# EKONOMICKÁ INFORMATIKA

vedecký časopis FHI EU v Bratislave a SSHI



1
2026
Ročník XXIV.

- hospodárska informatika
- účtovníctvo a audítorstvo
- ekonometria a operačný výskum
- aplikovaná štatistika
- aktuárstvo

**Vydavateľ**
Fakulta hospodárskej informatiky Ekonomickej univerzity v Bratislave
a Slovenská spoločnosť pre hospodársku informatiku

**IČO vydavateľa** 00 399 957

**Redakčná rada**

Erik Šoltés - predseda
*Ekonomická univerzita v Bratislave*

Nenad Bjelić
*University of Belgrade*

Ivan Brezina
*Ekonomická univerzita v Bratislave*

Tatiana Čorejová
*Žilinská univerzita v Žiline*

Ferdinand Daňo
*Ekonomická univerzita v Bratislave*

Christopher D. Daykin
*Government Actuary´s Department, London*

Dana Dluhošová
*Vysoká škola báňská - Technická univerzita Ostrava*

Richard Farkaš
*KPMG Slovensko, spol. s r.o.*

Richard Hindls
*Vysoká škola ekonomická v Praze*

Josef Jablonský
*Vysoká škola ekonomická v Praze*

Václav Janeček
*Univerzita Hradec Králové*

Luboš Marek
*Vysoká škola ekonomická v Praze*

Karol Matiaško
*Žilinská univerzita v Žiline*

Ladislav Mejzlík
*Vysoká škola ekonomická v Praze*

Józef Pociecha
*Cracow University of Economics*

Vincent Šoltés
*Technická univerzita v Košiciach*

Paweł Ulman
*Cracow University of Economics*

Gejza Wimmer
*Univerzita Mateja Bela v Banskej Bystrici*

Emin Zeytinoğlu
*Kütahya Dumlupınar University*

Marcela Žárová
*Vysoká škola ekonomická v Praze*

**Výkonná rada**

Petra Krišková - manažér
*Ekonomická univerzita v Bratislave*

Michaela Chocholatá
*Ekonomická univerzita v Bratislave*

Michal Páleš
Ekonomická univerzita v Bratislave

Marian Reiff
Ekonomická univerzita v Bratislave

Yuliia Serpeninova
*Ekonomická univerzita v Bratislave*

Peter Schmidt
*Ekonomická univerzita v Bratislave*

Mária Vojtková
Ekonomická univerzita v Bratislave

**Redaktorka:** Eva Čerteková

**Adresa redakcie:** Fakulta hospodárskej informatiky, Ekonomická univerzita v Bratislave
Dolnozemská cesta 1, 852 35 Bratislava
tel.: 02/6729 5723, e-mail: eva.certekova@euba.sk

**Dátum vydania periodickej tlače:** jún 2026

**ISSN 1339-987X (online)**
**ISSN 1336-3514 (online vydanie)**

# OBSAH 1/2026

## VEDECKÉ STATE A DISKUSIE


Alžbeta Dubovská
**KOMPOZITNÝ INDEX HODNOTENIA INVESTIČNÉHO ŽIVOTNÉHO POISTENIA V KONTEXTE REGULÁCIE** 4

Alena Kordošová
**FONDY AKO SÚČASŤ VLASTNÉHO IMANIA VEREJNÝCH VYSOKÝCH ŠKÔL** 18

Martin Kosztolányi
**APLIKÁCIA TROJSTAVOVÉHO MODELU S VYUŽITÍM MARKOVOVÝCH REŤAZCOV A SIMULÁCIÍ** 29

Lívia Krajčíková, Alžbeta Dubovská
**LEAVING THE PARENTAL HOME IN THE EU: A CLUSTER ANALYSIS OF EU COUNTRIES** 41

Martin Mišút
**EVOLÚCIA ROZVRHOVANIA OPERÁCIÍ V DIGITÁLNEJ ÉRE: OD OPTIMALIZÁCIE K INTELIGENTNÝM SYSTÉMOM** 50

Eva Rakovská
**THE SOFTWARE'S ABILITY TO DETECT AI-GENERATED TEXT IN STUDENT ASSIGNMENTS** 62

Pavol Sojka
**POKUSY O PRIENIK DO ONLINE LINUX SYSTÉMOV** 72

**EXTERNÍ RECENZENTI** 80

# Kompozitný index hodnotenia investičného životného poistenia v kontexte regulácie

# Composite Index for Evaluating Unit-Linked Insurance in a Context of Regulation

Alžbeta Dubovská[1]

**Abstrakt**
Príspevok predstavuje návrh kompozitného indexu určeného na hodnotenie produktov investičného životného poistenia naprieč viacerými regulačnými rámcami. Index integruje kľúčové regulačné požiadavky vyplývajúce zo štandardu IFRS 17, smernice Solventnosť II, Nariadenia o dokumentoch s kľúčovými informáciami pre štrukturalizované retailové investičné produkty a investičné produkty založené na poistení (Packaged Retail Investment and Insurance Based Products, PRIIPs) a Smernice o distribúcii poistenia (Insurance Distribution Directive, IDD). Cieľom je vytvoriť systematický nástroj, ktorý umožňuje komplexne posúdiť vlastnosti produktu, jeho transparentnosť, náklady a miery regulačného súladu. Metodika indexu je založená na súbore indikátorov združených do tematických pilierov. Jednotlivé indikátory sú normalizované pomocou metódy min-max a následne agregované na úroveň pilierov a celkového kompozitného indexu. Navrhnutý index je následne aplikovaný na vybraný produkt investičného životného poistenia s cieľom demonštrovať jeho praktickú využiteľnosť. Výsledky umožňujú identifikovať silné a slabé stránky analyzovaného produktu z pohľadu regulačných požiadaviek.

**Kľúčové slová**
investičné životné poistenie, IFRS 17, Solventnosť II, PRIIPs, Smernica o distribúcii poistenia

**Abstract**
The paper presents a proposal for a composite index designed to evaluate unit-linked insurance products across multiple regulatory frameworks. The index integrates key regulatory requirements arising from IFRS 17, Solvency II, Packaged Retail Investment and Insurance-Based Products (PRIIPs) and Insurance Distribution Directive (IDD). The objective is to provide a structured tool that enables a comprehensive assessment of a product's characteristics, its transparency, costs and level of regulatory compliance. The index methodology is based on a set of indicators grouped into thematic pillars. Individual indicators are normalised using the min-max method and subsequently aggregated into pillar scores and a final composite index. The proposed index is then applied to a selected unit-linked insurance product in order to demonstrate its practical usability. The results illustrate how the proposed framework can identify strengths and weaknesses of the analysed product from a regulatory requirements.

**Key words**
unit-linked insurance, IFRS 17, Solvency II, PRIIPs, Insurance Distribution Directive

**JEL classification**
G22, G28, D18

[1] Ekonomická univerzita v Bratislave, Fakulta hospodárskej informatiky, Katedra matematiky a aktuárstva, Dolnozemská cesta 1, 852 35 Bratislava, alzbeta.dubovska@euba.sk.

# 1 Úvod

Vo všeobecnosti neexistujú jednotné indexy, ani všeobecne akceptované ukazovatele, ktoré by komplexne hodnotili určitý produkt naprieč rôznym regulačnými rámcami. Výnimkou nie je ani investičné životné poistenie, ktoré predstavuje kombináciu poistenej ochrany a investičnej zložky, a preto podlieha reguláciám s odlišným charakterom, cieľmi a metodikou hodnotenia.

Účtovné regulácie, ako Medzinárodný štandard finančného výkazníctva 17 (International Financial Reporting Standard 17, IFRS 17), sa sústreďujú na verné vykazovanie finančnej pozície a časovanie zisku. Smernica Európskeho parlamentu a Rady 2009/138/ES o začatí a vykonávaní poisťovacej a zaisťovacej činnosti (Solventnosť II) sa zameriava na kapitálovú primeranosť a riadenie rizík. Spotrebiteľsky orientované regulácie, ako Smernica o distribúcii poistenia (Insurance Distribution Directive, IDD) a Nariadenie o dokumentoch s kľúčovými informáciami pre štrukturalizované retailové investičné produkty a investičné produkty založené na poistení (Packaged Retail Investment and Insurance Based Products, PRIIPs), kladú dôraz na ochranu klienta, transparentnosť nákladov, primeranosť produktov a zrozumiteľnosť informácií poskytovaných poistníkovi.

Regulačné orgány sa pritom primárne zameriavajú na zabezpečenie stability finančného systému, ochranu spotrebiteľa a obmedzenie nadmerného rizika, nie na vytvorenie jednotného nástroja na komplexné hodnotenie produktov. V dôsledku toho si finančné inštitúcie v praxi často vytvárajú vlastné interné ukazovatele alebo kompozitné indexy, ktoré reflektujú ich špecifické analytické a manažérske potreby.

Na tento prístup nadväzuje aj tento článok, ktorého cieľom je navrhnúť kompozitný index hodnotenia investičného životného poistenia ako nástroj integrujúci viaceré regulačné perspektívy do jedného zrozumiteľného, porovnateľného a ekonomicky interpretovateľného ukazovateľa. Navrhovaný model prepája požiadavky štandardu IFRS 17, rámca Solventnosť II, smernice IDD a nariadenia PRIIPs do jednotného analytického nástroja.

Vzhľadom na rozdielne ciele jednotlivých regulačných rámcov je navrhovaný kompozitný index štruktúrovaný do troch základných pilierov, ktoré reprezentujú hlavné perspektívy hodnotenia investičného životného poistenia. Každý pilier združuje skupinu indikátorov s podobnou ekonomickou podstatou a regulačným zameraním.

Prvým pilierom je Ekonomická výkonnosť produktu (*Product Economic Performance, PEP*). Tento pilier zachytáva schopnosť produktu generovať zisk pri efektívnom využití kapitálu poisťovne. Obsahuje indikátory, ktoré predovšetkým vychádzajú z princípov IFRS 17 a Solventnosti II:

- Indikátor relatívnej ziskovej marže produktu.
- Indikátor volatility zmluvnej servisnej marže.
- Indikátor kapitálovej efektívnosti produktu.

Druhým pilierom je Hodnota produktu pre klienta (*Product Value for Customer, PVC*). Jeho cieľom je posúdiť ekonomickú atraktivitu produktu z pohľadu poistníka, najmä schopnosť produktu generovať výnos po zohľadnení poplatkov a nákladov. Tento pilier reflektuje hlavne požiadavky regulácií PRIIPs a IDD a pozostáva z týchto indikátorov:

- Indikátor internej miery návratnosti klienta.
- Indikátor redukcie výnosu produktu.

Tretím pilierom je Nákladovosť a rizikovosť produktu (*Product Cost and Risk, PCR*). Tento pilier hodnotí nákladovú náročnosť a mieru rizikovosti produktu. Jeho indikátory vychádzajú z kombinovaného pohľadu viacerých regulačných rámcov. Solventnosť II zdôrazňuje riadenie rizík a kapitálové požiadavky, zatiaľ čo PRIIPs a IDD sa sústreďujú na transparentnosť nákladov a zrozumiteľnosť produktu pre klienta. Tento pilier zahŕňa:

- Indikátor nákladovej náročnosti produktu.

- Indikátor rizikovej náročnosti produktu.

## 2 Koncepcia kompozitného indexu

Kompozitný index (*Composite Index, CI*) je vážený agregovaný ukazovateľ, ktorý transformuje jednotlivé piliere hodnotenia investičného životného poistenia do jedného syntetického skóre. Index vychádza z predpokladu, že celkové hodnotenie produktu je možné odvodiť z kombinácie ekonomických dimenzií reprezentovaných piliermi *PEP*, *PVC* a *PCR*.

Formálne je kompozitný index definovaný nasledovne

$$CI = \sum_{i=1}^{n} w_i P_i \tag{1}$$

kde:
$P_i$ - hodnota *i*-teho piliera v intervale ⟨0;1⟩,
$w_i$ - váha *i*-teho piliera, pričom súčet váh sa rovná jednej,
$n$ - počet pilierov.

Hodnota jednotlivých pilierov je definovaná

$$P_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{I_j}{n} \tag{2}$$

kde:
$I_j$ - *j*-ty normalizovaný indikátor v *i*-tom pilieri,
$n$ - počet indikátorov v danom pilieri.

Pred samotnou agregáciou sú jednotlivé indikátory normalizované na základe benchmarkových hodnôt. V závislosti od charakteru indikátora sa rozlišujú pozitívne indikátory, pri ktorých vyššia hodnota znamená priaznivejšie hodnotenie, a negatívne indikátory, pri ktorých je priaznivejšia nižšia hodnota.

Jednotlivé indikátory tvoriace kompozitný index sú podrobne rozobraté v nasledujúcich podkapitolách, kde je uvedený ich ekonomický význam, spôsob výpočtu a interpretácia výsledných hodnôt v kontexte príslušných regulačných rámcov.

### 2.1 Indikátor 1 - Relatívna zisková marža produktu

Ziskovosť poistného produktu predstavuje jeden z kľúčových aspektov jeho dlhodobej udržateľnosti, a to nielen z pohľadu akcionárov poisťovne, ale aj v kontexte kapitálovej primeranosti, spotrebiteľskej ochrany a regulačného dohľadu. V rámci IFRS 17 je ziskovosť poistných zmlúv explicitne zachytená prostredníctvom zmluvnej servisnej marže (*Contractual Service Margin, CSM*), ktorá reprezentuje nezaslúžený zisk poisťovne pri vzniku zmluvy.

Indikátor relatívnej ziskovej marže produktu (*Profit Margin, PM*) je definovaný ako pomer počiatočnej zmluvnej servisnej marže k súčasnej hodnote budúcich poistných platieb poistníka. Tento pomer vyjadruje, aká časť diskontovanej hodnoty poistného predstavuje očakávaný zisk poisťovne pri prvotnom ocenení poistnej zmluvy. Platí

$$PM = \frac{CSM_0}{PV(P)} \tag{3}$$

kde:

$CSM_0$ - počiatočná hodnota *CSM* stanovená pri počiatočnom ocenení podľa IFRS 17,
$PV(P)$ - súčasná hodnota očakávaného poistného počas trvania zmluvy.

Vyššia hodnota indikátora signalizuje vyššiu ziskovosť produktu a zároveň väčšiu schopnosť absorbovať nepriaznivé zmeny aktuárskych alebo finančných predpokladov bez toho, aby sa produkt stal stratovým. Naopak, nízka hodnota indikátora poukazuje na menšiu ziskovú maržu a zvýšenú citlivosť produktu na rizikové faktory, ako sú vyššia pravdepodobnosť odstúpenia od zmluvy, nepriaznivý vývoj nákladov alebo nižšia výkonnosť podkladových aktív.

Z metodického hľadiska predstavuje indikátor *PM* významný prepojovací prvok medzi viacerými regulačnými rámcami. V rámci IFRS 17 poskytuje priamu informáciu o očakávanej ziskovosti produktu a jeho schopnosti generovať zisk počas obdobia poskytovania poistného krytia. Z pohľadu regulácie Solventnosť II vyššia počiatočná zisková marža zvyšuje schopnosť produktu absorbovať straty v stresových scenároch, čím nepriamo prispieva k stabilite kapitálovej primeranosti a znižuje tlak na kapitálové požiadavky. V kontexte regulácií zameraných na ochranu spotrebiteľa, najmä IDD a PRIIPs, môže primeraná úroveň ziskovej marže znižovať tlak na nadmerné poplatkové zaťaženie klienta a prispievať k férovejšiemu nastaveniu produktovej štruktúry.

## 2.2 Indikátor 2 - Volatilita zmluvnej servisnej marže

Hoci indikátor *PM* poskytuje informáciu o úrovni očakávanej ziskovosti poistného produktu v čase jeho vzniku, sám o sebe nepostačuje na komplexné posúdenie kvality ziskového profilu produktu. Pre hodnotenie dlhodobej udržateľnosti ziskovosti je nevyhnutné zohľadniť aj stabilitu *CSM* v čase a jej citlivosť na zmeny finančných a aktuárskych predpokladov. Jej vývoj v čase tiež ovplyvňuje rozpoznávanie zisku, stabilitu hospodárskych výsledkov a nepriamo aj volatilitu vlastného imania poisťovne.

Správanie *CSM* a jej citlivosť na zmeny trhových a aktuárskych predpokladov sa významne líšia v závislosti od použitého oceňovacieho modelu podľa IFRS 17, najmä medzi všeobecným modelom (*General Measurement Model, GMM*) a prístupom variabilného poplatku (*Variable Fee Approach, VFA*). V rámci *GMM* je *CSM* určená pri prvotnom ocenení poistnej zmluvy a následne diskontovaná pomocou historickej (*locked-in*) diskontnej sadzby. V tomto modeli je *CSM* vnímaná ako fixne dohodnutá marža za poskytovanie poistného krytia, ktorá nereaguje na následné zmeny trhových úrokových sadzieb a ani na vývoj finančných trhov. Trhové zmeny sa tak premietajú priamo do výsledku hospodárenia, zatiaľ čo *CSM* je ovplyvňovaná výlučne zmenami v nefinančných predpokladoch.

Investičné životné poistenie patrí medzi produkty s priamou účasťou na zisku, na ktoré sa uplatňuje prístup variabilného poplatku. V rámci *VFA* je *CSM* diskontovaná aktuálnymi trhovými sadzbami a jej hodnota sa priebežne upravuje v závislosti od zmien finančných aj poistných predpokladov. *CSM* v tomto prípade plní funkciu absorpčného mechanizmu trhových šokov, keďže nepriaznivý vývoj finančných trhov sa primárne premieta do jej zníženia, zatiaľ čo priaznivý vývoj vedie k jej nárastu. Výsledkom je vyššia volatilita *CSM* v súvahe, avšak relatívne stabilnejší hospodársky výsledok, keďže trhové vplyvy sú rozpoznávané postupne prostredníctvom uvoľňovania *CSM* do zisku.

Vysoká volatilita zmluvnej servisnej marže je typickým znakom produktov oceňovaných podľa *VFA* a predstavuje dôležitý signál o citlivosti produktu na trhové riziká a o jeho blízkosti k hranici stratovosti. Zvýšená volatilita *CSM* naznačuje, že aj relatívne mierne nepriaznivé zmeny predpokladov môžu viesť k výraznému zníženiu alebo úplnému vyčerpaniu *CSM*, čo sa môže v ďalších obdobiach prejaviť zvýšenou volatilitou výsledku hospodárenia.

Indikátor volatility *CSM* preto poskytuje kvantitatívny nástroj na hodnotenie stability očakávanej ziskovosti produktu a jeho schopnosti dlhodobo generovať zisk v meniacich sa trhových podmienkach. V kontexte návrhu a úprav poistných produktov môže tento indikátor slúžiť

ako podklad pre optimalizáciu poplatkovej štruktúry, napríklad prostredníctvom vhodnej kombinácie variabilných poplatkov viazaných na výkonnosť podkladových aktív a fixných administratívnych poplatkov.

Z pohľadu akcionárov má volatilita *CSM* významný vplyv aj na stabilitu vlastného imania poisťovne. Hoci je prístup *VFA* koncipovaný tak, aby tlmil okamžitý vplyv trhových výkyvov na výsledok hospodárenia, nadmerná volatilita zmluvnej servisnej marže môže viesť k jej častému vyčerpaniu, čím sa znižuje schopnosť produktu plniť stabilizačnú funkciu v rámci poistného portfólia. Indikátor volatility *CSM* tak umožňuje identifikovať, či daný produkt predstavuje dlhodobo udržateľný zdroj zisku, alebo naopak, zdroj zvýšenej finančnej nestability.

Volatilita *CSM* je kvantifikovaná pomocou normalizovanej smerodajnej odchýlky medziročných zmien *CSM* v pomere k jej priemernej hodnote počas sledovaného obdobia, pričom výpočet indikátora je obmedzený na obdobie do vyčerpania *CSM*.

$$CSM_{vol} = \frac{\sigma(\Delta CSM_t)}{\overline{CSM}} = \frac{\sqrt{\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}(\Delta CSM_t - \overline{\Delta CSM})^2}}{\overline{CSM}} \tag{4}$$

kde:
$\Delta CSM_t$ - medziročná absolútna zmena *CSM* na začiatku roka *t* oproti nadchádzajúcemu roku,
$\overline{\Delta CSM}$ - priemerná medziročná absolútna zmena *CSM*,
$\overline{CSM}$ - priemerná hodnota *CSM* na začiatku roka.

### 2.3 Indikátor 3 - Kapitálová efektívnosť produktu

Predchádzajúce indikátory sa zameriavali najmä na hodnotenie ziskovosti a stability *CSM* z pohľadu účtovného rámca IFRS 17. Pre komplexnejšie posúdenie ekonomických vlastností produktu je však potrebné zohľadniť aj vzťah medzi generovaným ziskom a kapitálom, ktorý musí poisťovňa držať na krytie súvisiacich rizík.

V prípade investičného životného poistenia sa kombinuje poistná ochrana s investičnou zložkou, čo môže viesť k zvýšenej citlivosti na finančné aj poistné riziká. Tieto riziká sa následne premietajú do kapitálových požiadaviek vyjadrených prostredníctvom kapitálovej požiadavky na solventnosť (*Solvency Capital Requirement, SCR*) definovanej vo smernici Solventnosť II. Výška *SCR* predstavuje množstvo kapitálu, ktoré musí poisťovňa držať na pokrytie neočakávaných strát s vysokou úrovňou pravdepodobnosti.

Prepojenie medzi očakávaným ziskom a kapitálovou náročnosťou produktu je možné zachytiť prostredníctvom indikátora kapitálovej efektívnosti (*Capital Efficiency, CE*). Tento indikátor vyjadruje, aký objem očakávaného zisku pripadá na jednotku kapitálu, ktorý musí poisťovňa držať na krytie rizík vyplývajúcich z daného produktu. Vyššia hodnota indikátora naznačuje, že produkt generuje relatívne vyšší zisk v pomere ku kapitálovým požiadavkám, a je teda z pohľadu poisťovne kapitálovo efektívnejší. Naopak nízka hodnota indikátora môže signalizovať, že produkt je kapitálovo náročný vzhľadom na generovaný zisk, čo môže znižovať jeho efektívnosť z pohľadu riadenia kapitálu. Platí

$$CE = \frac{CSM_0}{SCR} \tag{5}$$

kde:
$CSM_0$ - počiatočná hodnota *CSM* stanovená pri počiatočnom ocenení podľa IFRS 17,
$SCR$ - kapitálová požiadavka na solventnosť stanovená podľa Solventnosť II.

## 2.4 Indikátor 4 - Interná miera návratnosti klienta

Indikátory *PM*, volatility *CSM* a *CE* poskytujú informáciu o ekonomickej kvalite produktu z pohľadu poisťovne, avšak neposkytujú informácie o finančnom úžitku produktu pre poistníka. Na tento účel je vhodné doplniť kompozitný index o indikátor založený na peňažných tokoch z pohľadu klienta, ktorý umožňuje kvantifikovať reálny výnos produktu pre spotrebiteľa.

Interná miera návratnosti pre klienta (*Internal Rate of Return, IRR*) predstavuje diskontnú sadzbu, pri ktorej sa súčasná hodnota očakávaných peňažných tokov poistnej zmluvy z pohľadu poistníka rovná nule. Peňažné toky sú modelované na mesačnej báze. Negatívne peňažné toky predstavujú mesačné platby poistného, zatiaľ čo pozitívne peňažné toky zahŕňajú poistné plnenia pri dožití, poistné plnenia pri úmrtí a očakávané odkupné hodnoty v prípade predčasného ukončenia zmluvy. Peňažné toky sú vážené príslušnými pravdepodobnosťami, čím je zabezpečené, že indikátor reflektuje na očakávané správanie klienta počas trvania zmluvy.

