Využitie doplnku Riešiteľ pri zabezpečení a analýze rizika

Using the Solver Add-in in Insurance Risk Management and Analysis

František Slaninka[1], Zsolt Simonka[2], Zuzana Krátka[3]

Abstrakt
Zaistenie predstavuje čoraz významnejší nástroj zabezpečenia poistného rizika. Efektívne riadenie rizika si vyžaduje dôkladnú analýzu úrovne rizika poisťovne prostredníctvom kvantitatívnych ukazovateľov, ako sú hodnota v riziku (VaR), podmienená hodnota v riziku (CVaR) a pravdepodobnosť krachu. Tvorba scenárov pre rôzne parametre rozdelení a štruktúr zaistenia umožňuje identifikovať optimálne nastavenia, ktoré reflektujú požiadavky poisťovateľa na ziskovosť a solventnosť. Doplnok programu Microsoft Excel – Riešiteľ – patrí medzi najdostupnejšie a najpoužívanejšie nástroje optimalizácie v poistnej a finančnej praxi. Vďaka svojej efektívnosti, jednoduchému ovládaniu a dostupnosti je vhodný nielen na vzdelávacie účely, ale aj na praktickú analýzu a optimalizáciu rizika. Pri aplikácii na poistné dáta môže Riešiteľ pomáhať pri kalibrácii parametrov a hodnotení zaistných stratégií pri rôznych rizikových obmedzeniach. Článok ukazuje, ako možno doplnok Riešiteľ využiť ako efektívny a transparentný analytický nástroj pri skúmaní vzťahu medzi štruktúrou proporcionálneho zaistenia, úrovňou rizika a kapitálovou primeranosťou.

Kľúčové slová
zaistenie; hodnoty VaR a CVaR; pravdepodobnosť krachu; doplnok Riešiteľ

Abstract
Reinsurance represents an increasingly important tool for securing insurance risk. Effective risk management requires a thorough analysis of the insurer's level of risk through quantitative indicators such as the Value at Risk (VaR), Conditional Value at Risk (CVaR), and the probability of ruin. Scenario modelling based on different distribution parameters and reinsurance structures enables the identification of optimal configurations that reflect the insurer's expectations regarding profitability and solvency. The Solver Add-in in Microsoft Excel is among the most accessible and widely used optimisation tools in actuarial and financial practice. Due to its efficiency, ease of use, and availability, it is suitable not only for educational purposes but also for practical risk analysis and optimisation. When applied to insurance data, the Solver can assist in parameter calibration and the evaluation of reinsurance strategies under various risk constraints. The article demonstrates how the Solver add-in can be used as an effective and transparent analytical tool for examining the relationship between the structure of proportional reinsurance, the level of risk, and capital adequacy.

Key words
reinsurance; VaR and CVaR values; probability of ruin; Solver Add-in

[1] Ekonomická univerzita v Bratislave, Fakulta hospodárskej informatiky, Katedra matematiky a aktuárstva, Dolnozemská cesta 1, 852 35, Bratislava, frantisek.slaninka@euba.sk.

[2] Ekonomická univerzita v Bratislave, Fakulta hospodárskej informatiky, Katedra matematiky a aktuárstva, Dolnozemská cesta 1, 852 35, Bratislava, zsolt.simonka@euba.sk.

[3] Ekonomická univerzita v Bratislave, Fakulta hospodárskej informatiky, Katedra matematiky a aktuárstva, Dolnozemská cesta 1, 852 35, Bratislava, zuzana.kratka@euba.sk.

JEL classification
C61, G22, G32

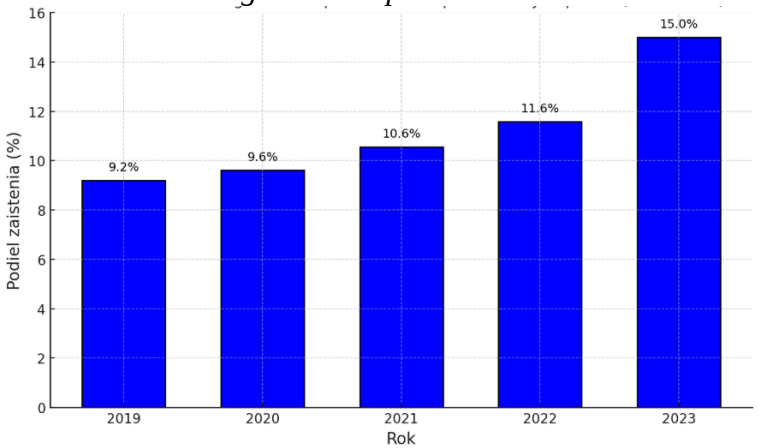
1 Úvod

Zaistenie predstavuje formu „poistenia poistenia“ – ide o mechanizmus, prostredníctvom ktorého poisťovňa prenáša časť svojho poistného rizika na iného poskytovateľa, zaisťovateľa. Cieľom je obmedziť finančné dôsledky nadmerných alebo kumulatívnych škôd, a tým stabilizovať výsledky hospodárenia. Význam zaistenia spočíva najmä v redukcii rizika poisťovateľa, v posilnení jeho solventnosti a v udržaní schopnosti plniť záväzky aj pri výskyte neobvyklých škodových udalostí. Zaistenie tak prispieva k dlhodobej stabilite poistného trhu a k posilneniu dôvery investorov aj regulátorov.

