to homogénny

Poissonov proces s intenzitou λ. Nech $\{X_n : n \in \mathrm{N}\}$ je postupnosť nezávislých, identicky rozdelených náhodných premenných s funkciou hustoty $f(x)$, ktorá reprezentuje veľkosť poistných plnení. Pokiaľ pripustíme, že úroková intenzita δ je konštantná, potom výška *n*-tého poistného plnenia nie je rovná X_n, ako v klasickej teórii rizika, ale $e^{\delta T_n} X_n$, pričom T_n $(n \in \mathrm{N})$ znamená moment, v ktorom sa udiala *n*-tá poistná udalosť. V časovom intervale $\langle t, t+dt \rangle$ poisťovňa príjme poistné vo výške $c(t)dt$, pričom $c(t) = c \cdot e^{\delta t}$ a $c = c(0) > 0$ je intenzita prijímania poistného v čase $t = 0$. Okrem poistného poisťovňa získava ešte úrok z rezerv s konštantnou úrokovou intenzitou $\tilde{i}$ (ak platí, že $\tilde{i} = \delta = 0$, tak sa jedná o klasický model). Hodnota rezerv v čase t, označovaná ako $U(t)$ spĺňa rovnicu

$$dU(t) = c \cdot e^{\delta \cdot t} dt + U(t) \cdot \tilde{i} \cdot dt - e^{\delta \cdot t} \cdot X_{N_t} dN_t$$

Podrobnejšie model rozpracoval Bühlmann (1970). Nás zaujíma pravdepodobnosť, či poisťovňa prežije do času t, čiže, či je výška rezervy bude väčšia ako nula v každom časovom okamihu intervalu $\langle 0, t \rangle$:

$$\phi(x,t) = P\{U(s) \geq 0 \ \forall 0 \leq s \leq t | U(0) = U\},$$

s vyjadruje akýkoľvek okamih v rámci časového intervalu $\langle 0, t \rangle$, $U(s)$ vyjadruje výšku rezervy v okamihu *s*, *pričom* $U \geq 0$ znamená počiatočnú rezervu poisťovne. Nadväzne, pravdepodobnosť krachu je definovaná ako $\psi(x,t) = 1 - \phi(x,t)$.

Pre ľubovoľnú hodnotu času t platí nasledujúca integrálno diferenciálna rovnica pre pravdepodobnosť prežitia poisťovne v rámci konečného časového intervalu $\langle 0, t \rangle$ s počiatočnou hodnotou rezerv U a pre ľubovoľnú funkciu hustoty výšky poistných plnení f.

$$(c + iU)\frac{\partial \phi}{\partial U} - \frac{\partial \phi}{\partial t} - \lambda \cdot \phi + \lambda \int_0^U \phi(U - x, t) \cdot f(x) dx = 0 \qquad (2)$$

s počiatočnou podmienkou, že $\phi(U,0) = 1$, pričom $i = \tilde{i} - \delta$ znamená reálnu konštantnú úrokovú intenzitu a predpokladá sa, že jej hodnota je kladná.

2.1 Rekurentné vzťahy pre pravdepodobnosť krachu

Rovnica (2) je všeobecnou rovnicou, ktorej riešenie má pomôcť pri špecifikovaní času krachu poisťovne pri známych počiatočných podmienkach – hodnotu začiatočnej rezervy či hustoty výšky poistných plnení. Riešenie danej rovnice pomocou matematického aparátu je zložité a niekedy nepomôžu ani softvérové balíky. Zaujímavá je preto otázka, aký nástroj nájsť, aby hľadanie riešenia rovnice bolo v časovo prijateľnom horizonte.

2.1.1 Vyjadrenie pravdepodobnosti prežitia pomocou gamma funkcií

Jednou z možností je využiť dostupné numerické metódy. Riešenie rovnice (2) budeme hľadať v tvare

$$\phi(U,t) = a_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \cdot P(n, \alpha U) \tag{3}$$

pričom $a_n(t) \in \mathrm{R}$ sú koeficienty, pre $n \in \mathrm{N}$ (koeficient $\alpha \in R$ je pridaný umelo vzhľadom na zjednodušenie odvodzovania nasledujúcich vzťahov).