Matematicky je interná miera návratnosti klienta definovaná ako riešenie rovnice

$$\sum_{t=0}^{T} \frac{CF_t}{(1 + IRR_k)^{t/12}} = 0 \tag{6}$$

kde:
$IRR_k$ - interná miera návratnosti pre klienta,
$CF_t$ - mesačné peňažné toky z pohľadu klienta v mesiaci *t*,
$T$ - celkový počet mesiacov trvania poistnej zmluvy.

Výsledná hodnota *IRR* je následne transformovaná na ročnú mieru návratnosti vzorcom

$$IRR_r = (1 + IRR_m)^{12} - 1 \tag{7}$$

kde:
$IRR_r$ - ročná interná miera návratnosti,
$IRR_m$ - mesačná interná miera návratnosti.

Z regulačného hľadiska má indikátor internej miery návratnosti klienta významné presahy do viacerých regulačných rámcov. V kontexte regulácie PRIIPs je úzko prepojený s konceptom redukcie výnosu a so scenármi výkonnosti prezentovanými v Dokumente s kľúčovými informáciami (*Key Infomation Document, KID*). Z pohľadu smernice IDD predstavuje *IRR* klienta kvantitatívne vyjadrenie princípu *hodnoty za vynaložené peniaze*, keďže nízka hodnota indikátora môže signalizovať neprimerané nákladové zaťaženie produktu alebo nesúlad medzi charakterom produktu a potrebami cieľového trhu.

## 2.5 Indikátor 5 - Redukcia výnosu produktu

Popri internej miere návratnosti pre klienta je vhodné analyzovať aj mieru, do akej nákladová štruktúra produktu znižuje potenciálny výnos klienta. Na tento účel je do kompozitného indexu zaradený indikátor redukcie výnosu produktu (*Reduction in Yield, RIY*). V rámci regulácie PRIIPs slúži ako základný kvantitatívny indikátor nákladovej záťaže prezentovaný klientovi v dokumente *KID*. V kontexte smernice IDD poskytuje merateľný podklad pre posúdenie primeranosti produktu cieľovému trhu a férovosti voči klientovi.

Indikátor *RIY* vyjadruje o koľko percentuálnych bodov ročne sú výnosy klienta znížené v dôsledku nákladov spojených s poistným produktom, ako sú poplatky za správu, rizikové poistné, provízie a ostatné administratívne náklady. Inými slovami kvantifikuje rozdiel medzi

výnosnosťou hypotetického scenáru bez nákladov a výnosnosťou reálneho produktu so započítanými nákladmi.

Pre účely tohto článku je indikátor *RIY* vypočítaný na základe dvoch súborov peňažných tokov z pohľadu klienta:

- reálnych peňažných tokov, ktoré zahŕňajú všetky zmluvné náklady produktu a,
- alternatívnych peňažných tokov bez nákladov, ktoré boli samostatne namodelované pri zachovaní rovnakej investičnej výkonnosti, rizikových udalostí a správania poistníkov.

*RIY* je definovaný ako rozdiel medzi internou mierou návratnosti klienta vypočítanou z peňažných tokov bez nákladov a internou mierou návratnosti klienta vypočítanou z reálnych peňažných tokov.

$$RIY = IRR_H - IRR_R \tag{8}$$

kde:
$IRR_H$ - interná miera návratnosti klienta v hypotetickom scenári bez nákladov,
$IRR_R$ - interná miera návratnosti klienta pri započítaní všetkých nákladov.

Rovnako ako pri výpočte *IRR* klienta, aj pri výpočte *RIY* sú peňažné toky modelované na mesačnej báze a následne transformované na ročné hodnoty, aby bola zabezpečená porovnateľnosť indikátora s regulačnými požiadavkami a ostatnými indikátormi.

Z interpretačného hľadiska platí, že vyššia hodnota *RIY* indikuje vyššie nákladové zaťaženie produktu a nižšiu efektívnosť transformácie investičného výnosu v prospech klienta. Naopak, nižšia hodnota *RIY* signalizuje transparentnejší a nákladovo efektívnejší produkt.

### 2.6 Indikátor 6 - Nákladová náročnosť produktu

Významným doplnkom indikátora redukcie výnosu je indikátor nákladovej náročnosti produktu (*Cost Intensity, CI*), ktorý kvantifikuje rozsah nákladov v pomere k objemu prijatého poistného. Cieľom tohto indikátora je zachytiť absolútnu úroveň nákladovej náročnosti produktu nezávisle od investičnej výkonnosti a klientsky dosiahnutého výnosu.

Indikátor je definovaný ako pomer súčasnej hodnoty všetkých nákladových peňažných tokov k súčasnej hodnote poistného.

$$CI = \frac{PV(C)}{PV(P)} \tag{9}$$

Súčasná hodnota celkových nákladov zahŕňa všetky peňažné toky nákladového charakteru súvisiace s uzatvorením, správou a ukončením poistnej zmluvy. Konkrétne ide o počiatočné a obnovovacie provízie, počiatočné náklady, fixné a variabilné administratívne náklady, náklady spojené s poistnými plneniami, kapitálové poplatky a poplatky účtované z akumulačného účtu. Všetky tieto náklady sú diskontované konzistentne s diskontovaním poistného, čím sa zabezpečuje časová a metodická konzistentnosť výpočtu.

Zahrnutie indikátora *CI* do kompozitného indexu umožňuje zachytiť vzájomné prepojenie a potenciálne napätie medzi viacerými regulačnými požiadavkami. Z pohľadu regulácie PRIIPs a smernice IDD tento indikátor priamo reflektuje mieru nákladovej transparentnosti a primeranosti produktu voči klientovi, keďže vysoký podiel nákladov na poistnom je spravidla spojený so znížením hodnoty produktu pre poistníka. Súčasne však z pohľadu regulácie IFRS 17 predstavuje vyššia nákladová úroveň jeden zo zdrojov ziskovosti poistného portfólia, ktorý sa premieta do výšky *CSM* a do stability ekonomických výsledkov poisťovne. Nepriamo sa

indikátor dotýka aj regulácie Solventnosť II, keďže vyššie náklady súvisia s požiadavkami na krytie rizík a kapitálovým zaťažením produktu.

### 2.7 Indikátor 7 - Riziková náročnosť produktu

Predchádzajúce indikátory zachytávajú najmä ziskovosť, stabilitu výsledkov a hodnotu produktu z pohľadu klienta, avšak kompozitný index je potrebné doplniť aj o explicitný pilier rizikovosti a kapitálovej náročnosti produktu. Túto oblasť reprezentuje indikátor rizikovej náročnosti produktu (*Risk Intensity, RI*), ktorý predstavuje pomer rizikovej úpravy o nefinančné riziká k najlepšiemu odhadu záväzkov.

Riziková úprava o nefinančné riziká (*Risk Adjustment, RA*) podľa IFRS 17 predstavuje kompenzáciu, ktorú poisťovňa požaduje za prevzatie nefinančných rizík vyplývajúcich z poistných zmlúv. Najlepší odhad záväzkov z poistných zmlúv (*Best Estimate Liabilities, BEL*) zasa predstavuje súčasnú hodnotu očakávaných budúcich peňažných tokov.

Formálne je indikátor definovaný nasledovne

$$RI = \frac{RA}{BEL} \tag{10}$$

Tento pomer vyjadruje, akú časť z celkových očakávaných záväzkov tvorí kompenzácia za riziko. Čím je vyššia hodnota indikátora, tým vyššia je neistota a rizikovosť poistného produktu, čo sa môže premietať do vyššej kapitálovej požiadavky v rámci Solventnosti II. Naopak nižšia hodnota indikuje stabilnejšiu štruktúru peňažných tokov a nižšiu citlivosť na zmeny predpokladov, ako sú úmrtnosť, odstup od zmluvy či nákladové parametre.

## 3 Konštrukcia kompozitného indexu

Keďže jednotlivé indikátory sú vyjadrené v rôznych jednotkách a rozsahoch, je potrebné ich pred agregáciou do kompozitného indexu normalizovať na porovnateľnú škálu. V tomto príspevku je normalizácia realizovaná pomocou benchmarkových intervalov odvodených na základe dostupných štúdií a regulačných analýz o investičnom životnom poistení.

Analýzy finančných výsledkov poisťovní naznačujú, že ziskové marže sa zvyčajne pohybujú približne medzi 5 % a 10 % objemu poistného (Ernst & Young, 2025). Pričom nižšie hodnoty sú typické pre vysoko konkurenčné trhy a vyššie hodnoty pre produkty s vyššími distribučnými alebo investičnými poplatkami. Zmena *CSM* sa zase pohybovala od 1 % - 23 % (Winkler & Kansal, 2024).

Benchmark pre indikátor kapitálovej efektívnosti sme si museli odvodiť, keďže sme nenašli presne takúto metriku. Použili sme informácie (Winkler & Kansal, 2024): CSM je 4 % - 8 % zo záväzkov a SCR je 1,5 % - 3 %. Výpočtom sme potom získali hodnoty od 1,3 % do 5,3 %.

Indická poisťovňa HDFC uvádza, že v priemere za roky 2015 až 2025 dosahovala *IRR* pre klienta investičného životného poistenia 8 % - 12 % (Rodrigues, 2026). Pre Indiu tvoria tieto produkty významnú časť životného poistenia, naopak v rámci Slovenska v posledných rokoch zaznamenávame pokles predaja týchto produktov, a to dokonca až o 36,9 % pre rok 2023 (Victor, 2023). Pre porovnanie čistý výnos týchto produktov na Slovensku v rokoch 2020 až 2023 dosahoval stratu 0,7 % až 4 % zisk (EIOPA, 2025b). Z tohto dôvode sme sa rozhodli nastaviť interval od 2 % do 8 %.

Európsky orgán pre poisťovníctvo a penzijné spoločnosti (European Insurance and Occupational Pensions Authority, EIOPA) vydáva každé 2 roky Správu o nákladoch a historickej výkonnosti (*Cost and past performance report*). Z poslednej správy z roku 2025 vyplýva, že pri investičnom životnom poistení na Slovensku bola hodnota *RIY* 1,4 %. Avšak tento údaj je pre produkty trvajúce viac ako 20 rokov a náš analyzovaný produkt má poistnú dobu len 10

rokov. Takýto údaj pre Slovensko nie je uvedený, tak sme použili rozmedzie ostatných krajín, a to 1,8 % až 4,4 % (EIOPA, 2025b).

Na porovnanie, Taliansky inštitút pre dohľad nad poisťovníctvom (Istituto per la Vigilanza sulle Assicurazioni, IVASS) uvádza vo svojich štatistikách, že priemerné hodnoty *RIY* sa pri investičných životných poisteniach pohybujú približne okolo 2,9 %, zatiaľ čo pri hybridných produktoch približne na úrovni 2,5 % (IVASS, 2025).

Analýzy nákladovej štruktúry investičných poistných produktov naznačujú, že celková nákladová záťaž sa často pohybuje približne medzi 20 % až 40 % z objemu poistného. Významnú časť týchto nákladov tvoria distribučné provízie a poplatky za správu aktív, ktoré môžu predstavovať 70 % až 80 % celkových nákladov produktu (Walker, 2020). V správe firmy UNIQA (2022) pre investičné životné poistenia z roku 2022 je tento indikátor vo výške 36,4 %, čo potvrdzuje vhodnosť zvoleného intervalu.

Analýzy IFRS 17 výkazov poisťovní naznačujú, že hodnoty *RA* sa najčastejšie pohybujú približne medzi 1 % a 7 % hodnoty poistných záväzkov (Winkler & Kansal, 2024). Prepočítali sme túto hodnotu aj na základe údajov pre investičné životné poistenie na Slovensku čerpaných z databázy poisťovacích štatistík publikovanou organizáciou EIOPA (EIOPA, 2025a). Hodnota *BEL* pre rok 2024 bola skoro 780 miliónov € a hodnota *RA* skoro 39,5 milióna €, čo v prepočte dáva výsledný indikátor *RI* okolo 5 %. Táto riziková úroveň je počítaná pri zaistení, ale v našom produkte vypracovaného pre analýzu v tomto príspevku sme o zaistení neuvažovali. Preto sme nastavili dolnú hranicu na 5 % a hornú až na 15 %.

Následne na základe benchmarkov sa jednotlivé indikátory transformujú na hodnotu v intervale 0 až 1. Hodnota 1 predstavuje optimálnu alebo priaznivú úroveň indikátora, zatiaľ čo hodnota 0 predstavuje nepriaznivú alebo hraničnú úroveň indikátora.

Rozlišujeme 2 typy indikátorov, a to pozitívne a negatívne. Pozitívny je taký, kde čím vyššia hodnota, tým lepšie hodnotenie. Pri negatívnom je to presne naopak, čím nižšia hodnota, tým lepšie hodnotenie. Teda pre každý typ bude normalizácia prebiehať inak.

Pre pozitívny indikátor

$$I^{+} = \frac{I_i - Min}{Max - Min} \tag{11}$$

kde:
$I^{+}$ - konečné skóre pozitívneho indikátora po normalizácii,
$I_i$ - hodnota *i*-teho indikátora pred normalizáciou,
$Min$ - dolná hranica benchmarkového intervalu,
$Max$ - horná hranica benchmarkového intervalu.

Pre negatívny indikátor

$$I^{-} = 1 - \frac{I_i - Min}{Max - Min} \tag{12}$$

kde:
$I^{-}$ - konečné skóre negatívneho indikátora po normalizácii.

V prípade ak konečné skóre indikátora presiahne interval <0, 1>, upraví sa na najbližšiu hranicu. Teda ak je skóre vyššie ako 1 nastaví sa hodnota 1 a pre negatívne skóre sa nastaví 0. Zaradenie jednotlivých indikátorov do pozitívnych alebo negatívnych indikátorov spolu s príslušným benchmarkom je uvedené v Tab. 1.

*Tab. 1: Prehľad zaradenia a benchmarkov pre jednotlivé indikátory*

| Indikátor | Zaradenie | Benchmark (%) |
|---|---|---|
| **PM** | pozitívny | 5,00 - 10,00 |
| **Volatilita CSM** | negatívny | 1,00 - 23,00 |
| **CE** | pozitívny | 1,30 - 5,30 |
| **IRR** | pozitívny | 2,00 - 8,00 |
| **RIY** | negatívny | 1,80 - 4,40 |
| **CI** | negatívny | 20,00 - 40,00 |
| **RI** | negatívny | 5,00 - 15,00 |

Zdroj: vlastné spracovanie podľa Ernst & Young (2025), Winkler & Kansal (2024), Rodrigues (2026), IVASS (2025) a Walker (2020).

Normalizované indikátory sú následne rozdelené do 3 pilierov. Pri použití vzorca (1) je kompozitný index definovaný nasledovne

$$CI = 0{,}4 \times PEP + 0{,}3 \times PVC + 0{,}3 \times PCR \tag{13}$$

kde:
$PEP$ - skóre za pilier Ekonomická výkonnosť produktu,
$PVC$ - skóre za pilier Hodnota produktu pre klienta,
$PCR$ - skóre za pilier Nákladovosť a rizikovosť produktu.

Vo vzorci (13) môžeme vidieť, že sme pridali ekonomickej výkonnosti vyššiu váhu ako ostatným pilierom. Ekonomická výkonnosť má zásadný vplyv na dlhodobú udržateľnosť a efektívnosť produktu z pohľadu finančnej inštitúcie. Teda odzrkadľuje schopnosť produktu generovať primeraný výnos, pokrývať náklady a prispievať k stabilite portfólia. Ak produkt nedosahuje dostatočnú ekonomickú výkonnosť, jeho poskytovanie by nemuselo byť dlhodobo udržateľné, bez ohľadu na jeho ostatné vlastnosti. Z tohto dôvodu bola tomuto pilieru priradená najvyššia váha v rámci hodnotenia.

Zvyšným dvom pilierom boli priradené rovnaké váhy. Dôvodom je skutočnosť, že hodnota produktu pre klienta a nákladovosť a rizikovosť produktu predstavujú z pohľadu hodnotenia produktu rovnocenné a navzájom sa dopĺňajúce oblasti. Prvý z nich zachytáva ekonomický prínos produktu pre poistníka, najmä prostredníctvom výnosnosti a dopadu nákladov, zatiaľ čo druhý reflektuje mieru nákladovej záťaže a rizikového profilu produktu. Rovnaké váženie týchto dvoch pilierov zároveň zabezpečuje vyvážený pohľad medzi perspektívou klienta (výnos vs. náklady) a rizikovými charakteristikami produktu, bez preferovania jednej oblasti na úkor druhej.

Pre účely interpretácie výslednej hodnoty kompozitného indexu boli stanovené intervaly hodnotenia kvality produktu (Tab. 2). Produkt s hodnotou indexu blízkou 0 predstavuje slabšie nastavenie produktu, zatiaľ čo hodnota blízka 1 poukazuje na priaznivejšiu kombináciu ziskovosti, hodnoty pre klienta, nákladovosti a rizikovosti.

*Tab. 2: Intervaly hodnotenia kvality produktu*

| | |
|---|---|
| **Nízka kvalita produktu** | 0,00 - 0,30 |
| **Priemerná kvalita produktu** | 0,30 - 0,60 |
| **Nadpriemerná kvalita produktu** | 0,60 - 0,80 |
| **Vysoká kvalita produktu** | 0,80 - 1,00 |

Zdroj: vlastné spracovanie

## 4 Praktická aplikácia indexu

V tejto časti príspevku aplikujeme vytvorený kompozitný index na modelové portfólio tvorené 1 000 rovnakými zmluvami investičného životného poistenia. Ide o ilustratívny príklad, ktorého cieľom je demonštrovať praktické využitie navrhnutej metodiky výpočtu indexu.

Poistný produkt je navrhnutý pre 30-ročného muža, ktorý uzatvára zmluvu na 10 rokov a platí poistné vo výške 130 € mesačne. Tento časový horizont predstavuje skôr kratšie obdobie v rámci investičného životného poistenia a bol zvolený výlučne na účely modelovej ilustrácie výpočtu. V prípade úmrtia poistenca sa vypláca buď minimálna garantovaná suma 3 000 €, alebo aktuálna hodnota jednotkového fondu - podľa toho, ktorá z týchto hodnôt je vyššia.

Okrem poistného a poistných plnení sa do peňažných tokov zahrnuli aj poplatky, provízie a náklady. Ich prehľad je v Tab. 3. Na namodelované peňažné toky sme aplikovali príslušné pravdepodobnosti úmrtnosti a odstúpenia od zmluvy. Mieru stornovanosti sme v prvom roku nastavili na 10 %, v druhom na 6 %, v treťom na 2 % a v každom ďalšom roku na 1 %.

*Tab. 3: Prehľad niektorých peňažných tokov*

| **Poplatky** | |
|---|---|
| **Administratívny poplatok** | 5 % mesačne |
| **Fixný administratívny poplatok** | 1,50 € mesačne |
| **Kapitálový poplatok** | 8 % posledný mesiac |
| **Poplatok za správu aktív** | 0,20 % mesačne |
| **Provízie** | |
| **Počiatočná provízia** | 125 % z prvého poistného |
| **Obnovovacia provízia** | 1 % z ďalších poistných |
| **Náklady** | |
| **Počiatočné náklady** | 80 € na zmluvu |
| **Udržiavacie náklady** | 4 € mesačne od druhého roku |
| **Náklady spojené s poistným plnením** | 10 € na poistnú udalosť |

Zdroj: vlastné spracovanie

Z naprojektovaných peňažných tokov sme potom podľa pravidiel jednotlivých regulácií zistili potrebné položky do jednotlivých indikátorov. V Tab. 4 sú výsledné hodnoty indikátorov.

*Tab. 4: Porovnanie hodnôt indikátorov pred a po normalizácii a ich benchmarkov*

| **Indikátor** | **Pred normalizáciou (%)** | **Po normalizácii** | **Benchmark (%)** |
|---|---|---|---|
| **PM** | 15,48 | 1,00 | 5,00 - 10,00 |
| **Volatilita CSM** | 2,11 | 0,95 | 1,00 - 23,00 |
| **CE** | 5,17 | 0,97 | 1,30 - 5,30 |
| **IRR** | 8,01 | 1,00 | 2,00 - 8,00 |
| **RIY** | 8,18 | 0,00 | 1,80 - 4,40 |
| **CI** | 37,06 | 0,15 | 20,00 - 40,00 |
| **RI** | 16,21 | 0,00 | 5,00 - 15,00 |

Zdroj: vlastné spracovanie

Indikátor *PM* prekročil stanovený interval, a to až o 5,48 %, čo poukazuje na výraznú schopnosť produktu generovať ekonomický zisk pre poisťovňu. Takýto výsledok je typický najmä pre produkty s vyššími poplatkami, čo však nie je výhodné pre klienta. Po následnej normalizácii bol indikátor transformovaný na hodnotu 1. V dôsledku tohto kroku už miera prekročenia nemá v ďalšej analýze vplyv na výslednú hodnotu indikátora.

Ďalšie dva indikátory v pilieri *PEP* dosiahli uspokojivé hodnoty. Po normalizácii sa pohybujú tesne pod maximálnou úrovňou. Indikátor volatility *CSM* naznačuje, že budúce zisky produktu sú relatívne stabilné a menej citlivé na zmeny ekonomických predpokladov, čo môže súvisieť s konzervatívnym nastavením produktu alebo stabilnými modelovými scenármi. Indikátor *CE* poukazuje na to, že produkt generuje relatívne vysoký zisk pri danej kapitálovej náročnosti, a teda je atraktívnejší z pohľadu akcionárov.

Oba indikátory v pilieri *PVC* presiahli stanovený interval. V prípade *IRR* ide o pozitívny výsledok, ktorý poukazuje na vysokú ziskovosť produktu pre klienta. Po normalizácii je tento indikátor nastavený na maximálnu úroveň, teda hodnotu 1. Naopak, negatívny indikátor *RIY* predstavuje nepriaznivý výsledok, keďže signalizuje vysokú nákladovosť produktu, pravdepodobne spôsobenú najmä vysokými poplatkami. Po normalizácii je preto jeho hodnota nastavená na minimálnu úroveň, teda hodnotu 0. Tento záver potvrdzuje aj indikátor *CI*, ktorý sa blíži k hornej hranici intervalu a po normalizácii dosahuje skóre len 0,15. Produkt je teda relatívne nákladovo náročný, čo je v súlade nielen s výsledkom indikátora *RIY*, ale aj indikátora *PM*.

Indikátor *RI* taktiež vyšiel mimo stanoveného rozsahu a poukazuje na vysokú mieru rizika, ktorému je poisťovňa vystavená. Následne je normalizáciou transformovaný na hodnotu 0. Z tohto dôvodu by bolo vhodné zvážiť využitie zaistenia pre daný produkt.

Výsledná hodnota kompozitného indexu dosahuje úroveň 0,56, čo sa blíži k hornej hranici priemerného hodnotenia produktu. Tento výsledok poukazuje na výrazný kontrast medzi jednotlivými piliermi indexu:

- Pilier *PEP* dosahuje vysoké hodnoty, čo znamená, že produkt je veľmi atraktívny z pohľadu poisťovne, najmä z hľadiska ziskovosti a kapitálovej efektívnosti.
- Pilier *PVC* je zmiešaný. Vysoká *IRR* je výrazne redukovaná vysokou hodnotou *RIY*, čo poukazuje na nesúlad medzi hrubou výnosnosťou a čistou hodnotou pre klienta.
- Pilier *PCR* dosahuje nízke hodnoty, čo indikuje vysokú nákladovosť a zvýšenú rizikovosť produktu.