Podľa Cipru (2004) medzi najdôležitejšie funkcie zaistenia patrí rozloženie rizika, pri ktorom poisťovňa prenáša časť prevzatého rizika na zaisťovateľa s cieľom zvládnuť veľké straty, napríklad v prípade katastrofických udalostí, ako sú záplavy či zemetrasenia. Ďalšou funkciou je homogenizácia poistného kmeňa, ktorá umožňuje prostredníctvom vhodne zvoleného zaistenia vytvoriť z poistného portfólia homogénnejšiu skupinu rizík. Zaistenie zároveň prispieva k zvýšeniu kapacity poisťovne, pretože jej umožňuje prijímať väčší počet poistných zmlúv alebo pokrývať riziká s vyššími poistnými sumami, než by bolo možné bez zaistenej ochrany. Dôležitou funkciou je stabilizácia finančných výsledkov, keďže zaistenie pomáha vyhladzovať výkyvy v ziskovosti spôsobené nepredvídateľnými udalosťami a veľkými stratami. Rovnako významná je ochrana solventnosti, ktorá spočíva v tom, že zaisťovatelia kompenzujú časť škôd, čím sa znižuje tlak na kapitál poisťovne a zvyšuje sa jej finančná stabilita. Zaistenie má tiež funkciu optimalizácie rizikového manažmentu, pretože poisťovni umožňuje efektívnejšie riadiť riziká a využívať odborné znalosti zaisťovateľov, napríklad pri modelovaní katastrofických rizík. V neposlednom rade napomáha plneniu regulačných požiadaviek, keďže môže prispieť k dodržaniu minimálnych kapitálových rezerv stanovených regulačnými orgánmi pre krytie rizík.

Graf na Obr. 1 znázorňuje vývoj podielu hrubých zaisťovacích prémií na celkovom objeme hrubých poistných prémií vo svete v rokoch 2019 až 2023. Údaje vychádzajú zo správ IAIS Global Insurance Market Report (2024) a ilustrujú rastúci význam zaistenia ako nástroja prenosu poistného rizika. V sledovanom období sa podiel zaisťovacích prémií na globálnom poistnom trhu zvýšil z približne 9 % v roku 2019 na približne 15 % v roku 2023, čo poukazuje na posilňovanie úlohy zaisťovateľov pri stabilizácii poistného systému a zabezpečení solventnosti poisťovní.

Obr. 1: Podiel zaistenia na globálnom poistnom trhu v rokoch 2019 – 2023



Zdroj: vlastné spracovanie podľa IAIS Global Insurance Market Report

Optimalizácia a analýza zaisteného rizika predstavuje kľúčovú oblasť poistnej matematiky a riadenia rizík. V praxi sa uplatňujú rôzne optimalizačné prístupy – napríklad maximalizácia zisku pri fixne stanovenom rozptyle, minimalizácia rozptylu zisku či pravdepodobnosti krachu pri fixnom očakávanom zisku, alebo minimalizácia hodnôt VaR a CVaR. Tieto prístupy umožňujú hodnotiť efektívnosť jednotlivých štruktúr zaistenia a hľadať optimálne nastavenie parametrov. Súčasťou analýzy je aj tvorba scenárov, ktoré umožňujú modelovať správanie zaisteného portfólia pri rôznych hodnotách parametrov rozdelení a typoch zaistenia.

Vzhľadom na potrebu dostupných a praktických nástrojov pre modelovanie rizika je Microsoft Excel stále jedným z najrozšírenejších tabuľkových procesorov používaných v ekonomickej, finančnej a poistnej praxi. Jeho doplnok Riešiteľ (Solver Add-in) predstavuje efektívny prostriedok na riešenie optimalizačných úloh. Umožňuje nájsť extrém (maximum alebo minimum) cieľovej funkcie pri splnení zadaných obmedzení, čo ho predurčuje na aplikácie v oblasti riadenia rizík a poistnej optimalizácie. Podľa oficiálnej dokumentácie Microsoft (n. d.) doplnok využíva rôzne numerické metódy vrátane simplexového algoritmu, nelineárnych postupov a evolučných prístupov.

V nasledujúcich častiach článku bude prezentované využitie doplnku Riešiteľ pri analýze a optimalizácii proporcionálne zaisteného poistného rizika. Ukážkový príklad demonštruje, ako možno pomocou tohto nástroja určovať vhodnú štruktúru rozdelenia rizika, analyzovať rizikové ukazovatele (VaR, CVaR, pravdepodobnosť krachu) a vytvárať scenáre, ktoré reflektujú očakávania poisťovateľa z hľadiska ziskovosti a solventnosti pri aplikovaní proporcionálnych typov zaistenia.

2 Skladanie proporcionálnych typov zaistenia a optimalizácia ich parametrov

Proporcionálne zaistenie predstavuje druh zaistenia, pri ktorom sa poistná suma, poistné plnenie aj poistné rozdeľujú medzi poisťovateľa a zaisťovateľa v zmluvne dohodnutom pomere, tzv. proporcii. Tento pomer je konštantný a nezávisí od veľkosti vzniknutej škody. Zaisťovateľ pritom preberá svoj podiel rizika za rovnakých podmienok, aké platia pre poisťovateľa.

Proporcionálne zaistenie patrí medzi základné a historicky najstaršie formy prenosu poistného rizika. Jeho výhodou je jednoduchosť konštrukcie, ľahká aplikovateľnosť a možnosť presne určiť mieru participácie zaisťovateľa na rizikách rôznej veľkosti. Z pohľadu riadenia rizika tento typ zaistenia prispieva k stabilizácii hospodárskych výsledkov poisťovne, znižuje volatilitu zisku a napomáha efektívnejšiemu využívaniu kapitálu. Využíva sa najmä pri homogénnych poistných portfóliách alebo v prípadoch, keď poisťovateľ usiluje o stabilné rozdelenie poistného rizika pri zachovaní primeranej výnosnosti.

Okrem stabilizačnej funkcie zohráva proporcionálne zaistenie významnú úlohu aj pri plnení regulačných a solventnostných požiadaviek. Umožňuje poisťovni optimalizovať kapitálové zdroje a prispôsobovať štruktúru portfólia aktuálnym trhovým podmienkam. V rámci poisťovacej praxe sa tento typ zaistenia využíva ako efektívny nástroj na zníženie expozície voči veľkým stratám a na zabezpečenie rovnomernejšieho rozdelenia poistných záväzkov.

2.1 Typy proporcionálneho zaistenia

V praxi sa rozlišujú dva základné typy proporcionálneho zaistenia – kvótové zaistenie a excedentné (surplus) zaistenie vzhľadom na poistnú sumu. V rámci nich môže zaisťovateľ stanoviť hornú hranicu rizika, tzv. limit zaisťovateľa, ktorý určuje maximálnu výšku poistnej sumy, za ktorú je ochotný prevziať zodpovednosť. Jednotlivé typy zaistenia, matematické vyjadrenie náhodnej premennej opisujúcej výšku individuálnej škody poisťovateľa a zaisťovateľa sú uvedené v Tab. 1.