Nech gamma funkcia je definovaná v tvare $\Gamma(a) = \int_0^{\infty} x^{a-1} \cdot e^{-x} dx$

a neúplná gamma funkcia je daná vzťahom $\Gamma(a,b) = \int_b^{\infty} x^{a-1} \cdot e^{-x} dx$ (pozri Horáková 2015).

Potom $P(n, \alpha U)$ je neúplná gamma funkcia v tvare

$$P(n, \alpha U) = \frac{1}{\Gamma(n)} \cdot \int_0^{\alpha U} x^{n-1} e^{-x} dx \quad , \alpha > 0, n > 0.$$

Predpokladajme, že distribučná funkcia výšky poistných plnení $F(x)$ sa dá tiež rozvinúť do radu pomocou tej istej neúplnej gamma funkcie

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \cdot P(n, \alpha x)$$

Pre kladné a celé hodnoty n sa neúplná gamma funkcia dá napísať pomocou nasledujúceho vzťahu $j \in \mathrm{N}$

$$P(n, \alpha U) = 1 - e^{-\alpha U} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(\alpha.U)^j}{j!}$$

a aby sme mohli zjednodušiť vzťah (2), potrebujeme vyjadriť deriváciu neúplnej gamma funkcie podľa premennej U

$$\frac{\partial P(n,\alpha U)}{\partial U}=\alpha\cdot e^{-\alpha U}\sum_{j=1}^{n-1}\frac{(\alpha U)^j}{j!}-e^{-\alpha U}\sum_{j=1}^{n-1}\frac{\partial}{\partial U}\frac{(\alpha U)^j}{j!}=$$
$$=\alpha\cdot e^{-\alpha U}\sum_{j=1}^{n-1}\frac{(\alpha U)^j}{j!}-e^{-\alpha U}\sum_{j=1}^{n-1}j\cdot\alpha\frac{(\alpha U)^{j-1}}{j!}=\alpha\cdot e^{-\alpha U}\sum_{j=1}^{n-1}\frac{(\alpha U)^j}{j!}-$$
$$-\alpha\cdot e^{-\alpha x}U\sum_{j=1}^{n-1}\frac{(\alpha U)^{j-1}}{(j-1)!}==\alpha\cdot\left(\left(1-e^{-\alpha U}\sum_{j=1}^{n-1}\frac{(\alpha U)^{j-1}}{(j-1)!}\right)-\left(1-e^{-\alpha U}\sum_{j=1}^{n-1}\frac{(\alpha U)^j}{j!}\right)\right)=$$
$$=\alpha\big(P(n-1,\alpha U)-P(n,\alpha U)\big)\quad n=1,2,3,... \tag{4}$$

pričom $P(0,\alpha U)=1$ a využitím predchádzajúceho vzťahu získame súčin rezerv a derivácie neúplnej gamma funkcie v tvare

$$U\frac{\partial P(n,\alpha U)}{\partial U}=U\cdot\left(\alpha\cdot e^{-\alpha U}\sum_{j=1}^{n-1}\frac{(\alpha U)^j}{j!}-\alpha\cdot e^{-\alpha U}\sum_{j=1}^{n-1}\frac{(\alpha U)^{j-1}}{(j-1)!}\right)=$$
$$=n.e^{-\alpha U}\cdot\frac{(\alpha U)^n}{(n)!}=n\big(P(n,\alpha U)-P(n+1,\alpha U)\big)$$

Využitím predchádzajúcich vzťahov rovnica (2) prejde do tvaru

$$c\cdot\sum_{n=1}^{\infty}a_n(t)\cdot\alpha.\cdot\big(P(n-1,\alpha U)-P(n,\alpha U)\big)+i\cdot\sum_{n=1}^{\infty}a_n(t)\cdot n.\cdot\big(P(n,\alpha U)-P(n+1,\alpha U)\big)=$$
$$=a_0'(t)+\sum_{n=1}^{\infty}a_n'(t)P(n,\alpha U)+\lambda\cdot a_0(t)+\lambda\cdot\sum_{n=1}^{\infty}a_n(t)P(n,\alpha U)-$$
$$-\lambda\int_0^U\big[a_0(t)\cdot P(n,\alpha(U-x))\big]\cdot\sum_{n=1}^{\infty}f_n dP(n,\alpha x) \tag{5}$$