Celkovo možno konštatovať, že analyzovaný produkt je silne orientovaný na ziskovosť a kapitálovú efektívnosť, avšak za cenu vyššej nákladovej záťaže a rizikovosti, ktoré negatívne ovplyvňujú jeho hodnotu pre klienta.

Teda najväčší priestor na zlepšenie je práve v oblasti nákladovosti a rizikovosti produktu, ktoré v súčasnosti výrazne znižujú celkové skóre indexu.

V prípade indikátora *RIY* by zlepšenie mohlo byť dosiahnuté najmä:

- znížením distribučných provízií,
- optimalizáciou poplatkov za správu aktív,
- prípadne väčšou transparentnosťou a zjednodušením poplatkovej štruktúry.

Zníženie hodnoty *RIY* by priamo zvýšilo pilier *PVC*, ktorý je v súčasnosti limitovaný práve vysokými nákladmi. Podobne aj indikátor *CI* naznačuje priestor na optimalizáciu interných nákladov produktu, napríklad efektívnejším nastavením administratívnych procesov alebo redukciou fixných nákladov. V oblasti rizika by mohla pomôcť úprava poistných parametrov, lepšie zosúladenie aktív a záväzkov alebo diverzifikácia portfólia.

Na druhej strane, indikátory ekonomickej výkonnosti už dosahujú veľmi vysoké hodnoty, čo naznačuje, že produkt je z pohľadu poisťovne nastavený efektívne. Priestor na ďalšie zlepšenie je preto obmedzený a prípadne zmeny by mali byť realizované s ohľadom na zachovanie rovnováhy medzi ziskovosťou produktu a jeho hodnotou pre klienta.

Celkovo možno konštatovať, že posun kompozitného indexu na vyššie hodnoty by si vyžadoval najmä presun časti ekonomickej hodnoty od poisťovne smerom ku klientovi, predovšetkým prostredníctvom zníženia nákladovej záťaže produktu. Takýto krok by zároveň viedol k lepšiemu zosúladeniu produktu s požiadavkami spotrebiteľských regulácií, ako sú PRIIPs a IDD, bez výrazného narušenia jeho ekonomickej udržateľnosti.

## 5 Záver

Cieľom tohto príspevku bolo navrhnúť kompozitný index, ktorý umožňuje komplexne hodnotiť investičné životné poistenie z pohľadu viacerých regulačných rámcov súčasne. Navrhnutý index integruje perspektívy účtovnej regulácie, kapitálových požiadaviek a ochrany klienta. Je zložený zo siedmich indikátorov, ktoré sú agregované do troch hlavných pilierov: ekonomickej hodnoty, hodnoty pre klienta a nákladovosti a rizika. Takáto štruktúra umožňuje zachytiť nielen celkové hodnotenie produktu, ale aj identifikovať jeho silné a slabé stránky v jednotlivých pilieroch.

Aplikácia indexu na modelovaný produkt ukázala, že hoci produkt dosahuje vysoké hodnoty z pohľadu ziskovosti a kapitálovej efektívnosti, jeho celkové hodnotenie je limitované najmä vysokou nákladovosťou a rizikovosťou. Teda produkt je nastavený skôr v prospech ekonomickej efektívnosti poisťovne než v prospech čistého výnosu pre klienta. Výsledná hodnota indexu je na úrovni približne 0,56 a poukazuje tak na priemernú kvalitu produktu.

Z analytického hľadiska je dôležitým zistením najmä existencia protichodných záujmov jednotlivých regulácií. Zatiaľ čo regulácie ako IFRS 17 a Solventnosť II podporujú stabilitu a ekonomickú efektívnosť pre poisťovňu, regulácie typu PRIIPs a IDD kladú dôraz na hodnotu pre klienta a transparentnosť. Kompozitný index tak poukazuje na skutočnosť, že optimalizácia produktu vo všetkých týchto pilierov súčasne je len obmedzene dosiahnuteľná.

Hlavným prínosom indexu je možnosť identifikovať kompromisy medzi jednotlivými regulačnými cieľmi a kvantifikovať ich v jednom ukazovateli. Zároveň takýto prístup predstavuje flexibilný nástroj, ktorý môžeme aplikovať aj na porovnanie viacerých produktov alebo na analýzu vplyvu zmien regulačného prostredia.

**Príspevok bol spracovaný v rámci riešenia grantovej úlohy VEGA č. 1/0377/25 *Inovatívne metódy Enterprise risk managementu a ich využitie v riadení a modelovaní rizík*.**

## Literatúra

1. EIOPA. (2025a). *Balance sheet by item S.02.01/Annual/Solo* [dataset]. EIOPA. Dostupné na https://www.eiopa.europa.eu/tools-and-data/insurance-statistics_en
2. EIOPA. (2025b). *Cost and past performance report 2025*. Dostupné na https://www.eiopa.europa.eu/document/download/06bbb472-dd90-4246-825a-f79783b7011a_en?filename=EIOPA-BoS%2025-123%20-%20Costs%20and%20Past%20Peformance%20Report%20-%202025.pdf
3. Ernst & Young. (2025, máj). *Reporting under IFRS 17 and IFRS 9*. Dostupné na https://www.ey.com/content/dam/ey-unified-site/ey-com/en-gl/industries/insurance/documents/ey-gl-reporting-under-ifrs-17-and-ifrs-9-05-2025.pdf
4. European Parliament and Council of the European Union. (2009). *Directive 2009/138/EC on the taking-up and pursuit of the business of Insurance and Reinsurance (Solvency II)* (Solvency II:2009). Dostupné na https://eur-lex.europa.eu/eli/dir/2009/138/oj/eng
5. European Parliament and Council of the European Union. (2014). *Regulation (EU) No 1286/2014 on key information documents for packaged retail and insurance-based investment products (PRIIPs)* (PRIIPs:2014). Dostupné na https://eur-lex.europa.eu/legal-content/EN/TXT/?uri=CELEX:32014R1286
6. European Parliament and Council of the European Union. (2016). *Directive (EU) 2016/97 on insurance distribution* (IDD:2016). Dostupné na https://eur-lex.europa.eu/legal-content/SK/ALL/?uri=celex%3A32016L0097
7. International Accounting Standards Board. (2017). *International Financial Reporting Standard 17: Insurance Contracts (IFRS 17:2017)*. Dostupné na https://www.ifrs.org/issued-standards/list-of-standards/ifrs-17-insurance-contracts/

8. IVASS. (2025). *Statistical bulletin: The Italian life insurance market 2024*. Dostupné na https://www.ivass.it/pubblicazioni-e-statistiche/statistiche/bollettino-statistico/2025/n-04-2025/BOLLETTINO_STATISTICO_Il_mercato_assicurativo_vita_2024_ENG.pdf?language_id=3
9. Rodrigues, F. (2026, január 28). *Understanding ULIP returns in 10 years*. HDFC Life. Dostupné na https://www.hdfclife.com/ulip-plans/ulip-returns-in-10-years
10. UNIQA. (2022). *UNIQA International*. In *UNIQA Group Report 2022*. Dostupné na https://reports.uniqagroup.com/2022/ar/management-report/uniqa-group/operating-segments/uniqa-international.html
11. Victor, A. (2023, september 27). *STATISTICS: Subunit increase for the Slovak insurance market in 1H2023, NBS data shows*. XPRIMM. Dostupné na https://www.xprimm.com/STATISTICS-Subunit-increase-for-the-Slovak-insurance-market-in-1H2023-NBS-data-shows-articol-27-20899.htm
12. Walker, A. (2020). *EIOPA publishes second report on insurance and pension investment products*. Insurance Edge. Dostupné na https://insurance-edge.net/2020/04/06/eiopa-publishes-second-report-on-insurance-pensions-investments
13. Winkler, M. & Kansal, S. (2024, júl). *A word of differences: Challenges reading IFRS 17 Statements*. SSRN. Dostupné na http://dx.doi.org/10.2139/ssrn.4886460

# Fondy ako súčasť vlastného imania verejných vysokých škôl

# Funds as part of the equity in public universities

Alena Kordošová[1]

**Abstrakt**
Fondy verejných vysokých škôl predstavujú významnú súčasť vlastného imania v účtovníctve týchto špecifických neziskových účtovných jednotiek. Medzi fondy, ktoré tvoria súčasť vlastného imania verejných vysokých škôl, zaraďujeme fondy tvorené podľa osobitných predpisov, fond reprodukcie a fondy tvorené zo zisku. Vedecká stať je zameraná na skúmanie týchto fondov tvoriacich vlastné imanie verejných vysokých škôl vo všeobecnosti a osobitne v podmienkach konkrétnych verejných vysokých škôl pôsobiacich na Slovensku. Cieľom vedeckej state je zhodnotenie jednotlivých fondov tvoriacich vlastné imanie vo všetkých verejných vysokých školách na Slovensku ako špecifických neziskových účtovných jednotkách so zreteľom na ich stav a vývoj v skúmanom období.

**Kľúčové slová**
fondy, vlastné imanie, verejné vysoké školy

**Abstract**
Public university funds represent a significant part of the equity in the accounting of these specific non-profit accounting entities. Among the funds that form part of the equity of public universities, we include funds created according to special regulations, the reproduction fund and funds created from profit. The scientific article is focused on examining these funds forming the equity of public universities in general and in particular in the conditions of specific public universities operating in Slovakia. The aim of the scientific article is to evaluate individual funds forming the equity in all public universities in Slovakia as specific non-profit accounting entities with regard to their status and development in the period under review.

**Key words**
funds, equity, public universities

**JEL classification**
L31, M41

## 1 Úvod

Verejné vysoké školy, ako subjekty verejnej správy, majú špecifické postavenie tak v porovnaní s podnikateľskými subjektami, ako aj v porovnaní s ostatnými nepodnikateľskými subjektami. Medzi osobitosti verejných vysokých škôl zaraďujeme aj štruktúru vlastného imania. Špecifickými zložkami vlastného imania vybraných subjektov verejnej správy sú fondy, medzi ktoré zaraďujeme fondy tvorené podľa osobitných predpisov, fond reprodukcie a fondy tvorené zo zisku.

Vedecká stať je zameraná na skúmanie týchto fondov tvoriacich vlastné imanie verejných vysokých škôl vo všeobecnosti a osobitne v podmienkach konkrétnych verejných vysokých škôl pôsobiacich na Slovensku. Cieľom je poukázať na význam a osobitosti jednotlivých

[1] Ekonomická univerzita v Bratislave, Fakulta hospodárskej informatiky, Katedra účtovníctva a audítorstva, Dolnozemská cesta 1, 852 35 Bratislava, alena.kordosova@euba.sk.

druhov fondov, ktoré tvoria vlastné imanie verejných vysokých škôl ako špecifických neziskových účtovných jednotiek so zreteľom na ich stav a vývoj v skúmanom období.

Objektom nášho skúmania je dvadsať verejných vysokých škôl pôsobiacich na území Slovenskej republiky, ktoré sú zároveň subjektami verejnej správy, a ktorých jednotlivé fondy tvoriace vlastné imanie podrobíme hlbšej analýze. Patria sem tieto verejné vysoké školy, ktoré uvádzame v abecednom poradí aj so skratkami uvedenými v zátvorke, ktoré budeme používať v ďalšom texte. Sú nimi:

- Akadémia umení v Banskej Bystrici (AUBB),
- Ekonomická univerzita v Bratislave (EUBA),
- Katolícka univerzita v Ružomberku (KU),
- Prešovská univerzita v Prešove (UNIPO),
- Slovenská poľnohospodárska univerzita v Nitre (SPU),
- Slovenská technická univerzita v Bratislave (STUBA),
- Technická univerzita v Košiciach (TUKE),
- Technická univerzita vo Zvolene (TUZVO),
- Trenčianska univerzita A. Dubčeka v Trenčíne (TNUNI),
- Trnavská univerzita v Trnave (TRUNI),
- Univerzita J. Selyeho (SELYEUNI),
- Univerzita Komenského v Bratislave (UNIBA),
- Univerzita Konštantína Filozofa v Nitre (UKF),
- Univerzita Mateja Bela v Banskej Bystrici (UMB),
- Univerzita Pavla Jozefa Šafárika v Košiciach (UPJS),
- Univerzita sv. Cyrila a Metoda v Trnave (UCM),
- Univerzita veterinárskeho lekárstva a farmácie v Košiciach (UVL),
- Vysoká škola múzických umení v Bratislave (VSMU),
- Vysoká škola výtvarných umení v Bratislave (VSVU),
- Žilinská univerzita v Žiline (UNIZA).

Na účely splnenia stanoveného cieľa a na základe analýzy vývoja a súčasného stavu vybraných položiek vlastného imania jednotlivých verejných vysokých škôl a uvedenej vedeckej a odbornej literatúry, vymedzujeme najprv osobitosti fondov ako súčasti vlastného imania vo verejných vysokých školách v podmienkach Slovenskej republiky. V rámci ďalšieho skúmania fondov vymedzených subjektov verejnej správy, ktoré hlbšie analyzujeme, sa zameriavame na tieto charakteristiky:

- vývoj výšky jednotlivých fondov patriacich do vlastného imania konkrétnych verejných vysokých škôl za ostatných päť rokov,
- štruktúru jednotlivých fondov tvoriacich vlastné imanie verejných vysokých škôl na Slovensku v roku 2024,
- absolútnu výšku a percentuálny podiel fondov tvoriacich vlastné imanie na celkovej výške vlastného imania v roku 2024 vo všetkých verejných vysokých škôl v SR,
- absolútnu výšku a percentuálny podiel konkrétnych druhov fondov na celkovej výške vykazovaných fondov tvoriacich vlastné imanie v roku 2024 vo všetkých verejných vysokých školách v SR.

Základom pre spracovanie príspevku boli rôznorodé literárne zdroje. Významnými použitými zdrojmi sú články publikované vo vedeckých časopisoch: Filatova et al., 2023, Greenfield & Natalia, 2023, Kuzior et al., 2023, Lyeonov et al., 2022, Onopriienko et al., 2023, Pakšiová & Lovciová, 2019 a Stanley, 2017. Medzi ďalšie zdroje zaraďujeme aj príspevok publikovaný v zborníku z vedeckej konferencie: Lehenchuk et al., 2023. Základnú právnu úpravu, ktorú sme pri spracovávaní vedeckej state použili, tvorí zákon č. 131/2002 Z. z.

o vysokých školách v znení neskorších predpisov, pre oblasť charakteristiky jednotlivých skúmaných fondov verejných vysokých škôl, zákon č. 431/2002 Z. z. o účtovníctve v znení neskorších predpisov, opatrenie Ministerstva financií Slovenskej republiky zo 14. novembra 2007 č. MF/24342/2007-74, ktorým sa ustanovujú podrobnosti o postupoch účtovania a účtovej osnove pre účtovné jednotky, ktoré nie sú založené alebo zriadené na účel podnikania v znení neskorších predpisov a opatrenie Ministerstva financií Slovenskej republiky z 30. októbra 2013 č. MF/17616/2013-74, ktorým sa ustanovujú podrobnosti o usporiadaní, označovaní a obsahovom vymedzení položiek individuálnej účtovnej závierky, termíny a miesto ukladania individuálnej účtovnej závierky a výročnej správy pre účtovné jednotky účtujúce v sústave podvojného účtovníctva, ktoré nie sú založené alebo zriadené na účely podnikania v znení neskorších predpisov, pre ich účtovné zobrazenie. Kvantitatívne údaje o jednotlivých fondoch tvoriacich vlastné imanie analyzovaných verejných vysokých škôl sú spracované na základe údajov zverejnených na internetových stránkach FinStatu (2020 – 2024) a Registra účtovných závierok (2020 – 2024).

## 2 Osobitosti fondov tvoriacich vlastné imanie verejných vysokých škôl

Vlastné imanie verejných vysokých škôl je tvorené viacerými položkami, medzi ktoré zaraďujeme:

- základné imanie,
- fondy tvorené podľa osobitných predpisov,
- fond reprodukcie,
- fondy tvorené zo zisku,
- nevysporiadaný výsledok hospodárenia minulých rokov a
- výsledok hospodárenia za účtovné obdobie.

O fondoch tvoriacich vlastné imanie verejných vysokých škôl sa účtuje v účtovej triede 4 – Imanie, fondy, výsledok hospodárenia a dlhodobé záväzky v členení na tieto účtové skupiny:

- 41 – Imanie a fondy,
- 42 – Fondy tvorené zo zisku a prevedené výsledky hospodárenia.

### 2.1 Fondy tvorené podľa osobitných predpisov

Fondy tvorené podľa osobitných predpisov sa účtujú v účtovej skupine 41 – Imanie a fondy, na účte 412 – Fondy tvorené podľa osobitných predpisov. Tvorba fondov podľa osobitných predpisov sa účtuje v prospech účtu 412 – Fondy tvorené podľa osobitných predpisov a použitie fondov na ťarchu tohto účtu. Zásady tvorby a použitia fondov tvorených podľa osobitných predpisov upravuje osobitný predpis, ktorým vo verejných vysokých školách je zákon o vysokých školách (2002). V súlade s týmto zákonom, verejné vysoké školy vytvárajú štipendijný fond a fond na podporu štúdia študentov so špecifickými potrebami. V prípade, že sa finančné prostriedky fondov vedú na samostatných účtoch, stav fondov sa zvyšuje o kreditné úroky a kurzové zisky a znižuje sa o výdavky súvisiace s vedením účtov a kurzové straty.

Štipendijný fond a fond na podporu štúdia študentov so špecifickými potrebami sa tvoria predovšetkým:

- z kladného celkového výsledku hospodárenia,
- z darov, z dedičstva a z výnosov z nich.

Štipendijný fond sa vytvára aj z časti výnosov zo školného a z časti dotácie na sociálnu podporu študentov určenú na sociálne, motivačné a tehotenské štipendiá. Používa sa na poskytovanie štipendií a pôžičiek. (zákon o vysokých školách, 2002)

Fond na podporu štúdia študentov so špecifickými potrebami sa vytvára aj z časti dotácie na uskutočňovanie akreditovaných študijných programov a je možné ho použiť na finančné zabezpečenie zodpovedajúcich podmienok štúdia študentov so špecifickými potrebami vzhľadom na ich špecifické potreby. (zákon o vysokých školách, 2002)

## 2.2 Fond reprodukcie

Ďalším špecifickým fondom tvoreným vo verejných vysokých školách je fond reprodukcie. Fond reprodukcie sa účtuje v účtovej skupine 41 – Imanie a fondy, na účte 413 – Fond reprodukcie. Tvorba fondu reprodukcie sa účtuje v prospech účtu 413 – Fond reprodukcie a jeho použitie na ťarchu tohto účtu. Fond reprodukcie je finančným fondom verejných vysokých škôl a zásady jeho tvorby a použitia upravuje zákon o vysokých školách (2002). Finančné prostriedky fondu reprodukcie sa vedú buď na bežnom účte verejnej vysokej školy alebo na osobitnom bankovom účte fondu reprodukcie v závislosti od rozhodnutia účtovnej jednotky.

Fond reprodukcie je finančným fondom verejných vysokých škôl a tvorí sa:

- z kladného celkového výsledku hospodárenia,
- z darov, dedičstva a výnosov z nich,
- z rezervného fondu,
- z odpisov dlhodobého nehmotného majetku a dlhodobého hmotného majetku podľa odpisového plánu okrem majetku obstaraného z dotácií určených na obstaranie dlhodobého hmotného majetku,
- zo zostatkovej ceny dlhodobého nehmotného majetku a dlhodobého hmotného majetku pri jeho fyzickej likvidácii okrem majetku obstaraného z dotácií určených na obstaranie dlhodobého hmotného majetku,
- zo zostatkovej ceny predaného dlhodobého nehmotného majetku a dlhodobého hmotného majetku okrem majetku obstaraného z dotácií určených na obstaranie dlhodobého hmotného majetku,
- z rozdielu výnosov z predaja dlhodobého nehmotného majetku a dlhodobého hmotného majetku a zo súčtu zostatkovej ceny a nákladov vynaložených v súvislosti s predajom v prípade predaja za cenu vyššiu ako je súčet zostatkovej ceny predaného majetku a nákladov vynaložených v súvislosti s predajom,
- z prostriedkov od iných subjektov podľa uzatvorených zmlúv o združovaní prostriedkov na obstaranie dlhodobého nehmotného majetku a dlhodobého hmotného majetku. (zákon o vysokých školách, 2002)

Fond reprodukcie sa používa:

- na obstaranie dlhodobého nehmotného majetku a dlhodobého hmotného majetku vrátane jeho technického zhodnotenia,
- na poskytovanie prostriedkov podľa uzatvorených zmlúv o združovaní prostriedkov na obstaranie dlhodobého nehmotného majetku a dlhodobého hmotného majetku,
- na splátky úverov použitých na obstaranie dlhodobého nehmotného majetku a dlhodobého hmotného majetku alebo jeho technického zhodnotenia. (zákon o vysokých školách, 2002)

## 2.3 Fondy tvorené zo zisku

Účelové fondy tvorené zo zisku sa účtujú v účtovej skupine 42 – Fondy tvorené zo zisku a prevedené výsledky hospodárenia, a to na účtoch:

- 421 – Rezervný fond,
- 423 – Fondy tvorené zo zisku a

- 427 – Ostatné fondy.

Tvorba uvedených účelových fondov tvorených zo zisku sa účtuje v prospech účtov účtovej skupiny 42 – Fondy tvorené zo zisku a prevedené výsledky hospodárenia a ich použitie na ťarchu týchto účtov. Peňažné prostriedky jednotlivých fondov môžu byť vedené buď:

- na samostatných bankových účtoch alebo
- na bežnom bankovom účte s príslušnou analytickou evidenciou.

Zákonom o vysokých školách (2002) majú verejné vysoké školy predpísanú tvorbu jedného účelového fondu tvoreného zo zisku, a to rezervného fondu. Rezervný fond, ako ďalší finančný fond tvorený verejnými vysokými školami, je tvorený z kladného celkového výsledku hospodárenia, z darov, z dedičstva a z výnosov z nich. Na jeho tvorbu verejné vysoké školy použijú najmenej 40 % svojho kladného celkového výsledku hospodárenia. Používa sa prednostne na vyrovnanie straty z predchádzajúceho roka a na krytie neuhradenej straty z minulých rokov. V prípade, ak verejné vysoké školy nevykazujú stratu, môžu prostriedky rezervného fondu použiť prostredníctvom svojho rozpočtu a na doplnenie ostatných finančných fondov.

Zásady tvorby a použitia ostatných účelových fondov tvorených zo zisku si verejné vysoké školy určujú samy. Preto je potrebné, aby si vo svojich vnútorných predpisoch stanovili, aké ďalšie fondy zo zisku budú vytvárať a na aký účel ich budú používať.

## 3 Komparatívna analýza fondov tvoriacich vlastné imanie verejných vysokých škôl v Slovenskej republike

Prvý ukazovateľ, ktorý podrobíme skúmaniu, je výška fondov tvorených podľa osobitných predpisov všetkých dvadsiatich verejných vysokých škôl pôsobiacich na Slovensku. Tabuľka 1 obsahuje výšku fondov tvorených podľa osobitných predpisov v eurách jednotlivých verejných vysokých škôl za analyzované účtovné obdobia 2020 – 2024.