Tab. 1: Vyjadrenie individuálnej škody pre jednotlivé typy proporcionálneho zaistenia

Charakteristika	Rozdelenie škody ${}^{P}X_{\bullet}$ (poisťovateľ, typ zaistenia)	Rozdelenie škody ${}^{Z}X_{\bullet}$ (zaisťovateľ, typ zaistenia)
Kvótové zaistenie	${}^{P}X_{q} = q \cdot X$	${}^{Z}X_{q} = (1-q) \cdot X$
Kvótové zaistenie (limit zaisťovateľa)	${}^{P}X_{q,L} = \begin{cases} q \cdot X & \text{pre } S \le \frac{L}{1-q} \\ \frac{S-L}{S} \cdot X & \text{pre } S > \frac{L}{1-q} \end{cases}$	${}^{Z}X_{q,L} = \begin{cases} (1-q) \cdot X & \text{pre } S \le \frac{L}{(1-q)} \\ \frac{L}{S} \cdot X & \text{pre } S > \frac{L}{(1-q)} \end{cases}$
Surplus zaistenie	${}^{P}X_{\alpha} = \begin{cases} X & \text{pre } S \le \alpha \\ \frac{\alpha}{S} \cdot X & \text{pre } S > \alpha \end{cases}$	${}^{Z}X_{\alpha} = \begin{cases} 0 & \text{pre } S \le \alpha \\ \left(1-\frac{\alpha}{S}\right) \cdot X & \text{pre } S > \alpha \end{cases}$
Surplus zaistenie (limit zaisťovateľa)	${}^{P}X_{\alpha,k} = \begin{cases} X & \text{pre } S \le \alpha \\ \frac{\alpha}{S} \cdot X & \text{pre } \alpha < S \le (k+1) \cdot \alpha \\ \left(1-\frac{k \cdot \alpha}{S}\right) \cdot X & \text{pre } (k+1) \cdot \alpha < S \end{cases}$	${}^{Z}X_{\alpha,k} = \begin{cases} 0 & \text{pre } S \le \alpha \\ \left(1-\frac{\alpha}{S}\right) \cdot X & \text{pre } \alpha < S \le (k+1) \cdot \alpha \\ \frac{k \cdot \alpha}{S} \cdot X & \text{pre } (k+1) \cdot \alpha < S \end{cases}$

Zdroj: vlastné spracovanie

Označenia v Tab. 1 majú nasledujúci význam:
- S, q, α - predstavujú poistnú sumu, parametre kvótového a surplus zaistenia,
- L, k - vyjadrujú limity kvótového a surplus zaistenia.

Z hľadiska optimalizácie parametrov zaistenia a analýzy zaisteného rizika sú dôležité charakteristiky strednej hodnoty a disperzie náhodných premenných ${}^{P}X_{\bullet}$, ${}^{Z}X_{\bullet}$. Na ich určenie využijeme vlastnosť homogénnosti. Pre strednú hodnotu platí $E(a \cdot X) = a \cdot E(X)$, pre disperziu $D(a \cdot X) = a^2 \cdot D(X)$, kde a je konštanta a X náhodná premenná.

2.2 Skladanie proporcionálnych zaistení

Skladanie proporcionálnych typov zaistenia umožňuje flexibilne nastaviť úroveň podielu zaisťovateľa a retenčné limity v závislosti od veľkosti poistných súm, čím sa dosahuje efektívnejšia rovnováha medzi ziskovosťou a stabilitou poistného portfólia. Tento prístup je obzvlášť vhodný pri heterogénnych poistných portfóliách, kde jednoduché kvótové alebo surplus zaistenie nedokážu dostatočne vyrovnať rizikové expozície.

V Tab. 2 sú uvedené vzťahy platné pre náhodnú premennú opisujúcu individuálnu škodu poisťovateľa a zaisťovateľov ako aj príslušné charakteristiky obidvoch variantov zloženého zaistenia, ak uvažujeme kombináciu vytvorenú z vyššie uvedených proporcionálnych typov v prípade $S > \alpha$. Táto forma zaistenia sa v praxi uplatňuje pomerne často, pretože umožňuje presnejšie prispôsobiť štruktúru prenosu rizika špecifickému zloženiu poistného portfólia a preferenciám poisťovateľa. Označenie Z_1 a Z_2 sa vzťahuje na prvého a druhého zaisťovateľa podľa poradia aplikácie zaistenia, pričom uvažujeme prípady kvótového a surplus zaistenia bez limitov zaisťovateľa.

Tab. 2: Individuálne škody a charakteristiky v prípade $S > \alpha$

Charakteristika	Kvótové - Surplus	Surplus - Kvótové
Rozdelenie škody (poisťovateľ)	$^{P}X_{q,\alpha} = q \cdot \frac{\alpha}{S} \cdot X$	$^{P}X_{q,\alpha} = q \cdot \frac{\alpha}{S} \cdot X$
Stredná hodnota (poisťovateľ)	$E\left(^{P}X_{q,\alpha}\right) = q \cdot \frac{\alpha}{S} \cdot E(X)$	$E\left(^{P}X_{q,\alpha}\right) = q \cdot \frac{\alpha}{S} \cdot E(X)$
Disperzia (poisťovateľ)	$D\left(^{P}X_{q,\alpha}\right) = \left(q \cdot \frac{\alpha}{S}\right)^2 \cdot D(X)$	$D\left(^{P}X_{q,\alpha}\right) = \left(q \cdot \frac{\alpha}{S}\right)^2 \cdot D(X)$
Rozdelenie škody (1. zaisťovateľ)	$^{Z_1}X_q = (1-q) \cdot X$	$^{Z_1}X_\alpha = \left(1 - \frac{\alpha}{S}\right) \cdot X$
Stredná hodnota (1. zaisťovateľ)	$E\left(^{Z_1}X_q\right) = (1-q) \cdot E(X)$	$E\left(^{Z_1}X_\alpha\right) = \left(1 - \frac{\alpha}{S}\right) \cdot E(X)$
Disperzia (1. zaisťovateľ)	$D\left(^{Z_1}X_q\right) = (1-q)^2 \cdot D(X)$	$D\left(^{Z_1}X_\alpha\right) = \left(1 - \frac{\alpha}{S}\right)^2 \cdot D(X)$
Rozdelenie škody (2. zaisťovateľ)	$^{Z_2}X_{q,\alpha} = q \cdot \left(1 - \frac{\alpha}{S}\right) \cdot X$	$^{Z_2}X_{\alpha,q} = \frac{\alpha}{S} \cdot (1-q) \cdot X$
Stredná hodnota (2. zaisťovateľ)	$E\left(^{Z_2}X_{q,\alpha}\right) = q \cdot \left(1 - \frac{\alpha}{S}\right) \cdot E(X)$	$E\left(^{Z_2}X_{\alpha,q}\right) = \frac{\alpha}{S} \cdot (1-q) \cdot E(X)$
Disperzia (2. zaisťovateľ)	$D\left(^{Z_2}X_{q,\alpha}\right) = \left(q \cdot \left(1 - \frac{\alpha}{S}\right)\right)^2 \cdot D(X)$	$D\left(^{Z_2}X_{\alpha,q}\right) = \left(\frac{\alpha}{S} \cdot (1-q)\right)^2 \cdot D(X)$