Následnými úpravami vyjadríme rekurentné vzťahy pre koeficienty $a_n(t)$

$$a_1(t)=\frac{1}{\alpha\cdot c}\big(a_0'(t)+\lambda\cdot a_0(t)\big)$$

a pre $n\in\mathrm{N}$

$$a_{n+1}(t)=\frac{1}{\alpha\cdot c}\big((\lambda+\alpha c-in)\cdot a_n(t)+a_n'(t)+i\cdot(n-1)\cdot a_{n-1}(t)-\lambda\{\mathrm{a}(t)*\mathrm{f}\}\big) \tag{6}$$

pričom $\{\mathrm{a}(t)*\mathrm{f}\}=a_0(t).f_n+a_1(t)\cdot f_{n-1}+...+a_{n-1}f_1$ pre $n\in\mathrm{N}$ je konvolúcia dvoch postupností $\mathrm{a}(t)=a_0(t),a_1(t),...$ a $\mathrm{f}=f_1,f_2...$ Nahradením $U=0$ vo vzorci (3) môže postupnosť koeficientov $a_n(t)$ začať hodnotou

$$a_0(t) = \phi(0,t)$$

Pokiaľ rozvoj distribučnej funkcie výšky poistných plnení obsahuje len konečný počet členov, tak rovnicu (6) môžeme zjednodušiť do tvaru diferenciálnej rovnice (pre $f_n = 0$ a pre $n > S$)

$$\begin{aligned} a_{n+1}(t) = \frac{1}{\alpha \cdot c}\Big(&\left(\lambda + \alpha c - in\right)\cdot a_n(t) + a_n'(t) + i\cdot(n-1)\cdot a_{n-1}(t) - \\ &-\lambda\cdot\left(f_1\cdot a_{n-1}(t) + f_2\cdot a_{n-2}(t) + \ldots + f_S\cdot a_{n-S}(t)\right)\Big) \end{aligned} \tag{7}$$

Pokiaľ sa výška poistných plnení riadi exponenciálnym rozdelením, tak funkcia hustoty má tvar $f(x) = \beta \cdot e^{-\beta x}$ a $S = 1,\ f_1 = 1$, a takto dostaneme lineárny rekurentný vzorec druhého rádu

$$a_{n+1}(t) = \frac{1}{\beta\cdot c}\Big(\left(\lambda + \beta\cdot c - in\right)\cdot a_n(t) + a_n'(t) + \left(i\cdot(n-1) - \lambda\right)\cdot a_{n-1}(t) \Big) \tag{8}$$

2.2.2 Rekurentné vzťahy na aproximáciu pravdepodobnosti prežitia pre výšku poistných plnení riadiacich sa exponenciálnym rozdelením

Vzťah (8) nám umožňuje objaviť existenciu jednoduchého riešenia rovnice (2) v závislosti od zvolených parametrov. Zameriame sa na prípad, keď sa výška poistných plnení riadi exponenciálnym rozdelením.

Nech sa výška poistných plnení riadi exponenciálnym rozdelením s parametrom β a nech parameter λ je zvolený tak, že je násobkom reálnej konštantnej úrokovej intenzity i

$$\lambda = k\cdot i\ ,(k \in \mathrm{N}) \tag{9}$$

Potom pravdepodobnosť prežitia v konečnom čase je daná vzťahom

$$\phi(U,t) = a_0(t) + \sum_{n=1}^{k} a_n(t)\cdot P(n,\alpha U) \tag{10}$$

a je potrebný len jednoduchý algoritmus na výpočet $a_n(t)$, pričom vzťah (9) je nutná podmienka na vyjadrenie konečného vzťahu pre funkciu prežitia $\phi(U,t)$

Možnosť, ako celý vzťah zjednodušiť a docieliť, aby od určitého koeficientu n_0 členy $a_n(t)$ nadobudli nulovú hodnotu je, že sa zachováva vzťah $i(n_0 - 1) - \lambda = 0$ (pravdaže vzhľadom na fakt, že $0 < a_0(t) = \phi(0,t) \leq 1$).