*Tab. 1: Fondy tvorené podľa osobitných predpisov VVŠ za roky 2020 – 2024 v eurách*

| | FONDY TVORENÉ PODĽA OSOBITNÝCH PREDPISOV | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| **VEREJNÁ VYSOKÁ ŠKOLA** | **2024** | **2023** | **2022** | **2021** | **2020** |
| **AUBB** | 65 243 | 59 240 | 60 547 | 66 119 | 91 367 |
| **EUBA** | 883 744 | 648 155 | 507 108 | 395 982 | 569 927 |
| **KU** | 553 461 | 505 966 | 487 922 | 368 251 | 345 956 |
| **UNIPO** | 1 243 210 | 1 598 453 | 1 458 553 | 1 616 808 | 1 689 905 |
| **SPU** | 440 329 | 364 768 | 332 183 | 304 621 | 362 943 |
| **STUBA** | 2 531 315 | 1 931 968 | 993 642 | 1 109 234 | 1 127 743 |
| **TUKE** | 1 123 800 | 996 651 | 695 450 | 565 658 | 863 854 |
| **TUZVO** | 220 192 | 241 849 | 249 180 | 314 067 | 350 776 |
| **TNUNI** | 163 333 | 165 352 | 127 857 | 123 003 | 137 476 |
| **TRUNI** | 612 417 | 543 496 | 498 200 | 425 732 | 520 561 |
| **SELYEUNI** | 203 169 | 226 042 | 260 009 | 146 336 | 199 208 |
| **UNIBA** | 3 710 695 | 4 717 541 | 2 792 562 | 2 661 038 | 3 081 962 |
| **UKF** | 604 193 | 598 788 | 460 896 | 393 482 | 567 621 |
| **UMB** | 669 653 | 599 365 | 490 224 | 492 028 | 676 768 |
| **UPJS** | 315 176 | 861 636 | 736 554 | 397 215 | 539 198 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| **UCM** | 563 336 | 468 481 | 309 455 | 266 318 | 376 586 |
| **UVL** | 254 166 | 270 788 | 168 821 | 142 215 | 188 393 |
| **VSMU** | 186 991 | 138 580 | 141 777 | 76 083 | 106 141 |
| **VSVU** | 113 596 | 57 136 | 50 046 | 20 641 | 23 616 |
| **UNIZA** | 1 510 245 | 1 271 693 | 1 127 757 | 839 399 | 1 137 814 |

Zdroj: vlastné spracovanie podľa https://finstat.sk/databaza-nadacii-neziskovych-organizacii-zdruzeni a https://registeruz.sk

Ak skúmame výšku fondov tvorených podľa osobitných predpisov jednotlivých verejných vysokých škôl za ostatných päť rokov, môžeme konštatovať neustály nárast výšky týchto fondov len v jednej verejnej vysokej škole medzi rokmi 2020 až 2024, a to konkrétne na Katolíckej univerzite v Ružomberku. V ostatných verejných vysokých školách pohyb týchto fondov zaznamenáva kolísavý trend. Ak porovnávame prvý rok skúmania 2020 s posledným rokom skúmania 2024, pätnásť verejných vysokých škôl vykazuje vyššiu hodnotu týchto fondov a len päť škôl ich pokles.

Druhým ukazovateľom, ktorý podrobíme skúmaniu je výška fondu reprodukcie všetkých dvadsiatich verejných vysokých škôl pôsobiacich na Slovensku. Tabuľka 2 obsahuje výšku fondu reprodukcie v eurách jednotlivých verejných vysokých škôl za analyzované účtovné obdobia 2020 – 2024.

*Tab. 2: Fond reprodukcie VVŠ za roky 2020 – 2024 v eurách*

| | **FOND REPRODUKCIE** | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| **VEREJNÁ VYSOKÁ ŠKOLA** | **2024** | **2023** | **2022** | **2021** | **2020** |
| **AUBB** | 1 349 203 | 1 263 955 | 1 157 169 | 1 058 012 | 1 127 498 |
| **EUBA** | 8 908 094 | 8 851 820 | 7 955 773 | 7 980 439 | 8 218 795 |
| **KU** | 5 069 746 | 5 042 467 | 4 812 870 | 4 596 031 | 4 345 684 |
| **UNIPO** | 1 835 244 | 2 450 294 | 3 169 657 | 3 035 543 | 2 749 640 |
| **SPU** | 5 483 291 | 4 447 811 | 4 806 361 | 3 533 347 | 4 484 772 |
| **STUBA** | 18 175 966 | 20 421 169 | 26 267 718 | 21 827 534 | 22 454 386 |
| **TUKE** | 7 244 160 | 8 658 343 | 8 221 561 | 7 765 171 | 6 630 407 |
| **TUZVO** | 3 492 302 | 3 605 898 | 3 859 962 | 3 591 342 | 3 060 996 |
| **TNUNI** | 5 495 067 | 5 082 307 | 5 031 260 | 5 419 704 | 5 114 490 |
| **TRUNI** | 3 410 650 | 3 024 579 | 2 680 290 | 1 993 809 | 815 287 |
| **SELYEUNI** | 367 345 | 444 199 | 511 571 | 461 626 | 430 977 |
| **UNIBA** | 25 628 774 | 17 537 245 | 28 321 391 | 23 526 096 | 19 453 144 |
| **UKF** | 286 692 | 713 470 | 737 240 | 0 | 704 034 |
| **UMB** | 6 915 432 | 7 929 963 | 7 697 491 | 7 810 418 | 7 989 972 |
| **UPJS** | 1 369 635 | 558 858 | 770 600 | 0 | 0 |
| **UCM** | 1 482 777 | 1 324 306 | 1 309 638 | 1 216 109 | 993 588 |
| **UVL** | 1 782 711 | 2 271 706 | 2 829 191 | 3 209 541 | 2 986 986 |
| **VSMU** | 1 506 202 | 1 420 736 | 1 230 057 | 932 875 | 378 815 |
| **VSVU** | 798 938 | 836 392 | 1 067 425 | 1 043 412 | 969 581 |
| **UNIZA** | 2 955 407 | 5 589 855 | 6 185 567 | 4 986 049 | 1 087 671 |

Zdroj: vlastné spracovanie podľa https://finstat.sk/databaza-nadacii-neziskovych-organizacii-zdruzeni a https://registeruz.sk

Ak skúmame výšku fondu reprodukcie jednotlivých verejných vysokých škôl za ostatných päť rokov, môžeme konštatovať neustály nárast výšky tohto fondu v štyroch verejných vysokých školách medzi rokmi 2020 až 2024, a to konkrétne na Katolíckej univerzite v Ružomberku, Trenčianskej univerzite A. Dubčeka v Trenčíne, Univerzite sv. Cyrila a Metoda v Trnave a Vysokej škole múzických umení v Bratislave. V ostatných verejných vysokých školách pohyb fondu reprodukcie zaznamenáva kolísavý trend. Ak porovnávame prvý rok skúmania 2020 s posledným rokom skúmania 2024, trinásť verejných vysokých škôl vykazuje vyššiu hodnotu tohto fondu a sedem škôl jeho pokles.

Tretí ukazovateľ skúma výška fondov tvorených zo zisku rovnako vo všetkých verejných vysokých škôl pôsobiacich na Slovensku. Tabuľka 3 obsahuje výšku fondov tvorených zo zisku v eurách jednotlivých verejných vysokých škôl za analyzované účtovné obdobia 2020 – 2024.

*Tab. 3: Fondy tvorené zo zisku VVŠ za roky 2020 – 2024 v eurách*

| | FONDY TVORENÉ ZO ZISKU | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| **VEREJNÁ VYSOKÁ ŠKOLA** | **2024** | **2023** | **2022** | **2021** | **2020** |
| **AUBB** | 11 169 | 11 641 | 12 511 | 6 256 | 9 147 |
| **EUBA** | 285 771 | 269 604 | 220 609 | 931 289 | 262 488 |
| **KU** | 304 259 | 310 093 | 214 676 | 687 276 | 534 340 |
| **UNIPO** | 4 356 873 | 3 998 266 | 2 549 016 | 915 648 | 899 216 |
| **SPU** | 125 602 | 122 635 | 129 159 | 136 652 | 137 784 |
| **STUBA** | 4 047 658 | 1 727 855 | 1 566 362 | 1 748 186 | 1 957 677 |
| **TUKE** | 24 588 548 | 20 328 093 | 17 883 512 | 12 670 022 | 11 832 421 |
| **TUZVO** | 5 224 806 | 4 713 196 | 4 224 151 | 3 654 653 | 3 295 150 |
| **TNUNI** | 4 748 395 | 3 171 694 | 1 954 298 | 1 389 458 | 102 639 |
| **TRUNI** | 2 382 319 | 2 568 408 | 3 262 411 | 3 055 844 | 2 385 983 |
| **SELYEUNI** | 1 408 805 | 1 402 238 | 1 402 238 | 1 102 238 | 1 101 605 |
| **UNIBA** | 28 184 010 | 25 059 291 | 24 966 535 | 20 110 614 | 16 371 771 |
| **UKF** | 9 801 253 | 10 130 378 | 9 418 264 | 8 670 659 | 8 798 817 |
| **UMB** | 3 061 520 | 3 085 963 | 3 129 957 | 2 854 014 | 2 542 421 |
| **UPJS** | 14 899 823 | 14 986 426 | 18 109 163 | 16 638 945 | 13 806 815 |
| **UCM** | 834 419 | 787 114 | 1 027 948 | 1 124 967 | 893 714 |
| **UVL** | 73 111 | 73 293 | 76 637 | 71 049 | 76 062 |
| **VSMU** | 3 245 893 | 3 448 815 | 3 281 388 | 3 657 896 | 3 054 440 |
| **VSVU** | 1 389 508 | 1 621 419 | 1 345 918 | 598 608 | 403 858 |
| **UNIZA** | 7 138 289 | 5 127 511 | 4 402 772 | 7 577 133 | 11 123 826 |

Zdroj: vlastné spracovanie podľa https://finstat.sk/databaza-nadacii-neziskovych-organizacii-zdruzeni a https://registeruz.sk

Rovnakým spôsobom analyzujeme aj fondy tvorené zo zisku v jednotlivých verejných vysokých školách za ostatných päť rokov a môžeme konštatovať neustály nárast výšky týchto fondov v šiestich verejných vysokých školách medzi rokmi 2020 až 2024, a to konkrétne na Prešovskej univerzite v Prešove, Technickej univerzite v Košiciach, Technickej univerzite vo Zvolene, Trenčianskej univerzite A. Dubčeka v Trenčíne, Univerzite J. Selyeho a Univerzite Komenského v Bratislave. V ostatných verejných vysokých školách pohyb týchto fondov zaznamenáva kolísavý trend. Ak porovnávame prvý rok skúmania 2020 s posledným rokom

skúmania 2024, štrnásť verejných vysokých škôl vykazuje vyššiu hodnotu týchto fondov a šesť škôl ich pokles.

Podrobnejšej analýze podrobíme fondy tvoriace vlastné imanie za rok 2024 vo všetkých verejných vysokých školách pôsobiacich na Slovensku a zameriame sa na štruktúru týchto fondov nielen v ich peňažnom vyjadrení, ale aj v percentuálnom zastúpení. Tabuľka 4 obsahuje výšku vlastného imania, celkovú výšku fondov, ktoré ho tvoria a aj jednotlivé vykazované súhrnné položky týchto fondov v eurách jednotlivých verejných vysokých škôl za analyzované účtovné obdobie 2024.

*Tab. 4: Štruktúra fondov VVŠ za rok 2024 v eurách*

| VEREJNÁ VYSOKÁ ŠKOLA | VLASTNÉ IMANIE | FONDY AKO SÚČASŤ VLASTNÉHO IMANIA | Fondy tvorené podľa osobitných predpisov | Fond reprodukcie | Fondy tvorené zo zisku |
|---|---|---|---|---|---|
| **AUBB** | 5 632 405 | 1 425 615 | 65 243 | 1 349 203 | 11 169 |
| **EUBA** | 36 282 335 | 10 077 609 | 883 744 | 8 908 094 | 285 771 |
| **KU** | 9 134 773 | 5 927 466 | 553 461 | 5 069 746 | 304 259 |
| **UNIPO** | 20 339 533 | 7 435 327 | 1 243 210 | 1 835 244 | 4 356 873 |
| **SPU** | 38 722 446 | 6 049 222 | 440 329 | 5 483 291 | 125 602 |
| **STUBA** | 146 001 416 | 24 754 939 | 2 531 315 | 18 175 966 | 4 047 658 |
| **TUKE** | 69 737 873 | 32 956 508 | 1 123 800 | 7 244 160 | 24 588 548 |
| **TUZVO** | 31 601 890 | 8 937 300 | 220 192 | 3 492 302 | 5 224 806 |
| **TNUNI** | 25 414 517 | 10 406 795 | 163 333 | 5 495 067 | 4 748 395 |
| **TRUNI** | 12 307 340 | 6 405 386 | 612 417 | 3 410 650 | 2 382 319 |
| **SELYEUNI** | 3 587 296 | 1 979 319 | 203 169 | 367 345 | 1 408 805 |
| **UNIBA** | 193 673 823 | 57 523 479 | 3 710 695 | 25 628 774 | 28 184 010 |
| **UKF** | 31 020 855 | 10 692 138 | 604 193 | 286 692 | 9 801 253 |
| **UMB** | 37 416 774 | 10 646 605 | 669 653 | 6 915 432 | 3 061 520 |
| **UPJS** | 53 376 873 | 16 584 634 | 315 176 | 1 369 635 | 14 899 823 |
| **UCM** | 9 108 091 | 2 880 532 | 563 336 | 1 482 777 | 834 419 |
| **UVL** | 22 578 511 | 2 109 988 | 254 166 | 1 782 711 | 73 111 |
| **VSMU** | 13 634 731 | 4 939 086 | 186 991 | 1 506 202 | 3 245 893 |
| **VSVU** | 9 110 582 | 2 302 042 | 113 596 | 798 938 | 1 389 508 |
| **UNIZA** | 79 998 295 | 11 603 941 | 1 510 245 | 2 955 407 | 7 138 289 |

Zdroj: vlastné spracovanie podľa https://finstat.sk/databaza-nadacii-neziskovych-organizacii-zdruzeni a https://registeruz.sk

Za rok 2024 najvyššiu sumu fondov ako súčasť vlastného imania vykazuje Univerzita Komenského v Bratislave, a to v hodnote 57 523 479 eur, nasledujú Technická univerzita vo Zvolene a prvú trojku uzatvára Slovenská technická univerzita v Bratislave. Naopak, najnižšiu sumu týchto fondov vykazuje Akadémia umení v Banskej Bystrici so sumou 1 425 615 eur a nasledujú Univerzita J. Selyeho a Univerzita veterinárneho lekárstva a farmácie v Košiciach.

Pri hlbšej analýze štruktúry jednotlivých fondov zisťujeme, že najvyššie absolútne hodnoty pri všetkých vykazovaných fondoch má Univerzita Komenského v Bratislave. Najnižšie absolútne hodnoty vykazuje pri fondoch tvorených podľa osobitných predpisov a fondoch tvorených zo zisku Akadémia umení v Banskej Bystrici a pri fonde reprodukcie je najnižšia hodnota vykázaná na Univerzite Konštantína Filozofa v Nitre.

Ďalšej analýze podrobíme percentuálny podiel fondov na vlastnom imaní a podiel jednotlivých položiek fondov na celkovej hodnote fondov tvoriacich vlastné imanie všetkých verejných vysokých škôl za rok 2024, ktoré zobrazujeme v nasledujúcej Tabuľke 5 Percentuálny podiel položiek fondov ako súčasti vlastného imania VVŠ za rok 2024.

*Tab. 5: Percentuálny podiel položiek fondov ako súčasti vlastného imania VVŠ za rok 2024*

| VEREJNÁ VYSOKÁ ŠKOLA | FONDY/ VLASTNÉ IMANIE | FONDY AKO SÚČASŤ VLASTNÉHO IMANIA | Fondy tvorené podľa osobitných predpisov | Fond reprodukcie | Fondy tvorené zo zisku |
|---|---|---|---|---|---|
| **AUBB** | 25,31 | 100 | 4,58 | 94,64 | 0,78 |
| **EUBA** | 27,78 | 100 | 8,77 | 88,39 | 2,84 |
| **KU** | 64,89 | 100 | 9,34 | 85,53 | 5,13 |
| **UNIPO** | 36,56 | 100 | 16,72 | 24,68 | 58,60 |
| **SPU** | 15,62 | 100 | 7,28 | 90,64 | 2,08 |
| **STUBA** | 16,96 | 100 | 10,23 | 73,42 | 16,35 |
| **TUKE** | 47,26 | 100 | 3,41 | 21,98 | 74,61 |
| **TUZVO** | 28,28 | 100 | 2,46 | 39,08 | 58,46 |
| **TNUNI** | 40,95 | 100 | 1,57 | 52,80 | 45,63 |
| **TRUNI** | 52,05 | 100 | 9,56 | 53,25 | 37,19 |
| **SELYEUNI** | 55,18 | 100 | 10,26 | 18,56 | 71,18 |
| **UNIBA** | 29,70 | 100 | 6,45 | 44,55 | 49,00 |
| **UKF** | 34,47 | 100 | 5,65 | 2,68 | 91,67 |
| **UMB** | 28,45 | 100 | 6,29 | 64,95 | 28,76 |
| **UPJS** | 31,07 | 100 | 1,90 | 8,26 | 89,84 |
| **UCM** | 31,63 | 100 | 19,56 | 51,47 | 28,97 |
| **UVL** | 9,35 | 100 | 12,05 | 84,49 | 3,46 |
| **VSMU** | 36,22 | 100 | 3,79 | 30,49 | 65,72 |
| **VSVU** | 25,27 | 100 | 4,93 | 34,71 | 60,36 |
| **UNIZA** | 14,51 | 100 | 13,01 | 25,47 | 61,52 |

Zdroj: vlastné spracovanie

Za rok 2024 najvyššie percento fondov na vlastnom imaní dosiahla Katolícka univerzita v Ružomberku, a to 64,89 %, nasledujú Univerzita J. Selyeho a Trnavská univerzita v Trnave. Vo všetkých uvádzaných univerzitách fondy predstavujú viac ako 50 % ich vlastného imania. Najnižší podiel na vlastnom imaní dosahujú fondy na Univerzite veterinárneho lekárstva a farmácie v Košiciach s 9,35 %-tami, nasledujú Žilinská univerzita v Žiline, Slovenská poľnohospodárska univerzita v Nitre a Slovenská technická univerzita v Bratislave. Vo všetkých uvádzaných univerzitách fondy predstavujú menej ako 20 % ich vlastného imania.

Ak sa hlbšie pozrieme na jednotlivé druhy fondov a ich percentuálne zastúpenie na celkovej výške fondov zisťujeme, že polovica verejných vysokých škôl má najvyšší podiel tvorený fondom reprodukcie a druhá polovica má zase najvyšší podiel tvorený fondami tvorenými zo zisku. Najnižší percentuálny podiel vykazuje fond reprodukcie len v jednej verejnej vysokej škole, a to na Univerzite Konštantína Filozofa v Nitre. Fondy tvorené podľa osobitných predpisov tvoria najnižší podiel v štrnástich verejných vysokých školách a fondy tvorené zo zisku v piatich verejných vysokých školách.

## 4 Záver

Výsledky analýzy fondov tvoriacich vlastné imanie všetkých verejných vysokých škôl pôsobiacich na Slovensku dokazujú, že ich vývoj v rámci skúmaného päťročného obdobia je čiastočne ovplyvňovaný veľkosťou verejnej vysokej školy a čiastočne jednotlivými krízami prebiehajúcimi v tomto období. Volatilita hodnoty fondov tvoriacich vlastné imanie za skúmané päťročné obdobie potvrdzuje, že jednotlivé verejné vysoké školy dokázali odolávať následkom začínajúcich a naďalej pretrvávajúcich kríz s rôznou mierou.

Ak však porovnávame výšku jednotlivých fondov tvoriacich vlastné imanie v roku 2024 v porovnaní s rokom 2020 môžeme konštatovať, že v priemere 70 % verejných vysokých škôl vykazovalo ich nárast, napriek krízam, ktoré sa v tomto období začali a niektoré z nich pokračujú aj v súčasnosti, a v priemere len 30 % vykazovalo pokles hodnoty týchto fondov.

V rámci štruktúry fondov a ich jednotlivých položiek za rok 2024 zisťujeme, že podiel fondov na vlastnom imaní vyšší ako 50 % sa vyskytuje len v troch verejných vysokých školách a vo zvyšných sedemnástich verejných vysokých školách sa tento podiel pohybuje pod 50 %. Percentuálne zastúpenie analyzovaných fondov na ich celkovej výške v roku 2024 je v rámci jednotlivých verejných vysokých škôl rôznorodé. Polovica verejných vysokých škôl zaznamenáva najvyššie percento zastúpené fondom reprodukcie a druhá polovica zase zaznamenáva najvyššie percento zastúpené fondami tvorenými zo zisku. Fondy tvorené podľa osobitných predpisov sa podieľajú na celkovej výške fondov najnižším percentom až v štrnástich verejných vysokých školách.

Výsledky skúmania všetkých fondov tvoriacich vlastné imanie jednotlivých verejných vysokých škôl potvrdzujú rôznu variabilitu skúmaných položiek vlastného imania. Ani jeden fond vlastného imania nezaznamenal konzistentné správanie sa vo všetkých verejných vysokých školách. Rovnako aj výrazná volatilita percentuálneho podielu jednotlivých fondov vlastného imania v rámci všetkých verejných vysokých škôl dokazuje rôznorodosť prijímaných opatrení ovplyvňujúcich výšku týchto fondov jednotlivými skúmanými účtovnými jednotkami v analyzovanom období.

Z uvedených skutočností vyplývajú ďalšie otázky na vedeckú diskusiu, vo vzťahu k štruktúre fondov, ktoré v súčasnosti verejné vysoké školy vytvárajú. Špecifickými fondami, ktoré vytvárajú všetky verejné vysoké školy na Slovensku, sú fondy tvorené podľa osobitných predpisov a fond reprodukcie. Fondy tvorené podľa osobitných predpisov majú svoje nezastupiteľné miesto vzhľadom na poslanie verejných vysokých škôl. Avšak opodstatnenie fondu reprodukcie, ktorý vytvárajú a používajú verejné vysoké školy ako jediné účtovné jednotky na Slovensku vo vzťahu k dlhodobého nehmotného majetku a dlhodobého hmotného majetku je na ďalšiu vedeckú diskusiu, či je i naďalej opodstatnené a má význam v súčasnosti aj v týchto účtovných jednotkách tvoriť tento finančný fond.