Zdroj: vlastné spracovanie

2.3 Optimalizácia parametrov zloženého zaistenia

Optimalizácia parametrov zloženého rozdelenia predstavuje dôležitý nástroj na riadenie poistného rizika a efektívne nastavenie zaistnej ochrany. Cieľom optimalizácie je určiť také parametre modelu, ktoré zabezpečia vhodnú rovnováhu medzi výnosnosťou a stabilitou poistného portfólia a zároveň zohľadňujú požiadavky poisťovateľa (Horáková, Páleš & Slaninka, 2015) a (Bowers et al., 1997). V poistnej teórii sa najčastejšie používajú tieto optimalizačné kritériá:

- maximalizácia očakávaného zisku pri konštantnom rozptyle zisku,
- minimalizácia rozptylu zisku pri konštantnom očakávanom zisku,
- minimalizácia pravdepodobnosti krachu pri konštantnom očakávanom zisku,
- minimalizácia hodnoty VaR,
- minimalizácia hodnoty CVaR.

Podrobne uvedieme proces optimalizácie parametrov zloženého zaistenia, tvoreného kvótovým a následne surplus zaistením v prípade aplikácie kritéria maximalizácie očakávaného zisku pri konštantnom rozptyle zisku.

Zisk poisťovateľa vyplývajúci z daného portfólia poistných zmlúv po aplikovaní jednotlivých zaistení a fakte, že na každej škode sa zúčastňuje poisťovateľ a zaisťovateľ má tvar

$$Z = RP - {}^{P}S_{\bullet}^{kol} - \sum_{i=1}^{n} \Pi\left(^{Z_i}S_{\bullet}^{kol}\right) \qquad (1)$$

kde

RP - vyjadruje rizikové poistné, kalkulované podľa princípu disperzie,

$^{P}S_{\bullet}^{kol}$ - vyjadruje celkovú škodu poisťovateľa pri aplikovaní konkrétnych typov zaistenia,

$\sum_{i=1}^{n} \Pi\left(^{Z_i}S_{\bullet}^{kol}\right)$ - vyjadruje náklady na zaistenie po aplikovaní všetkých zložiek zaistenia.

Pre očakávaný zisk poisťovateľa pri využití známych vlastností strednej hodnoty platí

$$E(Z) = E\left(RP - {}^{P}S_{\bullet}^{kol} - \sum_{i=1}^{n} \Pi\left({}^{Z_i}S_{\bullet}^{kol} \right) \right) = RP - E\left({}^{P}S_{\bullet}^{kol} \right) - \sum_{i=1}^{n} \Pi\left({}^{Z_i}S_{\bullet}^{kol} \right) \quad (2)$$

Rozptyl zisku pri využití vlastností disperzie má tvar

$$D(Z) = D\left(RP - {}^{P}S_{\bullet}^{kol} - \sum_{i=1}^{n} \Pi\left({}^{Z_i}S_{\bullet}^{kol} \right) \right) = D\left({}^{P}S_{\bullet}^{kol} \right) \quad (3)$$

Optimálne hodnoty parametrov zložiek, ktoré sú súčasťou zvoleného reťazca zaisťovacích ochrán určíme vyriešením optimalizačnej úlohy:

$$E(Z) = RP - E\left({}^{P}S_{\bullet}^{kol} \right) - \sum_{i=1}^{n} \Pi\left({}^{Z_i}S_{\bullet}^{kol} \right) \rightarrow \max$$

pri ohraničení

$$D\left({}^{P}S_{\bullet}^{kol} \right) = c^2 \quad (4)$$

Ak uvažujeme zložené zaistenie aplikovaním surplus zaistenia na kvótové zaistenie, optimalizačná úloha bude mať podľa (4) a označenia v Tab. 2 tvar

$$E(Z) = E\left(S^{kol}\right) + a \cdot D\left(S^{kol}\right) - \frac{q \cdot \alpha}{S} \cdot E\left(S^{kol}\right) - \left((1-q) \cdot E\left(S^{kol}\right) + b \cdot (1-q)^2 \cdot D\left(S^{kol}\right) \right) - \left(q \cdot \left(1 - \frac{\alpha}{S}\right) \cdot E\left(S^{kol}\right) + c \cdot q^2 \cdot \left(1 - \frac{\alpha}{S}\right)^2 \cdot D\left(S^{kol}\right) \right) \rightarrow \max$$

pri ohraničení (5)

$$\left(\frac{q \cdot \alpha}{S} \right)^2 \cdot D\left(S^{kol}\right) = c^2$$

Na vyjadrenie charakteristík náhodnej premennej S^{kol} využijeme vzťahy $E\left(S^{kol}\right) = E(N) \cdot E(X)$ pre strednú hodnotu a $D\left(S^{kol}\right) = E(N) \cdot D(X) + D(N) \cdot E^2(X)$ pre disperziu celkovej škody, ako aj fakt, že na každej škode sa v uvažovanom prípade $S > \alpha$ zúčastňuje poisťovateľ aj obidvaja zaisťovatelia (Horáková, Páleš & Slaninka, 2015).