Pri akceptovaní podmienky $\lambda = k\cdot i,(k \in \mathrm{N})$ sa jednoduchým spôsobom obmedzí počet členov vo vzťahu (3) na konečný počet členov. (Každopádne, je možné pracovať aj so všetkými členmi rozvoja pre $k \in \mathrm{N}$.) My sa však pokúsime dokázať, že pre fixné $k \in \mathrm{N}$ je každý člen $a_{k+j}(t) = 0, \forall j \geq 1$. Táto podmienka vedie ku homogénnej diferenciálnej rovnici

$$\sum_{n=1}^{k} c_j \cdot a_0^{(j)}(t) = 0 \tag{11}$$

s konštantnými koeficientami c_j, pričom $a_0^{(j)}(t)$ znamená j –tú deriváciu $a_0(t)$. Intuitívne sa dá dokázať, že $c_j > 0$ pre $j \geq 0$ a $c_0 = 0$.

Ďalej predpokladajme, že korene $-R_j, j = 0,1,...k+1$ charakteristickej rovnice diferenciálnej rovnice (11) sú jednoznačné. Potom

$$a_0(t) = \phi(0,t) = A_0 + \sum_{j=1}^{k+1} A_j \cdot e^{-R_j.t} \tag{12}$$

V prípade, že $\lambda = 1 \cdot i$, odvodili Knessl a Peters (1994) presné riešenie a je rovnaké ako riešenie odvodené pomocou gamma funkcie v nasledujúcom tvare, pričom i znamená reálnu konštantnú úrokovú intenzitu

$$\phi(U,t) = 1 - \frac{i}{i + \beta \cdot c} \cdot e^{-\beta \cdot U} \cdot \left(1 - e^{-(i+\beta \cdot c) \cdot t}\right) \tag{13}$$

V prípade, že $\lambda = 2 \cdot i$, odvodí sa presné riešenie rovnice (2) pre funkciu hustoty $f(x) = \beta \cdot e^{-\beta.x}$ v tvare:

$$\phi(U,t) = b_o(t) + \left(1 - e^{-\beta \cdot U}\right) \cdot b_1(t) + \left(1 - e^{-\beta \cdot U} - \beta \cdot U \cdot e^{-\beta \cdot U}\right) \cdot b_2(t) \tag{14}$$

$$b_o(t) = \frac{\beta^2 \cdot c^2 \cdot D + e^{-R_1 \cdot t}\left(i^2 \cdot \beta \cdot c + D \cdot \left(i \cdot \beta \cdot c + i^2\right) - i^3\right) + e^{-R_2 \cdot t}.\left(-i^2 \cdot \beta \cdot c + i^3 + D \cdot \left(i \cdot \beta \cdot c + i^2\right)\right)}{D \cdot \left(\beta^2 \cdot c^2 + 2i \cdot \beta \cdot c + 2i^2\right)}$$

$$b_1(t) = \frac{i\left(2 \cdot D \cdot \beta \cdot c - e^{-R_1 \cdot t}.\left(-4 \cdot i^2 - i \cdot \beta \cdot c + D \cdot \beta \cdot c\right) - e^{-R_2 \cdot t}.\left(4 \cdot i^2 + \beta \cdot c + D \cdot \beta \cdot c\right)\right)}{D \cdot \left(\beta^2 \cdot c^2 + 2i \cdot \beta \cdot c + 2i^2\right)}$$

$$b_2(t) = \frac{i^2\left(e^{-R_1 \cdot t} \cdot \left(2 \cdot \beta \cdot c + 3i + D\right) - 2D + e^{-R_2 \cdot t}.\left(-2\beta \cdot c - 3i + D\right)\right)}{D \cdot \left(\beta^2 \cdot c^2 + 2i \cdot \beta \cdot c + 2i^2\right)}$$

$$R_1(t) = \frac{2\beta \cdot c + 3i - D}{2}, \; R_1(t) = \frac{2 \cdot \beta \cdot c + 3i + D}{2}, \; D = \sqrt{i \cdot \left(4 \cdot \beta \cdot c + i\right)}$$

3 MODELOVANIE PRAVDEPODOBNOSTI KRACHU

Na určenie pravdepodobnosti krachu pomocnou rekuretných vzorcov odvodených v predchádzajúcej kapitole sme použili softvér Mathcad 8. Používanie softvéru je spoplatnené. Prostredie tohto softvéru je užívateľsky veľmi prirodzené a jednoduché. Zadávanie premenných a vzťahov medzi nimi prebieha v priraďovaní hodnôt cez príslušné identifikátory na mieste kliknutia myšou. Pri spracovávaní údajov sme vstupné parametre zadali na začiatku nového súboru, pod nimi vzťah medzi nimi a vstupné údaje, ktoré sa menili, sme zadávali cez pole - ako vektory. Výsledky boli tým pádom spracované v druhom stĺpci pri zadaných vektoroch, takže vznikla hneď tabuľka vhodná na interpretáciu bez ďalšieho spracovania (viac v Strešňáková, 2006).