**Príspevok bol spracovaný v rámci riešenia grantovej úlohy VEGA 1/0377/25 *Inovatívne metódy Enterprise risk management a ich využitie v riadení a modelovaní rizík*.**

## Literatúra

1. Filatova, H., Tumpach, M., Reshetniak, Y., Lyeonov, S. & Vynnychenko. N. (2023). Public Policy and Financial Regulation in Preventing and Combating Financial Fraud: A Bibliometric Analysis. In *Public and Municipal Finance*, 12(1), pp. 48-61.
2. FinStat (2020 – 2024). Dostupné na: https://finstat.sk/databaza-nadacii-neziskovych-organizacii-zdruzeni
3. Greenfield, R. J. & Natalia, E. (2023). Disinvestment in Higher Education and its Impact on Society: Case of Illinois Public Universities. In *Public Organization Review.*
4. Kuzior, A., Kostenko, A., Sotnyk, I., Chortok, Y., Tuliakov, O. & Podmanická, M. (2023). Socioeconomic Sustainability and the Solidarity Economy Formation Under the War

Conditions in Ukraine. In *Financial and Credit Activity: Problems of Theory and Practice*, 5(52), pp. 256-267.
5. Lehenchuk, S., Vakaliuk, T., Nazarenko, T., P., Kubaščíková, Z. & Juhászová, Z. (2023). The Impact of Intangible Assets on the Financial Performance of Slovak ICT Companies: a Panel Data Regression Analysis. In *CEUR Workhsop Proceedings : Proceedings of the Selected and Revised Papers of 10th International Conference on Monitoring, Modeling & Management of Emergent Economy.* Germany : CEUR-WS Team, pp. 61-81.
6. Lyeonov, S., Tiutiunyk, I., Vašeková, M., Dziubenko, O. & Samchyk, M. (2022). Tax, Investment, Institutional and Social Channels of Economic Shadowing: Challenges for Macrofinancial Stability and Good Governance. In *Public and Municipal Finance*. 11(1), pp. 128-141.
7. Onopriienko, K., Lovciová, K., Mateášová, M., Kuznyetsova, A. & Vasylieva. T. (2023). Economic Policy to Support Lifelong Learning System Development & SDG4 Achievement: Bibliometric Analysis. In *Knowledge and Performance Management,* 7(1), pp. 15-28.
8. Opatrenie Ministerstva financií Slovenskej republiky zo 14. novembra 2007 č. MF/24342/2007-74, ktorým sa ustanovujú podrobnosti o postupoch účtovania a účtovej osnove pre účtovné jednotky, ktoré nie sú založené alebo zriadené na účel podnikania v znení neskorších predpisov.
9. Opatrenie Ministerstva financií Slovenskej republiky z 30. októbra 2013 č. MF/17616/2013-74, ktorým sa ustanovujú podrobnosti o usporiadaní, označovaní a obsahovom vymedzení položiek individuálnej účtovnej závierky, termíny a miesto ukladania individuálnej účtovnej závierky a výročnej správy pre účtovné jednotky účtujúce v sústave podvojného účtovníctva, ktoré nie sú založené alebo zriadené na účely podnikania v znení neskorších predpisov.
10. Pakšiová, R. & Lovciová, K. (2019). Food Companies Reporting of Corporate Social Responsibility in the Slovak Republic. In *European Food and Feed Law Review.* 14(3), pp. 281-287.
11. Register účtovných závierok (2020 – 2024). Dostupné na: https://www.registeruz.sk
12. Stanley, R. (2017). Influence of classification of accounting entities for reporting in the context of legislative changes. In S*trategic Management : International Journal of Strategic Management and Decision Support Systems in Strategic Management*, 22(1), pp.7-11.
13. Zákon č. 131/2002 Z. z. o vysokých školách v znení neskorších predpisov.
14. Zákon č. 431/2002 Z. z. o účtovníctve v znení neskorších predpisov.

# Aplikácia trojstavového modelu s využitím Markovových reťazcov a simulácií

# Application of the three state model using Markov chains and simulations

Martin Kosztolányi[1]

**Abstrakt**
Cieľom článku je prezentovať využitie simulácií nehomogénnych Markovových reťazcov v diskrétnom čase pre trojstavový model. Predmetom skúmania je modelovanie rozdelenia klientov do jednotlivých stavov počas určených časových krokov, následné odhadovanie priemerného času zotrvania poistenej osoby v danom stave. V rámci použitia metódy simulácií je dôraz kladený na poskytnutie prístupov, ktoré zabezpečia presnejšie výsledky v závislosti od počtu realizovaných simulácií. Na základe štatistického spracovania údajov získaných zo simulácií je možné získať ďalšie informácie potrebné na analytické účely, na kalkuláciu peňažných prostriedkov potrebných na zabezpečenie zdravotnej starostlivosti, prípadne na cenotvorbu poistných produktov. Na implementáciu uvedených techník a ich grafické znázornenie boli použité dostupné balíky, ako napríklad *markovchain*, *lifecontingencies*, ako aj vlastný kód vytvorený v jazyku R.

**Kľúčové slová**
Markovove reťazce, simulácie, trojstavový model, civilizačné ochorenie, dlhodobá starostlivosť

**Abstract**
The objective of the article is to demonstrate the application of simulations of non-homogeneous Markov chains in discrete time for a three-state model. The analysis focuses on modelling the distribution of clients across individual states over defined time steps, followed by estimating the expected duration an insured person remains in a given state. Within the simulation framework, particular emphasis is placed on approaches that enhance the accuracy of results as the number of simulation runs increases. Statistical processing of the data generated through simulations enables to obtain additional information needed for analytical purposes, for assessing the volume of the funds necessary to provide healthcare services, or for pricing of the insurance products. The implementation of these techniques, including their graphical representation, uses available packages such as *markovchain* and *lifecontingencies*, supplemented by own custom R code.

**Key words**
Markov chains, simulations, three-state model, lifestyle diseases, long term health care

**JEL classification**
G22, C63

[1] Ekonomická univerzita v Bratislave, Fakulta hospodárskej informatiky, Katedra matematiky a aktuárstva, Dolnozemská cesta 1, 852 35 Bratislava, martin.kosztolanyi.2@euba.sk.

## 1 Úvod

V súčasnosti je pozorovaný jav nárastu priemernej dĺžky života a môžeme predpokladať, že tento trend bude pokračovať aj v budúcnosti (predovšetkým v rozvinutých krajinách). Práve kategória ľudí vo vyššom veku trpí rôznymi chronickými ochoreniami alebo fyzickými obmedzeniami a zároveň táto skupina najviac využíva rôzne služby zdravotnej a opatrovateľskej starostlivosti. Z tohto dôvodu venujú poskytovatelia takýchto služieb veľkú pozornosť odhadom počtu klientov, ktorí budú v budúcnosti potrebovať zdravotnú starostlivosť. Osobitne sa zameriavajú na problematiku dlhodobej starostlivosti poskytovanej ľuďom, ktorí dosiahli stav, keď sa nevedia sami o seba plnohodnotne postarať.

Zvýšený počet ľudí, ktorí v dôsledku svojho zdravotného stavu ostanú odkázaní na pomoc, zároveň vytvára tlak na nárast nákladov potrebných na primeranú zdravotnú starostlivosť. Z pohľadu jednotlivca je dôležité zamýšľať sa aj nad tým, aké úspory, prípadne aký kapitál budú mať k dispozícii v prípade potreby dlhodobej starostlivosti. Ak osoba nedisponuje vhodným poistením pre prípad takejto dlhodobej starostlivosti, náklady vynakladané na takýto typ služby sa môžu veľmi rýchlo vyčerpať a ohroziť úspory jednotlivca alebo jeho príbuzných.

Markovove reťazce patria medzi ľahko dostupné nástroje používané pri odhadoch výskytu rôznych ochorení aj pri modelovaní poskytovania (dlhodobej) zdravotnej starostlivosti. Problematike využívania takýchto Markovových náhodných procesov na modelovanie priebehu rôznych ochorení v kontexte viacstavových modelov sa venuje viacero autorov. Na ich implementáciu využívajú rôzne softvérové prostriedky, medzi ktorými je jednou z vhodných možností napríklad aj prostredie jazyka R s dostupnými balíkmi k spracovaniu Markovových reťazcov.

Napríklad balík *markovchain* (Spedicato, Kang, Yalamanchi, Yadav a Cordón, 2016) prípadne aktualizovaný materiál k balíku (Spedicato, 2026) umožňuje vytvárať objekty Markovových reťazcov, realizovať rôzne výpočty a operácie, vykonávať štatistické analýzy a simulácie homogénnych aj nehomogénnych Markovových reťazcov v diskrétnom čase. Funkcie na implementáciu Markov Chain Monte Carlo (MCMC) simulácií pomocou Metropolis algoritmu obsahuje balík *mcmc* (Geyer a Johnson, 2013). Okrem prostredia R je samozrejme možné siahnuť po akomkoľvek inom prostredí na programovanie či matematické analýzy. V prípade potreby je možné vytvoriť aj vlastný kód v uvedených programovacích jazykoch na simuláciu Markovových reťazcov v diskrétnom aj spojitom čase podľa algoritmov dostupných v rôznych publikáciách.

Ako už bolo uvedené, Markovove reťazce sa používajú aj v kontexte viacstavových modelov pri aktuárskom modelovaní v životnom aj neživotnom poistení napríklad na odhad nákladov spojených s poskytovaním zdravotnej starostlivosti, na výpočet poistného, na predpovedanie vývoja rôznych chorôb, ako aj na modelovanie očakávaného vývoja počtu poistených osôb v bonus-malus systéme v rámci povinného zmluvného poistenia motorových vozidiel.

Ďalšou oblasťou využitia Markovových reťazcov pri modelovaní kritických, prípadne civilizačných ochorení v kontexte poskytovania zdravotnej starostlivosti, je poistenie kritických chorôb. Poistenému sa v prípade diagnózy špecifického ochorenia vyplatí (zvyčajne jednorazové) poistné plnenie. Mnohí autori používajú Markovove reťazce na predpovedanie vývoja infekčných typov chorôb (Li, Dushoff a Bolker, 2018; Twumasi, Asiedu a Nortey, 2019, Mucha, Faybíková a Krčová, 2022).

V neživotnom poistení sa homogénne Markovove reťazce v diskrétnom čase používajú na modelovanie rozdelenia počtu poistníkov v bonus-malus systéme (Fernandez-Morales, 2015).

V tomto článku sa zameriame na simuláciu trajektórií nehomogénnych Markovových reťazcov v diskrétnom čase pomocou jazyka R. Na základe spracovania vygenerovaných

údajov budeme analyzovať modelovanie rozdelenia počtu klientov v jednotlivých stavoch počas určených rokov a odhad priemerného času zotrvania klienta v danom stave. Na prezentáciu uvedených techník používame údaje z balíka markovchain, ktoré sú odvodené na základe mužskej populácie v Taliansku a spracujeme aj porovnanie s použitím populačných dát z roku 2019 pre mužov zo Slovenskej republiky. V trojstavovom modeli predstavuje „chorý stav“ stav nespôsobilosti, do ktorého sa klient mohol dostať z dôvodu civilizačného ochorenia, napríklad v dôsledku Alzheimerovej choroby.

## 2 Prehľad problematiky Markovových reťazcov a viacstavových modelov

Náhodná premenná je nástroj na matematický opis náhodného javu. Je to funkcia v určitej množine $\Omega$ v pravdepodobnostnom priestore a s určitým pravdepodobnostným rozdelením, ktoré je charakteristické pre túto náhodnú premennú. Rozšírením diskusie o náhodnej premennej je prirodzene náhodný proces. Náhodný proces namiesto jednej náhodnej premennej opisuje sled (veľmi často časový sled) náhodných premenných. Pojem náhodného procesu v pravdepodobnostnom priestore ($\Omega$,S,P), kde $S$ je $\sigma$-algebra podmnožín množiny $\Omega$ a $P$ je pravdepodobnostná miera definovaná na priestore $S$ uvádza nasledujúca definícia.

Definícia 1. Náhodný proces je systém náhodných premenných $\{X_t\}_{t\in T}$ definovaných na pravdepodobnostnom priestore $S$, kde pre každé $t \in T$ je $X_t: \Omega \to R$ je náhodná premenná.

Realizácia $X_t$sa nazýva “sample path”.

Pre fixné $\omega \in \Omega$ dostávame jednu realizáciu $x(t,\omega)$náhodného procesu ako funkciu premennej $t \in T$. Množinu $T$ je prirodzené predstaviť si ako čas. Ak $T$ je množina prirodzených alebo celých čísel, hovoríme o náhodnom procese s diskrétnym časom. Ak $T$ je interval na reálnej osi, ide o náhodný proces so spojitým časom. Pri riešení úloh so stochastickými procesmi je vhodné uvažovať zvlášť prípad spojitý a zvlášť diskrétny.

Náhodné premenné sú charakterizované rozdelením pravdepodobnosti daným príslušnou distribučnou funkciou. V prípade potreby charakterizovania náhodného procesu $\{X_t\}_{t\in T}$je toto zložitejšie. Pre účely tohto článku sa sústredíme najmä na rozdelenie procesov. Hodnoty, ktoré nadobúdajú náhodné premenné $X_t$, $t \in T$ nazývame stavmi a ich množinu označíme $S$. Zvyčajne ňou býva konečná, alebo spočítateľná množina nezáporných celých čísel $N_0$ alebo jej konečná podmnožina. Takýto náhodný proces nazývame náhodný reťazec.

Definícia 2. Markovova vlastnosť. Hovoríme, že reťazec $\{X_t\}_{t\in T}$, má Markovovu vlastnosť alebo je Markovov, ak pre každé $n = 0, 1, 2, \ldots$ a pre všetky časy $0 \le t_0 \le \cdots \le t_{n+1}$; $t_0, \ldots, t_{n+1} \in T$ a pre všetky stavy $i_0, i_1, \ldots, i_{n+1} \in S$ platí:

$$P\left(X_{t_{n+1}} = i_{n+1} \mid X_{t_n} = i_n, \ldots, X_{t_o} = i_0\right) = P\left(X_{t_{n+1}} = i_{n+1} \mid X_{t_n} = i_n\right) \qquad (1)$$

Teda za podmienky, že $X_{t_n} = i_n$, je $X_{t_{n+1}}$ nezávislé od $X_{t_o}, \ldots, X_{t_{n-1}}$.

Ak podmienená pravdepodobnosť $P\left(X_{t_{n+1}} = j \mid X_{t_n} = i\right)$ závisí len od dĺžky intervalu $t_{n+1} - t_n$, teda presnejšie, ak pre každé $t \in T$, $s > 0$ a všetky stavy $i, j \in S$ platí $P(X_{t+s} = j \mid X_t = i) = p_{ij}(s)$ hovoríme, že reťazec je homogénny.

Ak $T \in \langle 0,\infty)$, potom môžeme reťazcu priradiť systém matíc (vo všeobecnosti sú matice nekonečno rozmerné) $\{p(t); t \ge 0\}$, kde ($i$, $j$)-ty prvok matice je $p_{ij}(t) = P(X_t = j|X_0 = i)$, pre $i, j \in S$ a $t > 0$; $p_{ij}(0) = 0$ pre $i \ne j$; $p_{ij}(0) = 1$. Pre pevné $t \ge 0$ sa $P(t)$ nazýva maticou prechodu za čas $t > 0$. Ak $P(t)$ je matica prechodu za čas $t > 0$ Markovovho reťazca s množinou stavov $S$, tak $\sum_{j \in S} p_{ij}(t) = 1$ pre každé $i \in S$. Každý riadok matice prechodu $P(t)$ je pravdepodobnostné rozdelenie.

Markovov reťazec je jednoznačne určený počiatočným rozdelením a systémom matíc prechodu za čas $t, t \ge 0$.

Chapman-Kolmogorovova rovnosť je základná vlastnosť Markovových procesov, ktorá vyjadruje, že pravdepodobnosť prechodu medzi dvoma stavmi za určitý (dlhší) čas sa dá získať „skladaním“ prechodových pravdepodobností za kratšie časové úseky.

Nech $\{X_t\}_{t\geq 0}$ je Markovov proces so stavovým priestorom *S*. Chapman–Kolmogorovova rovnosť hovorí, že pre všetky stavy $i, j \in S$ a pre časy $0 \leq s, 0 \leq t$ platí:

$$p_{ij}(t+s) = \sum_{k \in S} p_{ik}(t) p_{kj}(s) \tag{2}$$

Inak povedané, prechod zo stavu *i* do stavu *j* za čas (*t* + *s*) sa dá rozložiť na *súčet* všetkých ciest cez medzistav *k* v čase *t*.

Veta 1. Matice prechodu $P(t)$, $t > 0$ a počiatočné rozdelenie $\alpha$ jednoznačne určujú konečnorozmerné rozdelenia náhodného procesu $\{X_t\}_{t\geq 0}$.

V modeloch s diskrétnym časovým krokom nás zaujímajú pravdepodobnosti prechodu za jednu časovú jednotku. Pre pravdepodobnosť prechodu zo stavu *i* do stavu *j* budeme používať označenie $p_{ij} \equiv p_{ij}(1)$. Pre pravdepodobnosti prechodov zo stavu *i* do stavu *j* za *n* diskrétnych období použijeme označenie ${p_{ij}}^n \equiv p_{ij}(n)$ a budeme ich nazývať pravdepodobnosťami prechodu *n*-tého rádu. Maticu prechodu prvého rádu označujeme $P \equiv P(1) = \left(p_{ij}\right)_{i,j\in S}$ maticu pravdepodobností *n*-tého rádu $P(n) = \left(p_{ij}(n)\right)_{i,j\in S}$. Všeobecne matica prechodu vyzerá nasledovne:

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1j} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{i1} & \cdots & p_{ij} \end{bmatrix} \tag{3}$$

Pre Markovov reťazec s tromi stavmi bude matica nasledovná:

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{bmatrix} \tag{4}$$

Homogénny Markovov reťazec s diskrétnym časovým krokom má tieto pravdepodobnosti a tým aj matice prechodu rovnaké pre každý časový úsek. V prípade nehomogénneho Markovovho reťazca je potrebné rozšírenie – musíme uvažovať pravdepodobnosti aj matice s parametrom času, teda napr. $P(t, t+1)$.

Pravdepodobnosť prechodu z počiatočného stavu *i* v čase 0 do stavu $j, j \in S$ v *h* krokoch od času 0, teda od začiatku Markovovho reťazca sa nazýva absolútna pravdepodobnosť stavu Markovovho reťazca a označujeme ju nasledovne:

$$P_{ij}(0,h) = p_j^{(i)}(h) \tag{5}$$

Potom vektor $\boldsymbol{p}^{(i)}(h) = \left({p_j}^{(i)}(h)\right)_{j\in S}$ nazývame vektor absolútnych pravdepodobností. S použitím Chapman-Kolmogorovovej rovnosti môžeme vektor absolútnych pravdepodobností $\boldsymbol{p}^{(i)}(h)$ zapísať

$$p^{(i)}(h) = p^{(i)}(h-1) * P(h-1,h) = p^{(i)}(h-2) * P(h-2,h-1) * P(h-1,h) = p(0) * \ldots * P(h-1,h) \tag{6}$$

Komplexný prehľad matematického aparátu k Markovovým reťazcom uvádza napríklad (Janková, Kilianová, Brunovský a Bokes, 2014).

## 3 Aplikovaný postup

V článku je uvedený príklad trojstavového nehomogénneho Markovovho reťazca s diskrétnym časom. V prvej časti je analýza vykonaná analyticky, pomocou počiatočného rozdelenia a matíc prechodu v package „markovchain“ v programovom balíku R. Na druhej strane pre ubezpečenie a kontrolu správnosti je pripravené aj stochastické generovanie trajektórií pre rovnaký Markovov reťazec.
Generovanie trajektórií nehomogénneho Markovovho reťazca s diskrétnym časom v R:
Pre nehomogénny Markovov reťazec s maticami prechodov $P(t,t+1) = \left(p_{ij}(t,t+1)\right)_{i,j\in S}$ pre všetky hodnoty času $T$ definujeme náhodnú premennú $Z_r$. Hodnoty pravdepodobnostnej funkcie $P(Z_r = j)$ predstavujú v príslušnej matici $P(t,t+1)$ hodnoty pravdepodobností $p_{i_r j}(t,t+1),\ j \in S = \{i_1, i_2, \dots, i_n\}$ konkrétne nachádzajúce sa v riadku *r*. Diskrétne rozdelenie zapíšeme $p_{Z_r}(j) = \left\{p_{i_r j}(t,t+1)\right\}_{j\in S}$. Potom algoritmus generovania hodnôt náhodnej premennej *Z* pomocou inverznej transformácie pozostáva z nasledovných krokov:

1. Vygenerovanie hodnoty *u* náhodnej premennej *U* ~ Unif(0, 1).
2. Transformovanie hodnôt *u* na hodnoty náhodnej premennej *Z*

$$Z_r = i_1 \text{ ak } u \le p_Z(i_1) \text{ alebo } Z_r = j \text{ ak } \sum_{l=i_1}^{j-1} p_{Z_r}(l) < u \le \sum_{l=i_1}^{j} p_{Z_r}(l) \qquad (7)$$

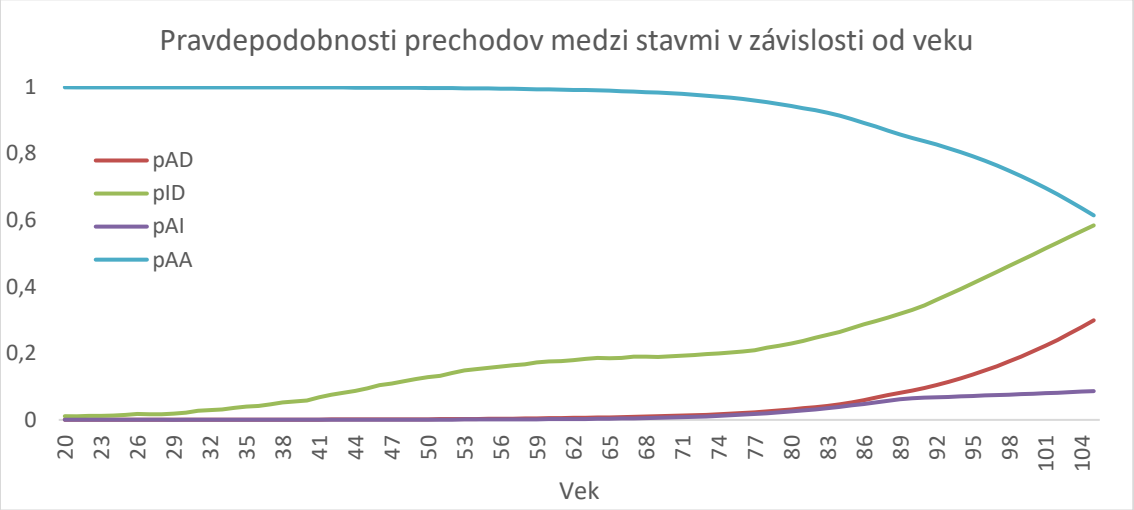
3. Budeme simulovať nehomogénny Markovov reťazec s maticami prechodov $P(t,t+1)$ a s počiatočným rozdelením $\propto = \{\propto_i\}_{i\in S}$ a stavmi $\{i_1, i_2, \dots, i_m\}$ v diskrétnom čase, teda zostrojíme trajektóriu tohto reťazca:
   a. Z diskrétneho počiatočného rozdelenia $\{\propto_i\}_{i\in S}$ vygenerujeme hodnotu $i_{t_0} = i_i$ náhodnej premennej $X_{t_0}$ v čase nula (na začiatku reťazca).
   b. Z diskrétneho rozdelenia $\left\{p_{i_r j}(t_0,t_1)\right\}_{j\in S}$ teda z *r*-tého riadku matice prechodov $P(t_0,t_1)$ vygenerujeme hodnotu $i_{t_1}$, ktorá predstavuje hodnotu náhodnej premennej $X_{t_1}$.
   c. Ak $t_c < t_h$ a vygenerovali sme hodnotu náhodnej premennej $X_{t_c}$ potom z rozdelenia $\left\{p_{i_r j}(t_c,t_{c+1})\right\}_{j\in S}$,teda v riadku so stavom $i_{t_c}$ v matici prechodov $P(t_c,t_{c+1})$ vygenerujeme $i_{t_{c+1}}$, čo predstavuje hodnotu náhodnej premennej $X_{t_{c+1}}$.
4. Ak dosiahneme požadovanú hodnotu $t = t_h$ ukončíme generovanie trajektórie. Výsledkom bude realizácia *h* stavov $i_{t_0}, i_{t_1}, \dots, i_{t_h}$, ktoré získame po *h* krokoch (*h* časových úsekoch). Opakovaním tohto algoritmu *n*-krát dostávame *n* trajektórií nehomogénneho Markovovho reťazca v diskrétnom čase.