Na stanovenie extrémov môžeme použiť metódu Lagrangeových multiplikátorov. S ohľadom na komplikovanosť výpočtov súvisiacich s ďalšou analýzou rizika využijeme pri určení optimálnych parametrov zaistenia numerické metódy, ktoré ponúka Riešiteľ programu MS Excel, ktorý umožňuje nájsť extrémy cieľovej funkcie alebo priblížiť hodnotu cieľovej bunky na požadovanú úroveň pri zadaných obmedzeniach. Tab. 3 uvádza prehľad optimalizačných kritérií a prislúchajúcich optimalizačných úloh.

Tab. 3: Prehľad optimalizačných kritérií a optimalizačných úloh

Kritérium	Tvar optimalizačnej úlohy
Kritérium minimalizácie hodnoty VaR	$VaR_p\left({}^{P}_{TC}S^{kol}_{\bullet}\right)=VaR_p\left({}^{P}S^{kol}_{\bullet}\right)+\sum_{i=1}^{n}\Pi\left({}^{Z_i}S^{kol}_{\bullet}\right)\rightarrow \min$
Kritérium minimalizácie hodnoty CVaR	$CVaR_p\left({}^{P}_{TC}S^{kol}_{\bullet}\right)=VaR_p\left({}^{P}S^{kol}_{\bullet}\right)+\frac{1}{1-p}\cdot\int_{VaR_p\left({}^{P}S^{kol}_{\bullet}\right)}^{\infty}\left(1-F_{{}^{P}S^{kol}_{\bullet}}(x)\right)dx+\sum_{i=1}^{n}\Pi\left({}^{Z_i}S^{kol}_{\bullet}\right)\rightarrow \min$
Kritérium maximálneho očakávaného zisku s väzbou na konštantný rozptyl	$E(Z)=RP-E\left({}^{P}S^{kol}_{\bullet}\right)-\sum_{i=1}^{n}\Pi\left({}^{Z_i}S^{kol}_{\bullet}\right)\rightarrow \max$ pri ohraničení $D\left({}^{P}S^{kol}_{\bullet}\right)=c^2$
Kritérium minimálneho rozptylu celkového zisku s väzbou na konštantný očakávaný zisk	$D(Z)=D\left({}^{P}S^{kol}_{\bullet}\right)\rightarrow \min$ pri ohraničení $RP-E\left({}^{P}S^{kol}_{\bullet}\right)-\sum_{i=1}^{n}\Pi\left({}^{Z_i}S^{kol}_{\bullet}\right)=c$
Kritérium minimalizácie pravdepodobnosti krachu s väzbou na konštantný očakávaný zisk	$1-\Phi\left(\frac{U+RP-\sum_{i=1}^{n}\Pi\left({}^{Z_i}S^{kol}_{\bullet}\right)-E\left({}^{P}S^{kol}_{\bullet}\right)}{\sigma\left({}^{P}S^{kol}_{\bullet}\right)}\right)\rightarrow \min$ pri ohraničení $RP-E\left({}^{P}S^{kol}_{\bullet}\right)-\sum_{i=1}^{n}\Pi\left({}^{Z_i}S^{kol}_{\bullet}\right)=c$

Zdroj: vlastné spracovanie

V Tab. 3 sú uvedené nasledujúce hodnoty:

- Value-at-Risk (VaR) - predstavuje maximálnu výšku celkovej škody, ktorá môže nastať s danou pravdepodobnosťou v určenom časovom období a zodpovedá kvantilu rozdelenia náhodnej premennej S^{kol} pri zvolenej úrovni pravdepodobnosti,
- Conditional Value-at-Risk (CVaR) - predstavuje očakávanú škodu zo všetkých škôd prekračujúcich hodnotu kvantilu x_p náhodnej premennej S^{kol}, v prípade aproximácie normálnym rozdelením platí

$$CVaR_p\left(S^{kol}\right)=E\left(S^{kol}\right)+\frac{\frac{1}{\sqrt{D\left(S^{kol}\right)}}\cdot\varphi\left(\frac{x_p-E\left(S^{kol}\right)}{\sqrt{D\left(S^{kol}\right)}}\right)}{1-\Phi\left(\frac{x_p-E\left(S^{kol}\right)}{\sqrt{D\left(S^{kol}\right)}}\right)}\cdot D\left(S^{kol}\right), \qquad (6)$$

- Pravdepodobnosť krachu za jednu časovú periódu - vyjadruje pravdepodobnosť, že prebytok poisťovne klesne na konci sledovaného obdobia do záporných čísel, t. j. v prípade aproximácie normálnym rozdelením platí

$$\varepsilon \approx 1-\Phi\left(\frac{U+RP-\sum_{i=1}^{n}\Pi\left({}^{Z_i}S_{\bullet}^{kol}\right)-E\left({}^{P}S_{\bullet}^{kol}\right)}{\sigma\left({}^{P}S_{\bullet}^{kol}\right)}\right). \tag{7}$$

Tieto ukazovatele patria medzi základné nástroje hodnotenia poistného rizika a kapitálovej primeranosti (McNeil, Frey & Embrechts, 2015).

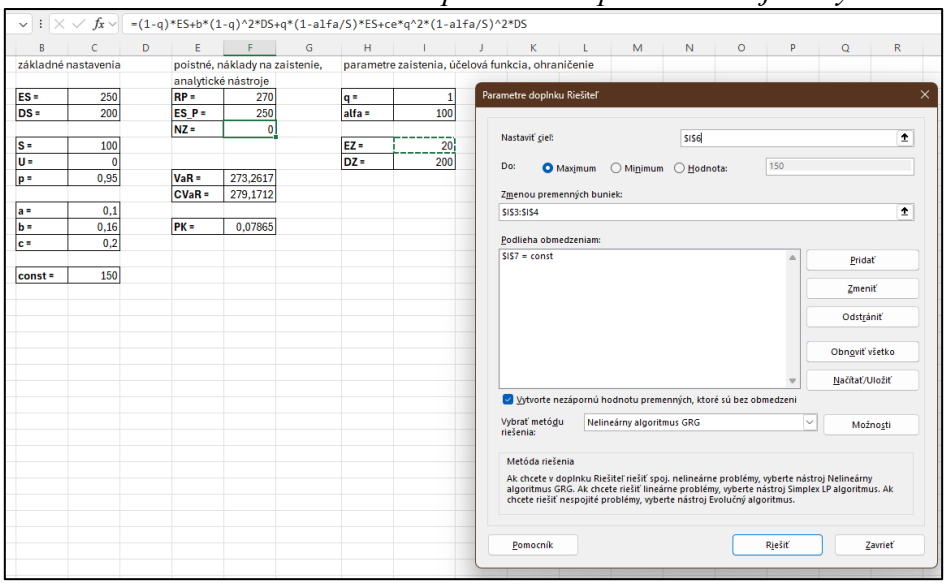
3 Modelový príklad využitia Riešiteľa na optimalizáciu zaistenia a analýzu rizika