Určovali sme senzitívnosť celého modelu vzhľadom na konštantné vstupné parametre a meniacu sa hodnotu počiatočnej úrovne rezerv. Celý model vypočíta pravdepodobnosť krachu poisťovne v konkrétnom časovom okamihu.

Tabuľka 1: Pravdepodobnosť krachu pre parametre $\beta = 1, \lambda = 1, c = 2, i = 1$

Čas	**Pravdepodobnosť krachu pre *U*=0**	**Pravdepodobnosť krachu pre *U*=10**	**Pravdepodobnosť krachu pre *U*=20**
0	0,0000000000000000	0,000000000000000	0,000000000000000
1	0,31673764387737900	0,000014379866785	0,000000000652845
2	0,33250708260777800	0,000015095798196	0,000000000685348
3	0,33329219673197100	0,000015131442322	0,000000000686966
4	0,33333128526254900	0,000015133216939	0,000000000687047
5	0,33333323136589300	0,000015133305292	0,000000000687051
6	0,33333332825667300	0,000015133309690	0,000000000687051
7	0,33333333308058100	0,000015133309909	0,000000000687051
8	0,33333333332075000	0,000015133309920	0,000000000687051
9	0,33333333333270700	0,000015133309921	0,000000000687051
10	0,33333333333330200	0,000015133309921	0,000000000687051

Tabuľka 2: Pravdepodobnosť krachu pre koeficienty $\beta = 1, \lambda = 1, c = 2, i = 0{,}5$.

Čas	**Pravdepodobnosť krachu pre *U*=0**	**Pravdepodobnosť krachu pre *U*=10**	**Pravdepodobnosť krachu pre *U*=20**
0	0	0	0
1	0,3413904253357800	0,00003960874854980200	0,000000000289281065768
2	0,3774553367424030	0,00005001777880708760	0,00000000376361375398
3	0,3833456323798540	0,00005195863727858180	0,00000000392770260760
4	0,3843881431805360	0,00005230817117563010	0,00000000395729149449
5	0,3845746687128940	0,00005237084874609720	0,00000000396259813851
6	0,3846080882712340	0,00005238208179014760	0,00000000396354915555

7	0,3846140770759680	0,00005238409483077070	0,0000000396371968581
8	0,3846151502975650	0,00005238445557864670	0,0000000396374999490
9	0,3846153426244080	0,00005238452022660040	0,0000000396375565703
10	0,3846153770903820	0,00005238453181188870	0,0000000396375676726

Záver

Odhad pravdepodobnosti krachu poisťovne patrí medzi jednu z možností, kde sa dajú využiť numerické metódy riešenia integrálnych či diferenciálnych rovníc. V našom článku sme sa zamerali len na jednu z možností aplikácie rekuretných vzorcov aplikovaných na výšku poistných plnení riadiacich sa exponenciálnym rozdelením. Odvodené metódy nám poskytujú riešiť rovnice, ktorých spracovanie štandardným spôsobom by bolo zložité a v niektorých prípadoch až nemožné.

Pomocou numerických metód sme zistili senzitívnosť poisťovne na zvyšujúcu sa úroveň počiatočných rezerv. Model potvrdil, že so zvyšujúcou sa úrovňou počiatočných rezerv klesá pravdepodobnosť krachu poisťovne a pravdepodobnosť krachu stúpa s rastúcou hodnotou časového okamihu.

Kľúčové slová

teória rizika, pravdepodobnosť krachu v konečnom čase, rekurentné vzorce,

Klasifikácia JEL

G22

LITERATÚRA

[1] ALBRECHER, H. – TEUGELS, J. L. – TICHY, R. F. 2001. *On a gamma series expansion for the time-dependent probability of collective ruin.* Insurance: Mathematics and Economics, 29(3):345–355.