## 4 Popis modelu a dát

Na riešenie použijeme viacstavový model, pričom sa zameriame na model s tromi stavmi: zdravý/active **A**, chorý/ill **I** a mŕtvy/dead **D**. Zo stavu zdravý je možné sa presunúť do stavu chorý a aj do stavu mŕtvy. Ak reťazec opustí stav zdravý, už sa do tohto stavu nikdy nevráti. Zo stavu chorý je možný len prechod do stavu mŕtvy, ktorý je absorbčný. Takýto model je použiteľný na modelovanie choroby, ktorá nemá zavedenú liečbu, resp. ide o nevyliečiteľnú chorobu či trvalý následok „navždy“. Preto nie je možný prechod zo stavu chorý do zdravý.

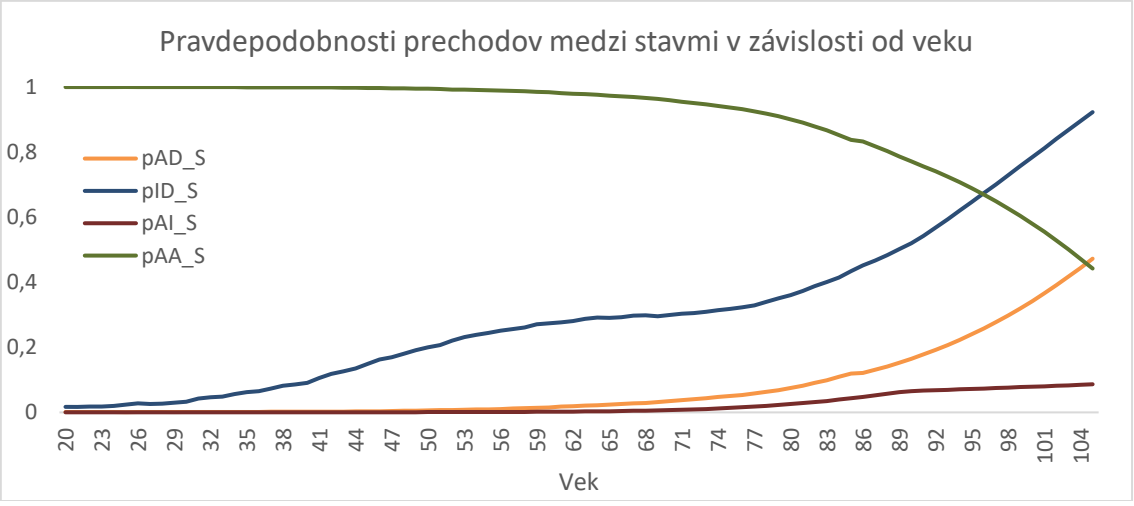
Na demonštráciu opísaných postupov pre nehomogénny Markovov reťazec s diskrétnym časom boli použité dáta zo zdroja *Assicurazioni Sulla Salute: Caratteristiche, modelli attuariali e basi tecniche* od autorov (De Angelis a Di Falco, 2016). Tieto dáta sú obsiahnuté v R package „lifecontingencies“ v dátovom sete "de_angelis_di_falco" a popisujú populáciu Talianska. Dátový set obsahuje viaceré tabuľky, resp. rôzne typy dát. Pre náš účel boli použité pravdepodobnosti prechodov medzi stavmi zdravý → chorý, zdravý → mŕtvy, chorý → mŕtvy vždy pre jednotlivé veky. Pre simuláciu boli použité dáta populácie Talianska, rok 2016 – muži. Druhá sada dát je z populačných dát VDC SAV pre Slovenskú republiku, a to úmrtnosť mužov z roku 2019. Prehľad použitých dát uvádza graf na Obr. 1 a Obr. 2.

*Obr. 1: Zobrazenie vstupných dát – muži, populácia Talianska*




Zdroj: Vlastné spracovanie v MS Excel

*Obr. 2: Zobrazenie vstupných dát – muži, populácia Slovenska*




Zdroj: Vlastné spracovanie v MS Excel

Uvažujeme model ako nástroj na generovanie trajektórii nehomogénneho Markovovho reťazca s diskrétnym časom. Keďže výpočty a simulácie Markovových reťazcov pracujú s maticami prechodov, je potrebné takéto matice definovať a vytvoriť. Postupujeme podľa pravidiel pre trojstavový model v package „markovchain“. Všeobecne matica pravdepodobností prechodov pre trojstavový Markovov reťazec a osobu vo veku *t* vyzerá nasledovne:

$$P(t,t+1) = \begin{bmatrix} p_{AA}(t,t+1) & p_{AI}(t,t+1) & p_{AD}(t,t+1) \\ 0 & p_{II}(t,t+1) & p_{ID}(t,t+1) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (8)$$

Hodnoty pravdepodobností prechodov $p_{AI}$, $p_{AD}$ a $p_{ID}$ boli použité priamo zo zdroja dát a pravdepodobnosti prechodov $p_{AA}$ a $p_{II}$ boli dopočítané, aby bolo možné vytvoriť matice $P(t,t+1)$.

$$p_{AA} = 1 - p_{AI} - p_{AD} \qquad p_{II} = 1 - p_{ID} \quad (9)$$

Simulovaním nehomogénneho Markovovho reťazca vytvoríme generované trajektórie, ktoré predstavujú zobrazenie vývoja stavov modelu v čase, resp. vývoj stavu poistenej osoby. Výsledky uložíme do matice ${}^{(z)}M$ s *n* riadkami (počet simulácii) a *h* stĺpcami (pozorovaný časový úsek vyjadrený ich počtom). Prvky takejto matice budeme analyzovať zohľadňujúc vlastnosti trojstavového modelu a obsahu použitých dát.

Na základe analýzy výstupu stochastickej simulácie (za použitia dostatočného počtu simulácii) je možné z *h*-teho stĺpca odhadnúť percentuálne rozdelenie poistených do jednotlivých stavov$\{A, I, D\}$ po *h* časových úsekoch.

## 5 Výsledky a diskusia

V tejto časti uvedieme výsledky ako analytického postupu, tak aj simulácií, resp. stochastického prístupu s použitím programu R a kde to bude možné, tieto výsledky navzájom porovnáme. Praktická časť bola realizovaná pre osobu so vstupným vekom 55 rokov a analyzované obdobie uvažujeme 15 rokov. Využívame dáta o populácii mužov v Taliansku a druhú sadu dát s populáciou v SR, pričom sa uplatňuje nehomogénny Markovov reťazec s tromi stavmi (živý (**A**), chorý (**I**), mŕtvy (**D**)) na modelovanie správania (poistenej) osoby vo veku 55 rokov. Nehomogénny Markovov reťazec používa pravdepodobnosti prechodu, alebo maticu prechodov odlišnú pre jednotlivé veky, teda hovoríme, že ide o vekovo závislé pravdepodobnosti. Takýto prístup zodpovedá aj realite, kde pravdepodobnosti vzniku choroby, alebo pravdepodobnosti úmrtia sú obvykle závislé od veku sledovanej osoby.

Prvý pohľad na sledovanú populáciu realizujeme analytickým prístupom pomocou „markovchain“ balíka ako aj výpočtom pomocou zoznamu matíc a ich násobením pri zohľadnení vektora prvotného stavu. Postup aplikujeme na prvotný stav Zdravý. Po spracovaní v R pre projekciu na 15 rokov získame vektor absolútnych pravdepodobností pre stavy **A, I, D**.

IT [20] 0,8832272 0,01701 0,09976284
SR [20] 0,7348103 0,0110994 0,2540903

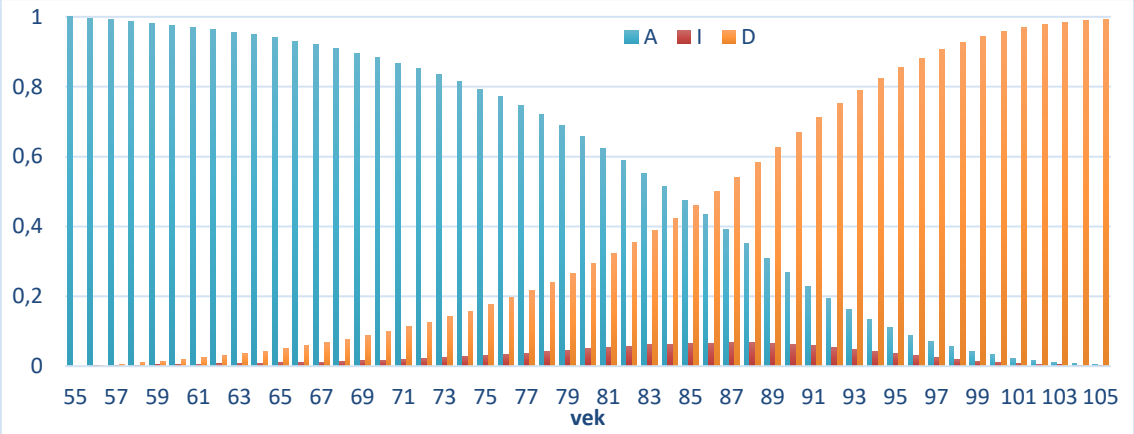
Výsledok pre talianske dáta interpretujeme ako pravdepodobnosť, že zdravá osoba, muž vo veku 55 rokov bude po 15 rokoch zdravá s pravdepodobnosťou 0,8832272, chorá s pravdepodobnosťou 0,01701 a v stave mŕtva s pravdepodobnosťou 0,09976284. Uvedené je možné vyjadriť aj v percentách, kde následne interpretujeme podiel zdravých/chorých/mŕtvych mužov po 15 rokoch projekcie s počiatočným vekom 55 rokov a počiatočným stavom zdravý nasledovným vektorom 88,32 %, 1,70 % a 9,98 %.

Analogicky, pre slovenské dáta, interpretujeme výsledky ako pravdepodobnosť, že zdravá osoba, muž vo veku 55 rokov bude po 15 rokoch zdravá s pravdepodobnosťou 0,7348103, chorá s pravdepodobnosťou 0,0110994 a v stave mŕtva s pravdepodobnosťou 0,2540903. Uvedené je možné vyjadriť aj v percentách, ktoré následne interpretujeme ako podiel zdravých/chorých/mŕtvych mužov po 15 rokoch projekcie s počiatočným vekom 55 rokov a počiatočným stavom zdravý nasledovným vektorom 73,48 %, 1,11 % a 25,41 %.

Druhý možný spôsob spracovania nehomogénneho Markovovho reťazca s tromi stavmi je použitie simulácií. Aby bola zachovaná možnosť porovnania, simuláciu vykonáme na rovnakej množine dát populácie Talianska a druhej množine dát populácie Slovenska, teda opäť pre 55 ročného muža na dobu projekcie 15 rokov s počiatočným stavom zdravý. Počiatočné rozdelenie Markovovho reťazca je [1, 0, 0]. Počas simulácií sa generuje postupne zo stavu vo veku $x$ a s použitím pravdepodobností prechodu pre daný vek $x$ stav pre vek $(x+1)$. Generovanie využíva funkciu *sample* so zohľadnením pravdepodobností pre príslušný vek $x$. Toto je potrebné zopakovať na celú dobu projekcie, teda v našom prípade pre veky od 55 do 70 rokov. Výsledkom je simulácia, resp. predikcia možnej trajektórie Markovovho reťazca. Takýchto trajektórií nagenerujeme veľký počet $n$, napríklad $n$ = 100 000 simulácií. Výstupy sú ukladané do matice $M$ a následne je možné tieto výsledky analyzovať.

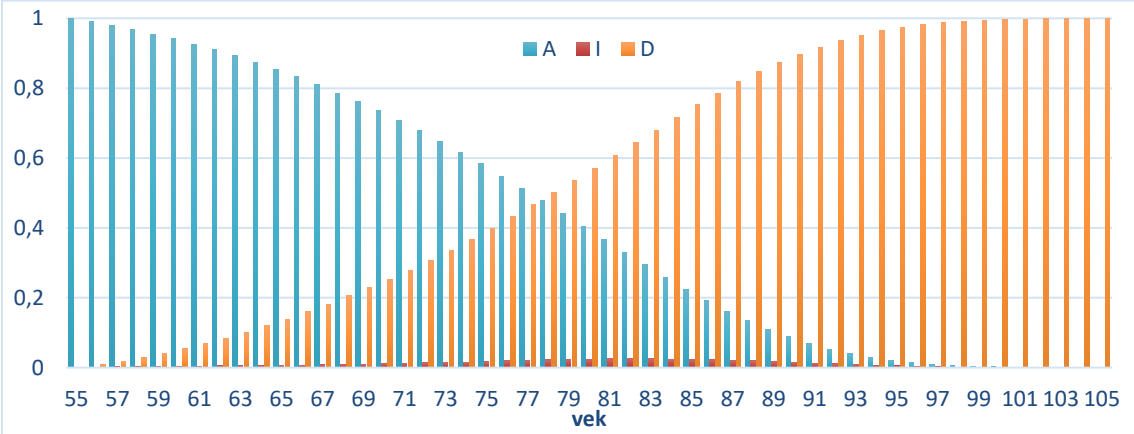
Jedným zo základných pohľadov je odsledovať a porovnať vývoj rozdelenia poistených osôb zdravých na začiatku simulácie. Takýto vývoj pre vstupný vek 55 rokov zobrazujú grafy na Obr. 3 a Obr. 4.

*Obr. 3: Projekcia rozdelenia osôb do stavov – muži, populácia Talianska*




Zdroj: Vlastné spracovanie v R a MS Excel

*Obr. 4: Projekcia rozdelenia osôb do stavov – muži, populácia Slovenska*




Zdroj: Vlastné spracovanie v R a MS Excel

Počet simulácii v opísanej analýze je $n$ = 100 000. Následne na konci uvažovanej doby projekcie, teda po 15 rokoch, zistíme počty osôb v jednotlivých stavoch A, I, D a tieto prepočítame na percentuálne podiely. Pri jednom zo simulačných výpočtov boli zistené nasledovné percentuálne podiely jednotlivých stavov po 15 rokoch: 88,39 %, 1,63 %, 9,98 % pre dáta talianskej populácie a nasledovné podiely: 73,38 %, 1,13 %, 25,49 % pre dáta slovenskej populácie.

Porovnanie percentuálnych podielov konečných stavov Markovovho reťazca po 15 rokoch použitím analytického výpočtu a výpočtu pomocou simulácií pre dáta talianskej a slovenskej populácie je uvedené v Tab. 1.

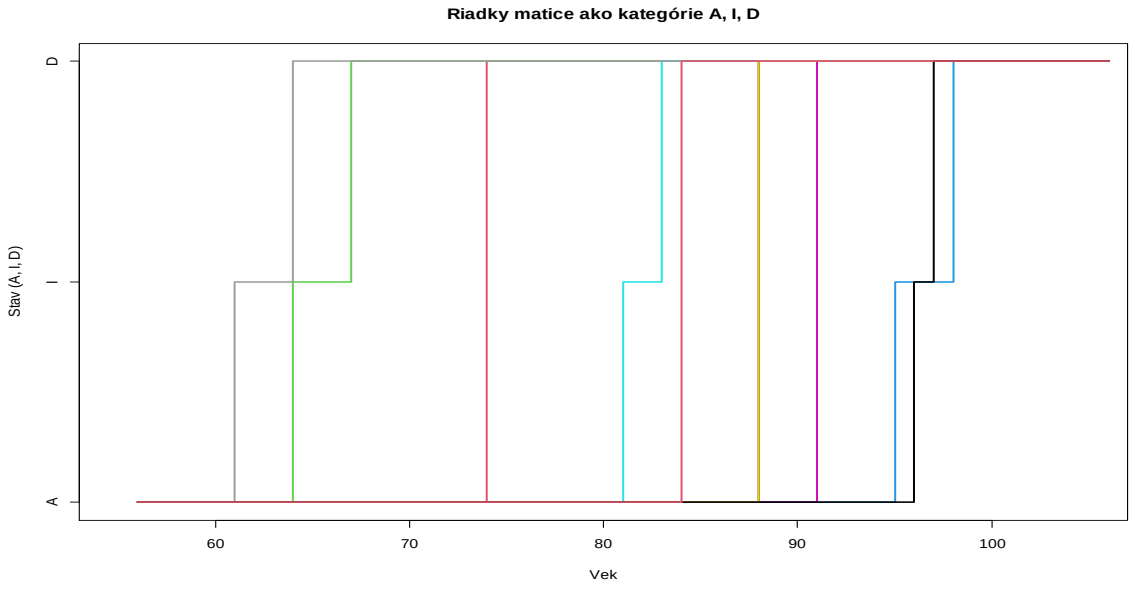
*Tab. 1: Porovnanie analytického výpočtu a vybraných simulácií pre populačné dáta IT a SK*

| | data IT | | | data SK | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | A | I | D | A | I | D |
| analytický výpočet | 88,32 % | 1,70 % | 9,98 % | 73,48 % | 1,11 % | 25,41 % |
| simulácia 100 000 #1 | 88,39 % | 1,63 % | 9,98 % | 73,38 % | 1,13 % | 25,49 % |
| simulácia 100 000 #2 | 88,26 % | 1,74 % | 10,00 % | 73,50 % | 1,16 % | 25,34 % |
| simulácia 1 000 000 #1 | 88,34 % | 1,72 % | 9,95 % | 73,46 % | 1,11 % | 25,43 % |
| simulácia 1 000 000 #2 | 88,33 % | 1,71 % | 9,97 % | 73,48 % | 1,10 % | 25,42 % |

Zdroj: Vlastné spracovanie v R a MS Excel

Výsledky ukazujú, že simulačné výpočty poskytujú výsledky veľmi blízke výstupom analytického výpočtu, pričom sa môžeme domnievať, že nepresnosť simulačného postupu sa zmenšuje s rastúcim počtom simulácií *n*. Simulačné metódy vo všeobecnej rovine považujeme sa flexibilnejšie a dokážu poskytnúť viaceré podkladové dáta a výstupy, ktoré v analytickom postupe nie sú priamo uvedené. Jedným so zaujímavých pohľadov na výstup simulácie je zobrazenie jednotlivých trajektórií reťazca, kde je možné sledovať presuny medzi stavmi reťazca v jednotlivých krokoch. Z výsledku spracovania simulácií bolo vybraných prvých 10 trajektórií, ktoré sú zobrazené v Obr. 5.

*Obr. 5: Vykreslenie trajektórií prvých 10 simulácií*




Zdroj: Vlastné spracovanie v R

Keďže výstup spracovania v R obsahuje kompletnú maticu trajektórii, je možné vykonať viacero analýz a pozorovaní. V praxi je určite dôležité v uvažovanom prípade trojstavového modelu zaoberať sa aj analýzou času zotrvania v niektorom z projektovaných stavov. Priemerná doba zotrvania napr. v stave chorý vychádza z počtu období, kedy sa reťazec nachádzal v stave „I“. Tieto počty máme vygenerované pre každú zo simulácií, teda je možné stanoviť počet

stavov „I“ v každej simulácii a následne aj priemernú dobu zotrvania v stave „I“. Podobne je možné stanoviť dobu zotrvania aj v inom stave reťazca, napríklad zdravý „A“. Z výstupu simulácií v R bolo odvodené priemerné trvanie daného stavu v rokoch. Porovnanie doby zotrvania v jednotlivých stavoch pre dáta IT a SK je uvedené v tabuľke Tab. 2.

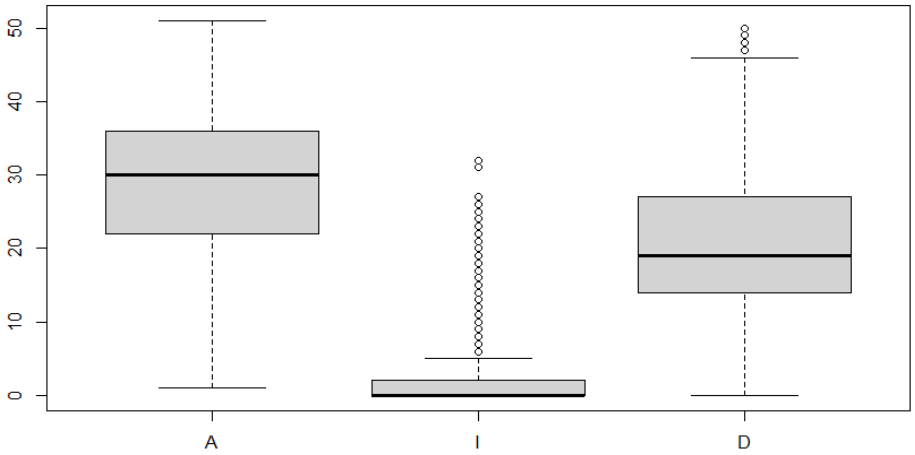
*Tab. 2: Porovnanie priemerného simulovaného zotrvania v stave pre dáta IT a SK*

| | A | I |
|---|---|---|
| IT | 28,6959 | 1,43415 |
| SK | 22,2554 | 0,54653 |

Zdroj: Vlastné spracovanie v R a MS Excel

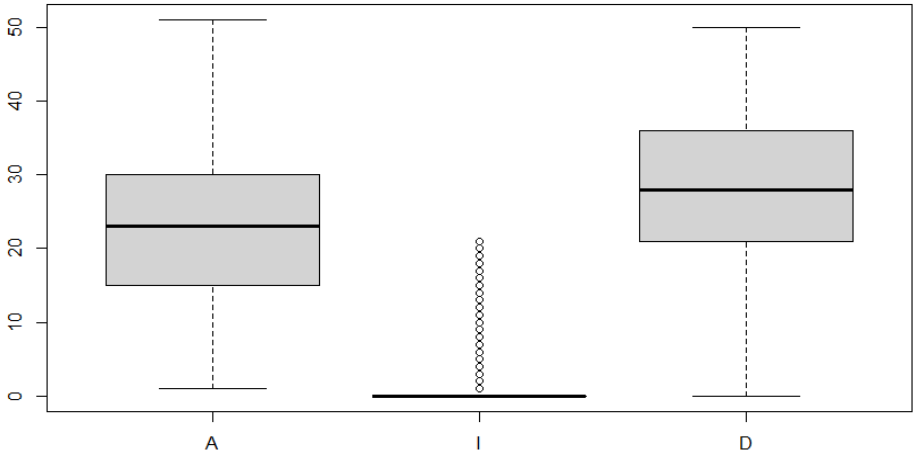
Zo simulačného behu máme k dispozícii 100 000 trajektórií, takže má zmysel urobiť nad týmito dátami štatistický rozbor, napríklad použitím BoxPlotu, ako je zobrazené na Obr. 6 a Obr. 7. Typ grafického zobrazenia BoxPlot dáva viaceré informácie o rozdelení, resp. o rozložení dát. Boxplot zobrazuje medián a pomocou kvantilov aj rozptyl alebo „šírku“ rozdelenia dát. Takisto dokáže zobraziť minimálne a maximálne hodnoty a prípadne extrémne hodnoty (outliers).

*Obr. 6: BoxPloty pre simulácie zotrvania v stave talianskej populácie*




Zdroj: Vlastné spracovanie v R

*Obr. 7: BoxPloty pre simulácie zotrvania v stave slovenskej populácie*




Zdroj: Vlastné spracovanie v R

Prezentované grafy - BoxPloty dokumentujú základné štatistické vlastnosti dát. Pre talianske dáta pri stave živý (A) vidíme, že najčastejšia hodnota, teda medián je okolo 30 rokov, a prvý kvartil sa nachádza na úrovni približne 23, čo znamená, že 75 % trajektórií obsahuje status A v dĺžke 23 rokov alebo viac. V prípade stavu chorý (I) je medián veľmi nízko, len mierne nad 1 a ¾ pozorovaní sa nachádza v oblasti do 3 rokov.