Uvažujme riziko, s očakávanou celkovou škodou $E\left(S^{kol}\right)=250$ a s rozptylom škody $D\left(S^{kol}\right)=200$. Rizikové poistné a zaistné budeme kalkulovať podľa princípu disperzie s prirážkami pre poistné a = 0,1 , kvótové zaistenie b = 0,16 a surplus zaistenie c = 0,2 s poistnou sumou S = 100. Určme

- optimálne parametre zloženého kvótového zaistenia s následnou aplikáciou surplus zaistenia pri požiadavke dosiahnutia maximálneho očakávaného zisku pri konštantne nastavenom rozptyle zisku na úrovni $D(Z)=150$,
- hodnoty *VaR*, *CVaR*, pravdepodobnosť krachu pre vybrané vstupy (U = 0, p = 0,95) bez zaistenia a po aplikovaní zaistenia s optimálnymi parametrami,
- ako musí byť nastavená hodnota rezerv U, aby pravdepodobnosť krachu bola najviac 0,01, ak uvažujeme zaistenie s optimálne nastavenými parametrami,
- ako nastaviť parameter α , ak q = 0,75 a požadovaná maximálna škoda na hladine p = 0,95 má byť 150.

Výpočty sú realizované v prostredí Microsoft Excel s využitím doplnku Riešiteľ. Na Obr. 2 je zobrazené nastavenie buniek v doplnku Riešiteľ pri riešení optimalizačnej úlohy.

Obr. 2: Nastavenia buniek pri riešení optimalizačnej úlohy



Zdroj: vlastné spracovanie

V prvom stĺpci tabuľky na Obr. 2 vidíme základné nastavenia jednotlivých veličín podľa zadania v modelovom príklade, v druhom stĺpci sú vypočítané hodnoty rizikového poistného, očakávanej celkovej škody poisťovateľa a nákladov na zaistenie, ktoré sú zahrnuté vo vzorci (5), hodnoty *VaR*, *CVaR* počítanej podľa (6) a pravdepodobnosti krachu počítanej podľa (7). Vzhľadom na nastavenie parametrov zaistenia $q = 1$ a $\alpha = 100$ je to prípad bez zaistenia rizika s výsledkom $VaR_{0,95}\left(S^{kol}\right) = 273,2617$, $CVaR_{0,95}\left(S^{kol}\right) = 279,1712$ a pravdepodobnosť krachu na úrovni 0,0786. Očakávaný zisk poisťovateľa vypočítaný v treťom stĺpci je $E(Z) = 20$. V doplnku Riešiteľ je cieľovou bunka s odkazom na očakávaný zisk $E(Z)$ poisťovateľa zo vzťahu (4), resp. (5), ktorej hodnotu maximalizujeme zmenou premenných *q*, *alfa* pri obmedzení podľa (5).

Obr. 3 znázorňuje výslednú tabuľku s vypočítanými optimálnymi parametrami zloženého zaistenia pre kvótové a následne surplus zaistenie.

Obr. 3: Výsledná tabuľka po riešení optimalizačnej úlohy

=RP-ES_P-NZ

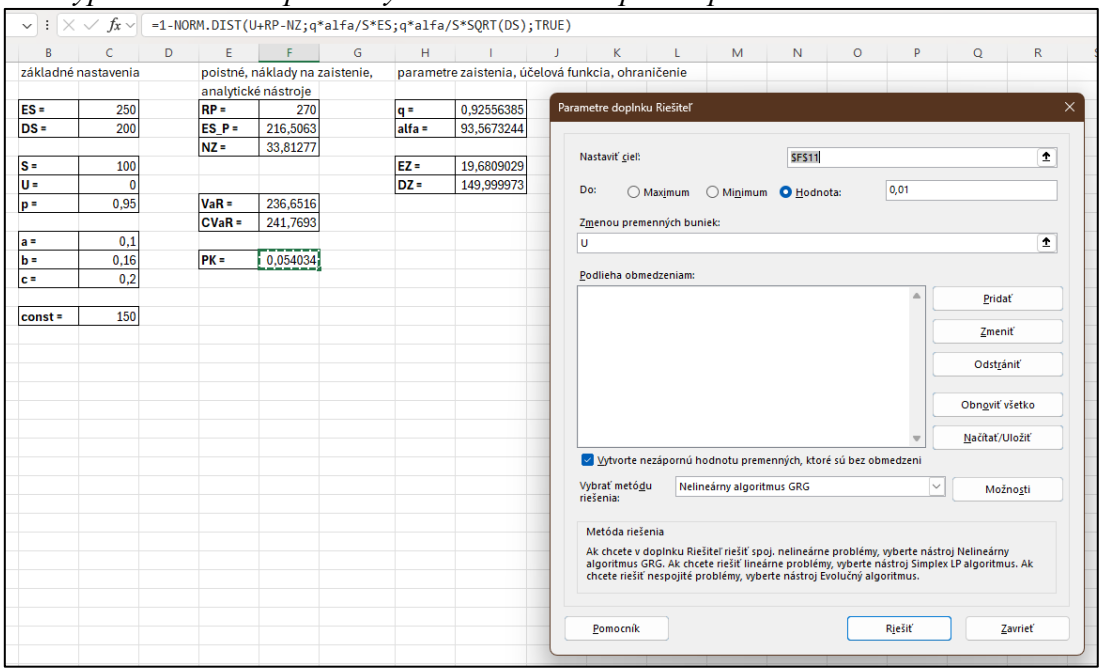
	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
	základné nastavenia			poistné, náklady na zaistenie, analytické nástroje			parametre zaistenia, účelová funkcia, ohraničenie				
	ES =	250		RP =	270		q =	0,92556385			
	DS =	200		ES_P =	216,5063		alfa =	93,5673244			
				NZ =	33,81277						
	S =	100					EZ =	19,6809029			
	U =	0					DZ =	149,999973			
	p =	0,95		VaR =	236,6516						
				CVaR =	241,7693						
	a =	0,1									
	b =	0,16		PK =	0,054034						
	c =	0,2									
	const =	150									