[2] BOOGAERT, P. – CRIJNS, V. 1987. *Upperbounds on ruin probabilities in case of negative loadings and positive interest rates*. Insurance: Mathematics and Economics, Volume 6, Issue 3, , Pages 221-232, ISSN 0167-6687,

[3] BREKELMANS, R. – De WAEGENAERE, A. 2001. *Approximating the finite-time ruin probability under interest force*. Insurance: Mathematics and Economics, 29(2):217–229.

[4] BÜHLMANN, H. 1970. *Mathematical methods in Risk theory*. New York: Springer. ISBN 978-3-540-30711-2,

[5] DELBAEN. F. – HAEZENDONCK, J. 1997. *Classical risk theory in an economic enviroment.* Insurance: Mathematics and Economics, 6:85-116.

[6] De VYLDER, F. – GOOVAERTS, M. 1988. *Recursive calculation of finite-time ruin probabilities.* Insurance: Mathematics and Economics, 7:1–7.
[7] DICKSON, D. C. M. – WATERS, H. R. (1999). *Ruin probabilities with compounding assets*. Insurance: Mathematics and Economics, 25(1):49–62.
[8] HORÁKOVÁ, G. – PÁLEŠ, M. – SLANINKA, F. 2015. *Teória rizika v poistení.* Bratislava: Wolters Kluwer, 420 s. ISBN 978-80-8168-273-5.
[9] KNESSL, C. – PETERS, C. S. (1994). Exact and asymptotic solutions for the time-dependent problem of collective ruin. I. SIAM Journal on Applied Mathematics, 54(6):1745–1767.
[10] KNESSL, C. – PETERS, C. S. (1996). Exact and asymptotic solutions for the time–dependent problem of collective ruin. II. SIAM Journal on Applied Mathematics,56(5):1471–1521.
[11] PANJER, H. H. – WILLMOT, G. E. 1992. *Insurance risk models*, Schaumburg: Society of Actuaries,
[12] STREŠŇÁKOVÁ, A. 2006. *Numerické metódy odhadu pravdepodobnosti krachu poisťovne* : dizertačná práca. Bratislava, 130 s.
[13] SUNDT, B. – TEUGELS, J. L. (1995). *Ruin estimates under interest force.* Insurance: Mathematics and Economics, 16:7-17.

RESUMÉ

Teória krachu poisťovne je dôležitou súčasťou procesu života poisťovne. Pri určovaní pravdepodobnosti krachu sa používajú rôzne metódy, v závislosti od počiatočných podmienok. Od množstva vstupných parametrov potom závisí i náročnosť celého procesu a spracovania. V článku sme rozoberali možnosť určenia pravdepodobnosti krachu pomocou rekurentných algoritmov aplikovaných v modeli prebytku poisťovne. Pre špeciálne prípady, kedy sa výška poistných udalostí riadi exponenciálny rozdelením. Skúmali sme senzitivitu modelu na výšku počiatočných rezerv poisťovne. Pravdepodobnosť krachu vzrastala v pribúdajúcim časom (výška poistných udalostí znižovala výšku rezerv poisťovne) a so vzrastajúcou výškou počiatočnej rezervy sa pravdepodobnosť krachu znižovala. Rekurentné vzorce sú skvelým nástrojom v prípadoch, keď riešenie integrálno diferenciálnych rovníc ani s pomocou softvérov nie je možné, poprípade je zdĺhavé.

SUMMARY

The theory of the ruin of the insurance company is import part of the process of life insurance. In determining the probability of ruin, various methods are used, depending on the initial conditions. The amount of input parameters then depends inefficiency and processing. The article discussed the possibility of determining the probability of ruin by recursive algorithms applied to the model of excess insurance, for special cases, where the amount of insurance claims is governed by the exponential distribution. We investigated the sensitivity of the model to the amount of initial reserves of the company. Probability of ruin get bigger increase over time (amount of insurance claims reduce the amount of insurance reserves) and with increasing the amount of initial

margin is reduced probability of ruin. Recursive formulas are a great tool in cases where the solution of integral and differential equations even with the software is not possible or is lengthy.

Kontakt

RNDr. Anna Strešňáková, PhD. Katedra matematiky a aktuárstva, Fakulta hospodárskej informatiky Ekonomickej univerzity v Bratislave, Dolnozemská 1/b, 852 35 Bratislava. 02/ 67 295 836, anna.stresnakova@euba.sk