Pre slovenské dáta pri stave živý (A) vidíme, že najčastejšia hodnota, teda medián je okolo 22 rokov a prvý kvartil sa nachádza na úrovni približne 15. Stav chorý (I) má medián veľmi nízko, len mierne nad nulou. Avšak pozorujeme, že stav (I) obsahuje v oboch grafoch aj veľké množstvo extrémnych hodnôt (outliers), ktoré sú zobrazené krúžkami.

## 6 Záver

Použitie Markovových reťazcov pre viacstavové modely predstavuje často aplikovaný prístup na modelovanie vývoja stavov v súvislosti s výskytom chorôb a dlhodobým poskytovaním zdravotnej starostlivosti. Použitím simulácií pre nehomogénne Markovove reťaze prostredníctvom generovania ich trajektórií sa vytvára model, ktorý verne napodobňuje reálny vývoj stavov poistených osôb v čase. V rámci metódy Monte Carlo sme sa zároveň venovali vplyvu počtu simulácií na presnosť získaných výsledkov. Vzhľadom na povahu dostupných údajov sme výpočty realizovali v diskrétnom čase, a to na ročnej báze.

Analyzované údaje sa vzťahujú na mužskú populáciu v Taliansku. Stav chorý (I) podľa autora balíka markovchain predstavuje invaliditu charakterizovanú tzv. nesebestačnosťou poistenej osoby, podobnú invalidite súvisiacej s Alzheimerovou chorobou. Pre účely porovnania je spracovaná aj druhá sada údajov, ktorá popisuje mužov slovenskej populácie. Pomocou uvedeného modelovania implementovaného v programovacom jazyku R sme získali rozdelenie poistených osôb do jednotlivých stavov v priebehu niekoľkých rokov, a to na základe štatistického spracovania výsledkov simulácií. Interpretácia výstupov je doplnená grafickými a vektorovými znázorneniami.

Ďalším využitím použitého simulačného modelu je odhad očakávaného trvania zdravého stavu (A), ako aj odhad trvania obdobia stráveného v stave choroby (I). Táto analýza bola realizovaná pre vybrané veky a výsledky boli graficky prezentované prostredníctvom stĺpcových grafov a BoxPlotov. Pri prezentácii výsledkov je nutné poukázať aj na rozdiely medzi dvomi použitými sadami dát. Už pri priamom porovnaní úmrtností je viditeľný rozdiel medzi úmrtnosťou mužskej populácie Talianska a Slovenska. Následne pri výsledkoch pozorujeme výrazný rozdiel či už pri vektore absolútnych pravdepodobností ako aj pri analyzovaní doby zotrvania v konkrétnom stave.

Modelovanie vývoja stavov v čase v uvedenej oblasti pomocou simulácií Markovových reťazcov predstavuje vhodný a efektívny nástroj na riešenie týchto typov úloh.

## Literatúra

1. Di Falco, L., De Angelis, P. (2016). Assicurazioni sulla salute: caratteristiche, modelli attuariali e basi tecniche. In *Assicurazioni sulla salute: caratteristiche, modelli attuariali e basi tecniche* (pp. 1-212). Società editrice il Mulino spa.
2. Fernandez-Morales, A. (2015). Application of a discrete-time Markov chain simulation in insurance. *International Journal of Recent Contributions from Engineering, Science & IT (iJES)*, *3*(3), 27-32.
3. Geyer, C. J., Johnson, L. T. (2013). Mcmc: Markov chain monte carlo. *R package version 0.9-2*. Dostupné na http://CRAN.R-project.org/package=mcmc.
4. Janková, K., Kilianová, S., Brunovský, P., Bokes, P. (2014). Markovove reťazce a ich aplikácie. Bratislava: Epos.

5. Li, M., Dushoff, J., Bolker, B. M. (2018). Fitting mechanistic epidemic models to data: A comparison of simple Markov chain Monte Carlo approaches. *Statistical methods in medical research*, *27*(7), 1956-1967.
6. Mucha, V., Faybíková, I., Krčová, I. (2022). Use of Markov Chain Simulation in Long Term Care Insurance. *Statistika: Statistics & Economy Journal*, *102*(4).
7. Spedicato, G. A., Kang, T. S., Yalamanchi, S. B., Yadav, D., Cordón, I. (2016). The markovchain package: a package for easily handling Discrete Markov Chains in R. Dostupné na https://cran.rproject.org/web/packages/markovchain/vignettes/an_introduction_to_markovchain_package.pdf citované január 2026
8. Spedicato, G. A. (2026). Easy Handling Discrete Time Markov Chains. Dostupné na https://ftp2.uib.no/cran/web/packages/markovchain/markovchain.pdf citované január 2026
9. Twumasi, C., Asiedu, L., Nortey, E. N. (2019). Markov chain modeling of HIV, tuberculosis, and Hepatitis B Transmission in Ghana. *Interdisciplinary perspectives on infectious diseases*, *2019*(1), 9362492.

# Odchod mladých dospelých z rodičovského domu v EÚ: zhluková analýza krajín EÚ

# Leaving the parental home in the EU: a cluster analysis of EU countries

Lívia Krajčíková[1], Alžbeta Dubovská[2]

**Abstrakt**
Príspevok sa zameriava na analýzu rozdielov v procese osamostatňovania mladých dospelých v krajinách Európskej únie. Analýza vychádza z údajov Eurostatu pre 27 krajín EÚ za rok 2024 a využíva vybrané ukazovatele súvisiace s bývaním, situáciou na trhu práce a životnými podmienkami mladých ľudí. Na identifikáciu podobností medzi krajinami bola použitá hierarchická zhluková analýza (Wardova metóda). Výsledky poukazujú na existenciu troch skupín krajín, ktoré sa líšia v charakteristikách prechodu mladých dospelých k samostatnému bývaniu. Zistenia naznačujú, že tento proces je ovplyvnený kombináciou ekonomických faktorov, najmä podmienok na trhu práce, ako aj štrukturálnych faktorov, vrátane dostupnosti bývania a rodinného prostredia. Rozdiely medzi krajinami preto nemožno vysvetliť jediným faktorom, ale ich vzájomnou kombináciou.

**Kľúčové slová**
mladí dospelí, bývanie, nezávislosť, zhluková analýza

**Abstract**
This paper examines differences in the transition of young adults to independent living across European Union countries. The analysis is based on Eurostat data for 27 countries in 2024 and focuses on selected indicators related to housing conditions, labour market situation and living arrangements. Using hierarchical cluster analysis (Ward's method), countries were grouped according to similarities in these indicators. The results identified three distinct clusters, reflecting different patterns of young adults' transition to independence. The findings show that both economic factors, such as labour market conditions, and structural factors, including housing affordability and family context, play an important role. At the same time, the results suggest that differences across countries cannot be explained by a single factor, but rather by their combined effects.

**Key words**
young adults, housing, independency, cluster analysis

**JEL classification**
R21, C38

## 1 Introduction

The transition from the parental home to independent living represents an important step in the life course of young adults. This process is influenced by a range of factors, including housing conditions, labour market opportunities and broader socio-economic context.

[1] Bratislava University of Economics and Business, Faculty of Economic Informatics, Department of Statistics, Dolnozemská cesta 1, Bratislava, Slovakia, livia.krajcikova@euba.sk.

[2] Bratislava University of Economics and Business, Faculty of Economic Informatics, Department of Mathematics and Actuarial Science, Dolnozemská cesta 1, Bratislava, Slovakia, alzbeta.dubovska@euba.sk.

In recent years, increasing housing costs and changing labour market conditions have made this transition more challenging in many European countries. As a result, young people tend to remain in the parental home longer, although significant differences can be observed across the European Union.

Previous research suggests that both economic factors, such as employment opportunities, and structural factors, including housing affordability and institutional arrangements, play an important role in shaping the timing of leaving the parental home. However, these factors do not affect all countries in the same way.

The aim of this paper is to analyse differences between EU countries in the transition of young adults to independent living. Using cluster analysis, countries are grouped based on selected indicators reflecting housing conditions, labour market situation and living arrangements. The analysis focuses on identifying patterns, differences and similarities across countries.

## 2 Literature review

Previous research shows that the transition of young adults to independent living is shaped by a combination of economic, housing, institutional and family-related factors. Labour market conditions play an important role, as weaker employment prospects, unemployment and job insecurity reduce the ability of young people to establish an independent household or enter homeownership (Arundel & Doling, 2017, Lersch & Dewilde, 2015, Gousia et al., 2021). At the same time, these effects are not uniform across Europe, because they are filtered by national housing systems, welfare institutions and labour market structures (Lersch & Dewilde, 2015, Filandri & Bertolini, 2016).

Housing conditions represent another key determinant of delayed independence. Several studies emphasise that worsening affordability, limited access to mortgages and declining opportunities for homeownership have made independent housing transitions more difficult for younger generations (Lennartz et al., 2016, Dewilde, 2020, Arundel & Doling, 2017). After the Global Financial Crisis, many countries experienced a decline in young adults' access to homeownership, but the consequences were not identical everywhere. In some countries, renting became a temporary alternative, while in others co-residence with parents increased, especially where rental markets were weak (Lennartz et al., 2016, Matel, 2024, Arundel & Ronald, 2016).

The literature also points to the importance of family background and intergenerational support. Parental homeownership, parental social class and direct family transfers can substantially improve young adults' housing chances, especially with regard to homeownership (Tucci, 2025, Coulter, 2018, Bonnet et al., 2018). In this sense, housing transitions are increasingly stratified, as young adults from more advantaged families are better able to achieve residential independence, while others face delayed or more insecure pathways (Tucci, 2025, Bonnet et al., 2018).

In addition to economic and housing-related factors, cultural and institutional contexts also matter. Research suggests that stronger family orientation, religiosity and norms of parental responsibility are associated with later home-leaving, while more individualistic societies show earlier transitions to independence (Van Den Berg et al., 2021). Similarly, welfare regimes and housing systems shape the form of semi-dependent living (parental co-residence or shared living), with Southern Europe showing higher parental co-residence and social-democratic countries generally characterised by earlier home-leaving (Arundel & Ronald, 2016, Mandic, 2008). Overall, the literature suggests that differences between countries cannot be explained by a single factor, but rather by the interaction of labour market conditions, housing affordability, family resources and broader cultural-institutional settings.

The selection of variables used in the cluster analysis is based on existing research on young adults' transition to independent living, which highlights the importance of economic conditions, housing affordability and living arrangements.

The NEET rate, defined as the share of young people aged 18–34 and not in employment, education or training, was included as an indicator of economic vulnerability. Previous studies show that weak labour market attachment, unemployment and job insecurity significantly reduce young people's ability to achieve residential independence (Lersch & Dewilde, 2015, Gousia et al., 2021).

Housing affordability was captured by the housing cost overburden rate (HCO), which represents the share of individuals whose housing costs exceed 40% of disposable income. This indicator is used to assess financial pressure related to housing, and previous research suggests that high housing costs can delay transitions to independent living (Arundel & Doling, 2017, Dewilde, 2020).

The share of young people living with their parents (PARENTS) was included as a direct measure of co-residence and living arrangements, as used in previous research (Lennartz et al., 2016). This indicator is closely related to the timing of leaving the parental home, as a higher share of co-residence is typically associated with later transition to independent living. The average age of leaving the parental home (AGE) complements this measure by capturing the timing dimension of residential independence and allows for a more comprehensive comparison across countries.

Together, these indicators provide a comprehensive framework for analysing cross-country differences in young adults' transition to independent living, as they capture complementary dimensions of economic vulnerability, housing constraints and living arrangements.

## 3 Methodology

### 3.1 Data

The analysis is based on data obtained from Eurostat (2026) and covers all 27 European Union countries for the year 2024.

The average age of leaving the parental home (AGE) is measured as the average age at which young people leave the parental household. Housing conditions are captured by the housing cost overburden rate (HCO) for individuals aged 25–29, defined as the percentage of people living in households where housing costs exceed 40% of disposable income. The share of young people living with their parents (PARENTS) refers to individuals aged 18–34 and is measured as the percentage of young adults residing in the parental household. Economic vulnerability is represented by the NEET rate, defined as the share of young people aged 15–34 who are not in employment, education or training. The values of all variables used in the analysis are presented in Table 1.

Table 2 presents descriptive statistics of the variables used in the cluster analysis. Across the 27 EU countries, the average NEET rate reached 11.3%, ranging from 5.9% to 20.3%. The average housing cost overburden rate was 10.2%, with substantial variation between countries (from 2.3% to 30.4%). The share of young adults living with their parents averaged 39.1%, while the average age of leaving the parental home was 26.5 years, ranging from 21.4 to 31.3 years. The observed variability across indicators supports the use of cluster analysis to identify groups of countries with similar profiles.

*Table 1 Dataset used in the cluster analysis*

| COUNTRY | NEET (%) | HCO (%) | PARENTS (%) | AGE (years) |
|---|---|---|---|---|
| **Belgium** | 11.0 | 9.9 | 23.6 | 26.2 |
| **Bulgaria** | 13.6 | 8.0 | 45.6 | 28.2 |
| **Czechia** | 11.7 | 14.0 | 39.2 | 25.8 |
| **Denmark** | 8.8 | 30.4 | 25.7 | 21.7 |
| **Germany** | 10.0 | 14.2 | 42.9 | 23.9 |
| **Estonia** | 10.5 | 12.2 | 26.0 | 22.4 |
| **Ireland** | 8.9 | 6.9 | 44.3 | 26.8 |
| **Greece** | 16.4 | 29.2 | 39.0 | 30.7 |
| **Spain** | 13.1 | 9.5 | 31.9 | 30.0 |
| **France** | 13.2 | 6.6 | 29.4 | 23.5 |
| **Croatia** | 10.9 | 2.3 | 57.1 | 31.3 |
| **Italy** | 17.3 | 5.5 | 29.6 | 30.1 |
| **Cyprus** | 12.5 | 4.2 | 47.8 | 27.2 |
| **Latvia** | 12.5 | 8.6 | 38.4 | 26.6 |
| **Lithuania** | 13.8 | 5.6 | 36.8 | 23.6 |
| **Luxembourg** | 9.9 | 10.6 | 25.8 | 26.9 |
| **Hungary** | 11.1 | 9.3 | 45.0 | 27.1 |
| **Malta** | 7.3 | 4.7 | 70.1 | 28.1 |
| **Netherlands** | 5.9 | 16.2 | 30.9 | 23.2 |
| **Austria** | 9.8 | 9.9 | 44.7 | 25.3 |
| **Poland** | 10.3 | 5.0 | 51.6 | 26.7 |
| **Portugal** | 9.0 | 8.9 | 45.9 | 28.9 |
| **Romania** | 20.3 | 6.8 | 44.6 | 27.3 |
| **Slovenia** | 7.9 | 4.1 | 42.8 | 28.9 |
| **Slovakia** | 12.3 | 8.5 | 52.3 | 30.9 |
| **Finland** | 10.7 | 10.3 | 24.2 | 21.4 |
| **Sweden** | 6.6 | 14.3 | 19.5 | 21.9 |

Source: EUROSTAT

*Table 2 Descriptive statistics of selected indicators*

| VARIABLE | MEAN | STD DEV | MINIMUM | MAXIMUM | N | MEDIAN |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **NEET (%)** | 11.31 | 3.16 | 5.90 | 20.30 | 27 | 10.90 |
| **HCO (%)** | 10.21 | 6.50 | 2.30 | 30.40 | 27 | 8.90 |
| **PARENTS (%)** | 39.06 | 11.57 | 19.50 | 70.10 | 27 | 39.20 |
| **AGE (years)** | 26.47 | 2.91 | 21.40 | 31.30 | 27 | 26.80 |

Source: EUROSTAT. Own processing in SAS EG.

## 3.2 Cluster analysis

Cluster analysis refers to a group of mathematical and statistical techniques aimed at dividing a set of objects $X_i(\mathrm{i} = 1,2, \dots, n)$ into several groups (clusters) $C_1, C_2, \dots, C_q (2 \leq q \leq n)$. The main idea is that objects within the same cluster should be as similar as possible, while objects belonging to different clusters should be as distinct as possible. A variety of clustering procedures can be applied for this purpose (Vojtková & Stankovičová, 2020).

To assess the similarity between objects, distance measures are commonly used. These measures satisfy basic properties such as positivity, symmetry and the triangle inequality. Among the most frequently applied distance measures are Euclidean distance, Manhattan (city

block) distance, Minkowski distance and Canberra distance, each defined by specific formulas as presented by Everitt et al. (2011).

For the purpose of our analysis, we employed the Euclidean distance, which assumes that the input variables are uncorrelated. It is calculated as follows:

$$d_{ij} = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \left(X_{ik} - X_{jk}\right)^2} \tag{1}$$

where
$X_{ik}$ is the value of the $k$-th variable for the $i$-th object,
$X_{jk}$ is the value of the $k$-th variable for the $j$-th object.

Clustering is a method used to group similar objects into clusters. It can be performed using hierarchical or non-hierarchical approaches. In hierarchical clustering, agglomerative methods begin with each object forming its own cluster and progressively merge them into larger groups. In contrast, divisive methods start with all objects in a single cluster and gradually split them into smaller clusters. One of the main advantages of hierarchical clustering is that the number of clusters does not need to be specified in advance. The results are typically visualised using a dendrogram, which illustrates the process of cluster formation. Common hierarchical clustering methods include nearest neighbour, farthest neighbour, average linkage, centroid, median and Ward's method (Everitt et al., 2011). Non-hierarchical methods, on the other hand, require the number of clusters to be specified at the beginning of the analysis. Examples of non-hierarchical methods include the method of typical points and the k-means method (Vojtková & Stankovičová, 2020).

In our application of cluster analysis, we used Ward's method:

$$ESS = \sum_{i=1}^{n_h} \sum_{h=1}^{q} \left(X_{hi} - \bar{X}_{C_h}\right)^2 \tag{2}$$

where
$n_h$ - number of objects in cluster $C_h'$,
$\bar{X}_{C_h}$ - vector of mean values of the variable in cluster $C_h'$,
$X_{hi}$ – vector of variable values for the $i$-th object in cluster $C_h$.

Determining the optimal number of clusters is a crucial step in cluster analysis. According to Everitt et al. (2011), no single correct solution exists; they suggest combining several statistical measures with visual tools, such as dendrograms. To reduce subjectivity, formal methods like GAP statistics can be applied. Vojtková & Stankovičová (2020) discuss objective criteria for selecting the number of clusters, including the coefficient of determination, the semi-partial coefficient of determination, and the cubic clustering criterion.

## 4 Results and Discussion

This section presents the results of the cluster analysis focusing on differences between European Union countries in terms of young adults' transition to independence.

The analysis is based on four indicators capturing key dimensions of this transition: the average age of leaving the parental home (AGE), the share of young people not in employment, education or training (NEET), housing cost overburden (HCO), and the share of young people living with their parents (PARENTS).

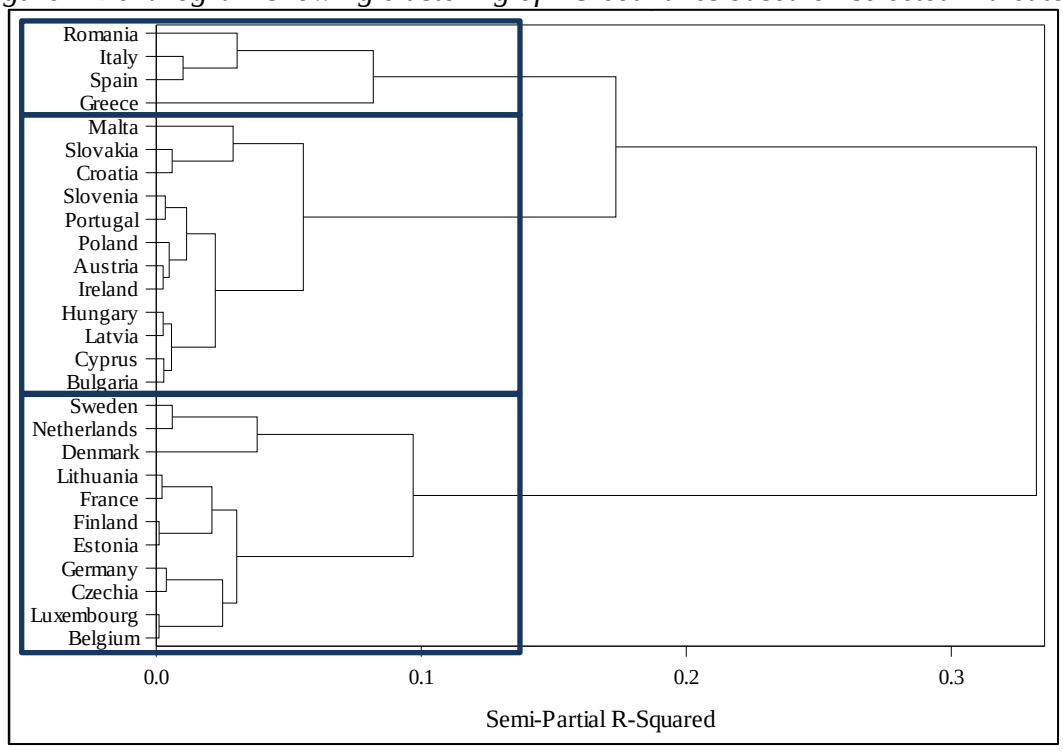
Since the selected indicators are measured in different units (percentages and years), all variables were standardised prior to the cluster analysis to ensure comparability and to prevent variables with larger scales from dominating the clustering results. Prior to the cluster analysis,

correlations among the selected variables were examined to assess potential redundancy. Moderate correlations were identified between some indicators, with the strongest relationship observed between the average age of leaving the parental home and the share of young people living with their parents ($r$=0.57). This relationship is conceptually expected, as both variables capture related dimensions of the transition to independent living. Since the observed correlations did not indicate excessive multicollinearity and the variables reflect complementary aspects of the analysed phenomenon, all indicators were retained in the analysis.

The hierarchical cluster analysis (Ward's method) identified three distinct groups of countries with similar characteristics. The dendrogram in Figure 1 illustrates the clustering of EU countries based on the selected indicators.

Table 3 shows that Cluster 1 (Early independence countries) is characterised by the lowest average age of leaving the parental home (23.7 years) and the lowest share of young people living with their parents (29.5%). These countries also exhibit relatively moderate levels of economic vulnerability, with an average NEET rate of 10.2%, and higher housing cost overburden (13.1%) compared to some other clusters. This cluster includes mainly Northern and Western European countries, such as Sweden, the Netherlands, Denmark, Lithuania, France, Finland, Estonia, Germany, Czechia, Luxembourg and Belgium. The results suggest that young people in these countries tend to achieve residential independence earlier, despite relatively higher housing costs, indicating more favourable labour market conditions and institutional support.

*Figure 1 Dendrogram showing clustering of EU countries based on selected indicators*




Source: EUROSTAT. Own processing in SAS EG.

Cluster 2 (Prolonged co-residence countries) is characterised by a relatively high share of young people living with their parents (48.8%) and a higher average age of leaving the parental home (28.0 years). In contrast to Cluster 1, these countries exhibit lower housing cost overburden (6.7%), while the NEET rate remains at a moderate level (10.5%). This cluster includes mainly Central and Eastern European countries, Slovakia, Croatia, Slovenia, Portugal,

Poland, Austria, Ireland, Hungary, Latvia, Cyprus, Bulgaria and Malta. The results indicate that young people in these countries tend to remain in the parental home longer, despite relatively lower housing costs. This suggests that factors other than housing affordability, such as cultural norms or family structures, may play an important role in shaping living arrangements.