Zdroj: vlastné spracovanie

V tabuľke na Obr. 3 majú po aplikovaní kritéria na maximalizovanie očakávaného zisku s väzbou na konštantný rozptyl optimálne parametre hodnoty $q = 0,9256$ a $\alpha = 93,5673$. Pri takto nastavených parametroch vidíme pokles hodnôt $VaR_{0,95}\left({}^{P}S^{kol}_{q,\alpha}\right) = 236,6516$, $CVaR_{0,95}\left({}^{P}S^{kol}_{q,\alpha}\right) = 241,7693$ a pravdepodobnosti krachu na 0,054.

Výpočet rezerv potrebných k tomu, aby pravdepodobnosť krachu bola maximálne 0,01, ak uvažujeme optimálne parametre zaistenia $q = 0,9256$ a $\alpha = 93,5673$ využitím Riešiteľa je na Obr. 4. Ako cieľovú bunku nastavíme bunku súvisiacu s výpočtom pravdepodobnosti krachu. Jej obsah je zobrazený aj v riadku vzorcov a korešponduje so vzťahom (7). Hodnotu nastavíme na 0,01 a meniť budeme obsah bunky s premennou rezervy *U*.

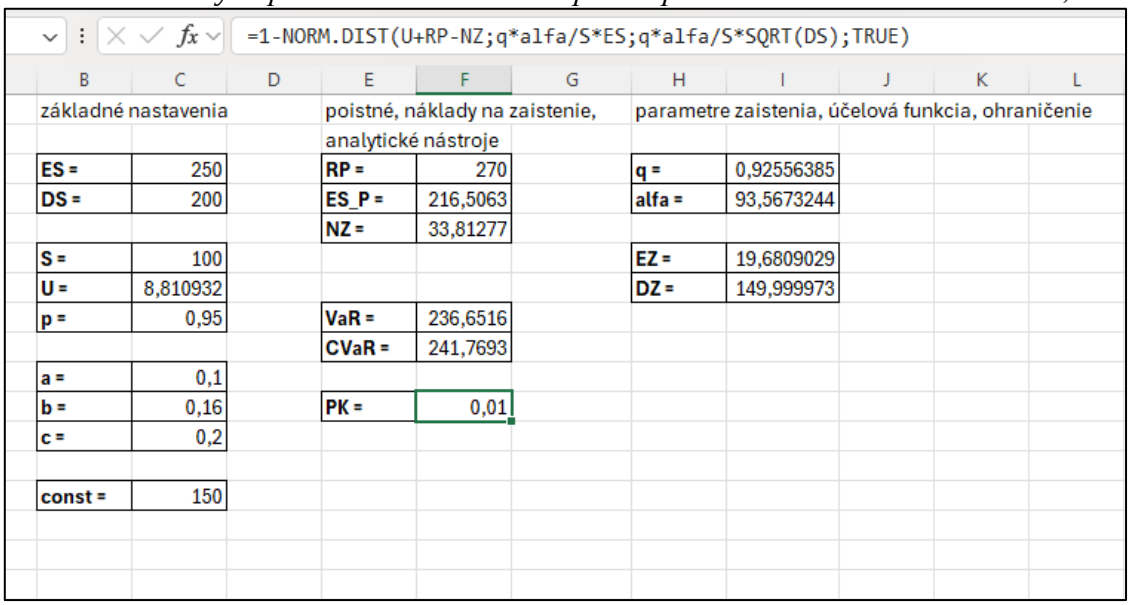
Obr. 4: Výpočet rezerv U potrebných na elimináciu pravdepodobnosti krachu na úroveň 0,01



Zdroj: vlastné spracovanie

Po stlačení tlačidla Riešiť, získame výsledok $U = 8{,}8109$, čo sú rezervy potrebné na krytie rizika s eliminovanou pravdepodobnosťou krachu na úrovni 0,01. Výsledná situácia je zobrazená na Obr. 5.

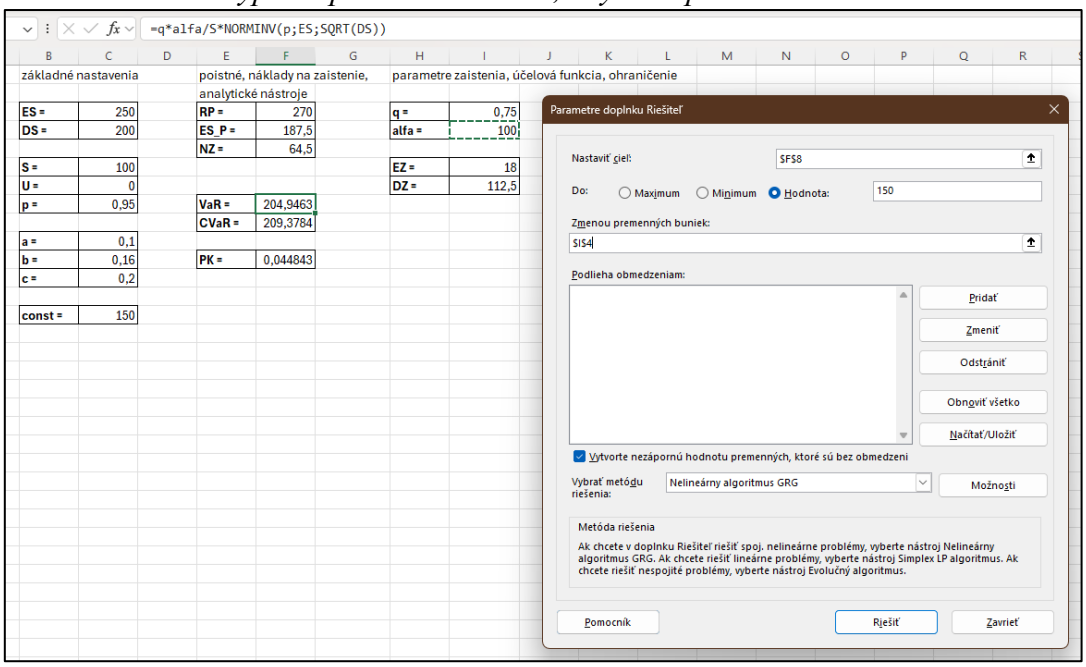
Obr. 5: Rezervy U potrebné na elimináciu pravdepodobnosti krachu na úroveň 0,01



Zdroj: vlastné spracovanie

Situácia, ako nastaviť parameter α, ak $q = 0{,}75$ a požadovaná maximálna škoda na hladine $p = 0{,}95$ má byť 150 je uvedená na Obr. 6. V doplnku Riešiteľ s nastaveniami cieľová bunka súvisiaca s hodnotou *VaR*, hodnota 150, zmena premennej bunky *alfa*.

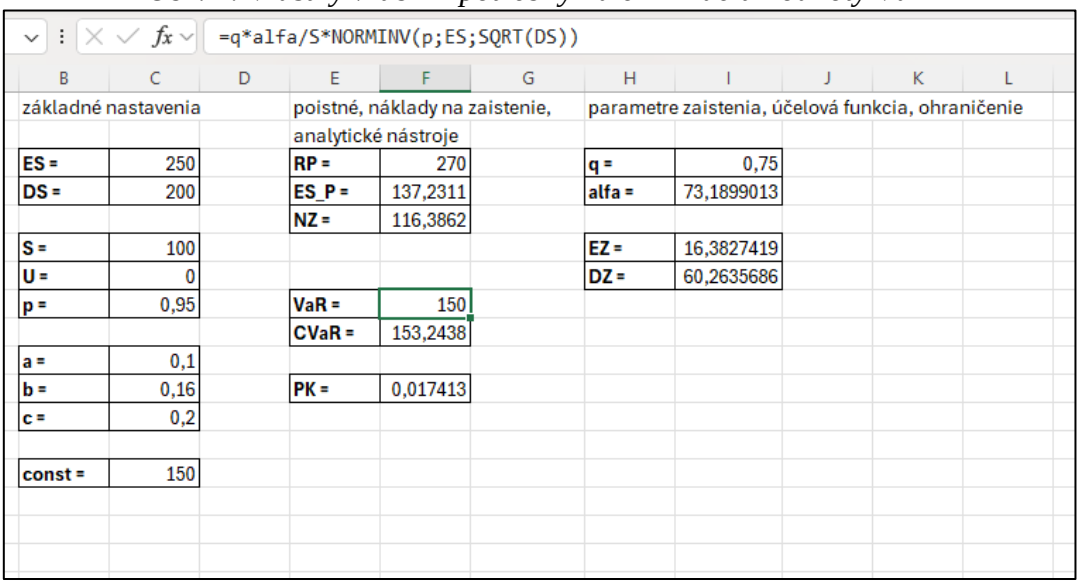
Obr. 6: Výpočet parametra α tak, aby VaR poisťovateľa bola 150



Zdroj: vlastné spracovanie

Po stlačení tlačidla Riešiť získame výsledok parametra $\alpha = 73{,}1899$, ktorý zníži hodnotu *VaR* poisťovateľa na požadovanú úroveň 150. Výsledná situácia je zobrazená na Obr. 7.

Obr. 7: Vlastný vrub α potrebný na elimináciu hodnoty VaR



Zdroj: vlastné spracovanie

4 Záver

V prípadoch, keď je exaktné riešenie optimalizačnej úlohy výpočtovo náročné alebo analyticky ťažko riešiteľné, predstavuje doplnok Riešiteľ v prostredí Microsoft Excel efektívnu alternatívu. Umožňuje numericky určovať extrémy cieľovej funkcie pri zadaných obmedzeniach a približovať sa k optimálnym hodnotám parametrov bez potreby odvodenia presných analytických vzťahov. Jeho výhodou je jednoduché použitie, široká dostupnosť a

transparentnosť získaných výsledkov, čo z neho robí vhodný nástroj nielen na vzdelávacie, ale aj na praktické analytické účely.

V poistnej praxi možno doplnok Riešiteľ úspešne využiť pri kalibrácii parametrov zložených modelov a pri hodnotení zaistných stratégií z pohľadu rizikových ukazovateľov, ako sú VaR, CVaR či pravdepodobnosť krachu. Poskytuje tak flexibilný a prehľadný prostriedok pre analýzu a optimalizáciu poistného rizika v situáciách, kde klasické analytické postupy zlyhávajú alebo neposkytujú dostatočnú presnosť.

Príspevok bol spracovaný v rámci riešenia grantových úloh VEGA č.1/0497/25 Implementácia inovatívnych prístupov v oblasti riadenia a modelovania rizík v rámci interných modelov poisťovní a VEGA č. 1/0377/25 Inovatívne metódy Enterprise risk managementu a ich využitie v riadení a modelovaní rizík.

Literatúra

1. Bowers, N. L., Gerber, H. U., Hickman, J. C., Jones, D. A., & Nesbitt, C. J. (1997). *Actuarial Mathematics* (2nd ed.). Society of Actuaries.
2. Cipra, T. (2004). *Zajištění a přenos rizik v pojišťovnictví.* Grada Publishing.
3. Horáková, G., Páleš, M., & Slaninka, F. (2015). *Teória rizika v poistení.* Wolters Kluwer.
4. McNeil, A. J., Frey, R., & Embrechts, P. (2015). *Quantitative Risk Management: Concepts, Techniques, and Tools.* Princeton University Press.
5. Microsoft. (n.d.). Microsoft Excel Solver add-in documentation. [Online]. Dostupné na https://support.microsoft.com/
6. IAIS Global Insurance Market Report . [Online]. Dostupné na https://www.iais.org/uploads/2024/12/Global-Insurance-Market-Report-2024.pdf?utm_source=chatgpt.com