Cluster 3 (Economically constrained late independence countries) is characterised by the highest average age of leaving the parental home (29.5 years) and the highest level of economic vulnerability, as reflected by the NEET rate (16.8%). The share of young people living with parents (36.3%) remains relatively high, while housing cost overburden (12.8%) is also elevated compared to Cluster 2. This cluster includes Southern European countries Italy, Spain, Greece, and Romania. The results suggest that delayed transition to independent living in these countries is closely linked to weaker labour market conditions. In contrast to Cluster 2, where cultural or structural factors may dominate, this cluster highlights the role of economic constraints in shaping young adults' living arrangements.

The results of the cluster analysis are broadly consistent with existing literature, which emphasises the importance of both labour market conditions and housing affordability in shaping young adults' transition to independent living. In particular, Cluster 3, characterised by high NEET rates and delayed home-leaving, supports findings that weaker labour market conditions are associated with prolonged dependence on the parental home (Arundel & Doling, 2017, Lersch & Dewilde, 2015).

*Table 3 Average values of selected indicators by clusters*

| INDICATOR | CLUSTER | | |
|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 |
| **Number of observations** | 11 | 12 | 4 |
| **NEET** | 10.19 | 10.51 | 16.76 |
| **HCO** | 13.12 | 6.70 | 12.75 |
| **PARENTS** | 29.45 | 48.80 | 36.28 |
| **AGE** | 23.68 | 28.00 | 29.53 |

Source: EUROSTAT. Own processing in SAS EG.

At the same time, the results also indicate that housing affordability alone does not fully explain differences across countries. Cluster 2 shows relatively low housing cost overburden but a high share of young people living with parents. This finding is in line with previous studies suggesting that factors such as housing market structure, institutional context and family orientation play an important role (Lennartz et al., 2016, Arundel & Ronald, 2016).

The importance of family background and cultural factors is also supported by the results. The persistence of co-residence in some countries, despite moderate economic conditions, may reflect stronger family ties and intergenerational support, as highlighted in the literature (Van Den Berg et al., 2021, Mandic, 2008).

Delayed transition to independent living may also have broader demographic implications. Previous research suggests that increasing housing costs and limited access to independent housing can contribute to the postponement of family formation and childbearing. In this context, difficulties in accessing housing may not only delay leaving the parental home but also affect fertility outcomes (Van Wijk & Feijten, 2025). This relationship highlights that housing conditions are closely linked to demographic trends, as barriers to residential independence may lead to delayed partnership formation and lower fertility rates.

A closer comparison of the identified clusters suggests that similar outcomes in terms of delayed home-leaving may be driven by different underlying mechanisms. While both Cluster 2 and Cluster 3 are characterised by later transition to independent living, the factors behind this pattern appear to differ substantially. In Cluster 3, delayed independence is strongly associated with economic constraints, particularly weaker labour market conditions and higher

levels of vulnerability. In contrast, Cluster 2 demonstrates that even in the absence of significant economic pressure, young people may remain in the parental home longer due to structural and cultural factors.

Overall, the findings confirm that the transition to independent living is a multidimensional process that cannot be explained by a single factor, but rather by the interaction of economic, housing and socio-cultural conditions.

## 5 Conclusion

This paper analysed differences between EU countries in the transition of young adults to independent living using cluster analysis. Based on selected indicators related to housing conditions, labour market situation and living arrangements, three distinct groups of countries were identified.

The results showed that the transition to independence varies considerably across countries. In some cases, earlier home-leaving is associated with more favourable housing and labour market conditions, while in others delayed independence is linked either to economic constraints or to structural and cultural factors.

The findings confirm that no single factor can explain differences across countries. Instead, the transition to independent living is shaped by a combination of economic, housing and socio-cultural conditions.

Despite its simplicity, the analysis provides useful insights into patterns of young adults' living arrangements across the EU. Future research could extend the analysis by including additional variables or examining changes over time.

**This paper is an output of the science project VEGA no. 1/0285/24: The Impact of Inflation on Poverty and Social Exclusion in Slovakia and the EU; and Early Stage Grant number I-26-119-00: Socio-Economic Conditions of Young Adults in Slovakia and the EU.**

## References

1. Arundel, R., & Doling, J. (2017). The end of mass homeownership? Changes in labour markets and housing tenure opportunities across Europe. *Journal of Housing and the Built Environment, 32*(4), 649–672. https://doi.org/10.1007/s10901-017-9551-8
2. Arundel, R., & Ronald, R. (2016). Parental co-residence, shared living and emerging adulthood in Europe: Semi-dependent housing across welfare regime and housing system contexts. *Journal of Youth Studies*, *19*(7), 885–905. https://doi.org/10.1080/13676261.2015.1112884
3. Bonnet, C., Garbinti, B., & Grobon, S. (2018). Rising inequalities in access to home ownership among young households in France, 1973-2013. *Economie et Statistique / Economics and Statistics*, (500t), 117–138. https://doi.org/10.24187/ecostat.2018.500t.1948
4. Coulter, R. (2018). Parental background and housing outcomes in young adulthood. *Housing Studies*, *33*(2), 201–223. https://doi.org/10.1080/02673037.2016.1208160
5. Dewilde, C. (2020). Exploring Young Europeans' Homeownership Opportunities. *Critical Housing Analysis*, *7*(1), 86–102. https://doi.org/10.13060/23362839.2020.7.1.506
6. Eurostat. (2026). *Eurostat Database*. https://ec.europa.eu/eurostat/data/database
7. Everitt, B., Landau, S., Leese, M., & Stahl, D. (2011). *Cluster analysis* (5th vyd.). Wiley.
8. Filandri, M., & Bertolini, S. (2016). Young people and home ownership in Europe. *International Journal of Housing Policy, 16*(2), 144–164. https://doi.org/10.1080/14616718.2015.1130606
9. Gousia, K., Baranowska-Rataj, A., Middleton, T., & Nizalova, O. (2021). The Impact of Unemployment and Non-Standard Forms of Employment on the Housing Autonomy of

Young Adults. *Work, Employment and Society*, *35*(1), 157–177. https://doi.org/10.1177/0950017020936875
10. Lennartz, C., Arundel, R., & Ronald, R. (2016). Younger Adults and Homeownership in Europe Through the Global Financial Crisis. *Population, Space and Place*, *22*(8), 823–835. https://doi.org/10.1002/psp.1961
11. Lersch, P. M., & Dewilde, C. (2015). Employment Insecurity and First-Time Homeownership: Evidence from Twenty-Two European Countries. *Environment and Planning A: Economy and Space*, *47*(3), 607–624. https://doi.org/10.1068/a130358p
12. Mandic, S. (2008). Home-Leaving and its Structural Determinants in Western and Eastern Europe: An Exploratory Study. *Housing Studies*, *23*(4), 615–637. https://doi.org/10.1080/02673030802112754
13. Matel, A. (2024). Stay or move out? Young adults' housing trajectories in Poland over time and throughout economic cycle. *Housing Studies*, *39*(8), 2043–2065. https://doi.org/10.1080/02673037.2022.2153107
14. Tucci, V. (2025). Housing independence pathways in Europe: The influence of parents' socio-economic background in times of economic stress. *Journal of Youth Studies*, *28*(8), 1195–1215. https://doi.org/10.1080/13676261.2024.2378307
15. Van Den Berg, L., Kalmijn, M., & Leopold, T. (2021). Explaining cross-national differences in leaving home. *Population, Space and Place*, *27*(8), e2476. https://doi.org/10.1002/psp.2476
16. Van Wijk, D., & Feijten, P. (2025). Rising House Prices, Falling Fertility? How Rising House Prices Widen Fertility Differences between Tenure Groups. *European Journal of Population*, *41*(1), 33. https://doi.org/10.1007/s10680-025-09754-6
17. Vojtková, M., & Stankovičová, I. (2020). *Viacrozmerné štatistické metódy s aplikáciami v softvéri SAS*. Letra Edu.

# Evolúcia rozvrhovania operácií v digitálnej ére: Od optimalizácie k inteligentným systémom

# From Optimization to Intelligence: The Evolution of Operations Scheduling in the Digital Age

Martin Mišút[1]

**Abstrakt**

Rozvrhovanie operácií prechádza v digitálnej ére zásadnou transformáciou z izolovaného optimalizačného problému na komplexný, dátovo riadený proces rozhodovania. Tento článok poskytuje analytický prehľad vývoja rozvrhovania v kontexte Industry 4.0, so zameraním na zmeny v povahe problému, metodologické prístupy a technologické predpoklady jeho riešenia. Pozornosť je venovaná klasifikácii rozvrhovacích problémov a komparácii hlavných prístupov, vrátane exaktných metód, heuristík, metaheuristík a prístupov založených na umelej inteligencii. Článok zároveň analyzuje úlohu kľúčových technológií, ako sú internet vecí, kyber-fyzické systémy, digitálne dvojčatá a cloudové infraštruktúry, ktoré umožňujú realizáciu dynamického a adaptívneho rozvrhovania.

Na základe kritickej analýzy sú identifikované hlavné obmedzenia existujúcich prístupov, najmä rozdiel medzi teoretickými modelmi a ich praktickou implementáciou. Zároveň sú diskutované aktuálne trendy, vrátane prechodu k dátovo riadeným a hybridným prístupom, decentralizovaného rozhodovania a integrácie environmentálnych a ľudských faktorov.

Výsledky poukazujú na to, že budúci vývoj rozvrhovania smeruje k inteligentným, autonómnym a adaptívnym systémom schopným reagovať na dynamické podmienky v reálnom čase.

**Kľúčové slová**

Rozvrhovanie, Industry 4.0, umelá inteligencia, digitálne dvojča, dynamické rozvrhovanie, hybridné prístupy k rozvrhovaniu

**Abstract**

Operations scheduling is undergoing a fundamental transformation in the digital age, evolving from an isolated optimisation problem into a complex, data-driven decision-making process. This paper provides an analytical review of scheduling in the context of Industry 4.0, focusing on changes in problem characteristics, methodological approaches, and enabling technologies. The paper examines the classification of scheduling problems and compares major solution approaches, including exact methods, heuristics, metaheuristics, and artificial intelligence-based techniques. It further analyses the role of key technologies such as the Internet of Things, cyber-physical systems, digital twins, and cloud infrastructures, which enable dynamic and adaptive scheduling.

Based on a critical assessment, the main limitations of current approaches are identified, particularly the gap between theoretical models and real-world implementation. The paper also discusses emerging trends, including the shift toward data-driven and hybrid methods, decentralised decision-making, and the integration of sustainability and human-centric considerations.

[1] Ekonomická univerzita v Bratislave, Fakulta hospodárskej informatiky, Katedra aplikovanej informatiky, Dolnozemská cesta 1, 852 35 Bratislava, martin.misut@euba.sk.

The findings indicate that future scheduling systems will evolve toward intelligent, autonomous, and adaptive solutions capable of responding to dynamic conditions in real time.

**Key words**
operations scheduling; Industry 4.0; digital twin; artificial intelligence; dynamic scheduling; hybrid scheduling methods

**JEL classification**
M110, C630

## 1 Úvod

Výrobný sektor prechádza výraznou transformáciou v dôsledku rýchleho rastu rozsahu výroby a zosilnenej globálnej konkurencie. Tradičné výrobné prístupy, založené prevažne na manuálnej práci, už nedokážu uspokojiť komplexné a dynamické požiadavky moderných priemyselných systémov. Na riešenie týchto výziev sa čoraz viac využívajú pokročilé technológie, ako sú internet vecí (IoT), umelá inteligencia (AI) a automatizované systémy, ktoré umožňujú modernizáciu výrobných procesov, zvyšovanie efektívnosti a dosahovanie vyššej flexibility (Ouahabi et al., 2024).

Tieto technologické inovácie transformujú výrobné procesy zavedením vyššej úrovne automatizácie a inteligencie, pričom optimalizujú využitie zdrojov, znižujú prevádzkové náklady a výrazne zvyšujú kvalitu a efektívnosť produkcie (Zhang et al., 2025).

Koncept Industry 4.0 predstavuje jeden z najvýznamnejších trendov v oblasti výroby a zásadne mení prístup k rozvrhovaniu výroby. Zavedenie inteligentných a prepojených systémov zvyšuje flexibilitu, efektívnosť a schopnosť reagovať na zmeny v reálnom čase. Kľúčovým prvkom tejto transformácie je integrácia kyber-fyzických systémov, internetu vecí, umelej inteligencie a dátovej analytiky, ktoré umožňujú spracovanie veľkého množstva dát v reálnom čase a podporujú optimalizované rozhodovanie (Mourtzis, 2022).

Tieto technológie umožňujú prechod od reaktívneho k prediktívnemu rozvrhovaniu, pri ktorom je možné predvídať a eliminovať potenciálne poruchy ešte pred ich vznikom. Zároveň však zvyšujú komplexnosť rozvrhovacích úloh, čo si vyžaduje využitie pokročilých metaheuristických algoritmov, napríklad evolučných a metód kolektívnej inteligencie (swarm intelligence), na riešenie viac-kriteriálnych optimalizačných problémov (Zhang et al., 2025).

Moderné výrobné systémy, ako napríklad inteligentné továrne využívajúce autonómne roboty, si vyžadujú hybridné rozvrhovacie modely schopné zohľadniť rôzne schopnosti strojov, obmedzenia zásobníkov a blokovacie podmienky (Shakeri et al., 2025). Nástroje založené na umelej inteligencii, ako sú digitálne dvojčatá (Digital Twin, DT) a algoritmy strojového učenia, umožňujú dynamickú simuláciu a optimalizáciu procesov v reálnom čase.

V dôsledku týchto zmien sa rozvrhovanie transformuje zo statickej a izolovanej funkcie na kľúčový strategický nástroj podporujúci konkurencieschopnosť v ére inteligentnej výroby. Tento článok analyzuje uvedené trendy s cieľom poskytnúť komplexný prehľad aktuálneho stavu poznania.

Hoci problematika rozvrhovania je predmetom výskumu už niekoľko desaťročí, prechod k prostrediam Industry 4.0 priniesol nové výzvy, ktoré zatiaľ nie sú v literatúre systematicky spracované. Existujúci výskum je často fragmentovaný naprieč rôznymi oblasťami, ako sú optimalizačné metódy, umelá inteligencia a kyber-fyzické systémy (CPS), pričom chýba ich integrácia do jednotného analytického rámca.

Napriek množstvu štúdií zameraných na konkrétne typy rozvrhovacích problémov (napr. job shop, flow shop, flexible job shop) absentuje systematické porovnanie ich výkonnosti v

dynamických, dátovo riadených a vysoko prepojených prostrediach. Najmä vplyv dostupnosti dát v reálnom čase, neistoty systému a viac-kriteriálnej optimalizácie na rozvrhovacie stratégie nie je dostatočne preskúmaný.

Ďalším problémom je rastúca medzera medzi teoretickými modelmi a ich praktickou implementáciou. Mnohé prístupy vychádzajú zo zjednodušených predpokladov, ktoré nezodpovedajú komplexnosti moderných výrobných systémov charakterizovaných vysokou variabilitou, decentralizovaným rozhodovaním a neustálymi poruchami.

Preto existuje potreba komplexného prehľadového článku, ktorý nielen sumarizuje existujúce prístupy, ale ich aj kriticky analyzuje z hľadiska aplikovateľnosti, obmedzení a vývoja v kontexte digitálnej transformácie a identifikuje nové výskumné smery.

## 2 Súčasný stav

### 2.1 Definícia problému

Rozvrhovacie problémy predstavujú základnú kategóriu v operačnom výskume (Allahverdi et al., 2008) a nachádzajú široké uplatnenie v rôznych praktických oblastiach. Ich podstatou je alokácia obmedzených zdrojov na viacero úloh za daných obmedzení s cieľom optimalizovať jednu alebo viacero výkonnostných metrík (Priore et al., 2001).

Proces rozvrhovania zahŕňa priraďovanie úloh k zdrojom a určovanie poradia úloh na jednotlivých zdrojoch, čím sa definujú ich začiatky a konce. Efektívne rozvrhovanie je kľúčové pre dosiahnutie cieľov, ako sú energetická efektívnosť, minimalizácia nákladov, znižovanie emisií a optimalizácia využitia zdrojov (Zhang et al., 2024).

Rozvrhovací problém je možné definovať ako optimalizačný problém, ktorého cieľom je alokovať zdroje na úlohy v čase tak, aby boli splnené dané obmedzenia a optimalizované vybrané kritériá. Ide o základný problém v oblastiach ako výroba, logistika, projektové riadenie či informatika (Serrano-Ruiz et al., 2024).

### 2.2 Klasifikácia problémov rozvrhovania

Rozvrhovacie problémy možno klasifikovať podľa rôznych kritérií, pričom medzi najvýznamnejšie patrí typ výrobného systému, počet zdrojov a štruktúra technologických postupov. Medzi základné kategórie patria problémy s jedným strojom, paralelnými strojmi, flow shop, job shop a flexible job shop (Ruiz & Vázquez-Rodríguez, 2010).

Problémy s jedným strojom predstavujú najjednoduchší typ rozvrhovania, pri ktorom sa všetky úlohy spracovávajú na jednom zariadení. Napriek svojej jednoduchosti majú význam v teoretických štúdiách aj v praktických aplikáciách, ako je plánovanie úloh na serveroch alebo v jednoduchých výrobných procesoch.

Pri problémoch s paralelnými strojmi je k dispozícii viacero zariadení schopných vykonávať rovnaké operácie. Tieto problémy sa ďalej delia na identické, uniformné a neidentické stroje v závislosti od ich výkonových charakteristík. Cieľom je efektívne rozdelenie úloh medzi stroje s cieľom minimalizovať celkový čas spracovania alebo oneskorenia.

Flow shop problémy sú charakterizované tým, že všetky úlohy prechádzajú rovnakou postupnosťou operácií. Tento typ rozvrhovania je typický pre sériovú výrobu, napríklad v automobilovom priemysle. Optimalizácia poradia úloh má významný vplyv na celkový výkon systému.

Job shop problémy umožňujú, aby každá úloha mala vlastnú technologickú postupnosť operácií. Ide o flexibilnejší, ale zároveň výrazne zložitejší typ problému, ktorý je typický pre kusovú výrobu. Tieto problémy patria medzi NP-ťažké, čo znamená, že ich riešenie je výpočtovo náročné.

Flexible job shop predstavuje rozšírenie job shop problému, pri ktorom je možné vykonávať operácie na viacerých alternatívnych strojoch. Tento typ je obzvlášť relevantný pre moderné výrobné systémy, kde existuje vysoká miera flexibility a redundancie zdrojov (Lei et al., 2024).

Okrem uvedených kategórií existujú aj ďalšie typy rozvrhovacích problémov, ako sú hybridné výrobné systémy, projektové rozvrhovanie, rozvrhovanie v reálnom čase a viac-kriteriálne rozvrhovanie, ktoré reflektujú komplexnosť moderných aplikácií.

### 2.3 Prečo je potrebné zlepšiť tradičné metódy rozvrhovania v súčasných podmienkach

V rýchlo sa meniacom prostredí moderného priemyslu sa tradičné metódy rozvrhovania čoraz viac ukazujú ako nedostatočné (Marzia, AlejandroVital, & Azab, 2023). Existuje niekoľko faktorov, ktoré poukazujú na potrebu pokročilejších rozvrhovacích riešení.

Jedným z hlavných faktorov je rastúca komplexnosť operácií, keďže moderné výrobné prostredia sú charakterizované vysokou variabilitou sortimentu a nízkymi objemami výroby (high-mix, low-volume), čo si vyžaduje časté úpravy rozvrhov (Pei et al., 2022). Tradičné nástroje majú problémy s adaptáciou na túto variabilitu, čo často vedie k vzniku úzkych miest a oneskoreniam (Dios & Framinan, 2016). Konvenčné rozvrhovacie systémy navyše často postrádajú flexibilitu potrebnú na dynamické prispôsobovanie sa zmenám a obmedzeniam, čo vedie k neefektívnosti a časovým sklzom.

Manuálne metódy rozvrhovania sú náchylné na chyby a neefektívnosti, najmä pri spracovaní veľkého objemu dát. To môže viesť k nedorozumeniam, duplicitnému plánovaniu a konfliktom v rozvrhu (Rannertshauser, Kessler, & Arlinghaus, 2022).

Nástup Industry 4.0 a inteligentnej výroby zároveň vyžaduje rozvrhovacie systémy schopné integrácie s IoT zariadeniami, umelou inteligenciou a analytikou dát v reálnom čase. Tradičné prístupy túto schopnosť nemajú, čo obmedzuje ich efektívnosť (Salatiello, Guizzi, Marchesano, & Santillo, 2022).

Rigidné rozvrhovanie môže mať negatívny vplyv aj na spokojnosť zamestnancov a nemusí byť v súlade s legislatívnymi požiadavkami na pracovný čas a podmienky. Moderné rozvrhovacie riešenia poskytujú vyššiu mieru flexibility, čím prispievajú k vyššej spokojnosti zamestnancov a lepšiemu dodržiavaniu regulácií (Fu et al., 2021).

Na záver možno konštatovať, že obmedzenia tradičných metód rozvrhovania pri riešení komplexných a dynamických podmienok moderných systémov jednoznačne poukazujú na potrebu pokročilejších, flexibilnejších a integrovaných rozvrhovacích prístupov.

## 3 Rozvrhovanie v digitálnej ére

Problém rozvrhovania v digitálnej ére prešiel zásadnou transformáciou, keď sa posunul od statickej, deterministickej optimalizácie k dynamickému a dátovo riadenému rozhodovaniu. Moderné výrobné a servisné systémy sú charakterizované vysokou variabilitou, častými poruchami a dostupnosťou dát v reálnom čase (Mantravadi et al., 2023; Marzia et al., 2023).

Jednou z hlavných charakteristík súčasných rozvrhovacích problémov je ich dynamický charakter. Nové úlohy môžu prichádzať nepredvídateľne, dochádza k poruchám zariadení a parametre systému sa môžu meniť počas vykonávania. Rozvrhovanie sa tak mení z jednorazového optimalizačného problému na kontinuálny proces rozhodovania vyžadujúci priebežnú aktualizáciu (Serrano-Ruiz et al., 2021; Lei et al., 2024).

Významnú úlohu zohráva viac-kriteriálna optimalizácia. Moderné rozvrhovanie musí zohľadňovať viacero cieľov, ako sú minimalizácia makespanu, znižovanie energetickej spotreby, dodržiavanie termínov a maximalizácia využitia zdrojov (Pei et al., 2022; Hu et al., 2024). Tieto požiadavky sú ďalej komplikované environmentálnymi a sociálnymi aspektmi (Rannertshauser et al., 2022).

Dostupnosť dát v reálnom čase prináša nové možnosti, ale zároveň zvyšuje komplexnosť problému. Rozhodovanie musí prebiehať rýchlo a na základe veľkého množstva heterogénnych dát, čo kladie vysoké nároky na výpočtové a analytické schopnosti systémov (K. Lei et al., 2024).

V dôsledku týchto faktorov sa rozvrhovanie transformuje na komplexnú, stochastickú a viackriteriálnu optimalizačnú úlohu, ktorá vyžaduje adaptívne, hybridné a inteligentné prístupy schopné reagovať v reálnom čase (Neumann et al., 2022; Ma et al., 2024).

### 3.1 Industry 4.0 a rozvrhovanie

Zatiaľ čo predchádzajúca sekcia sa zameriavala na samotnú povahu rozvrhovacieho problému, táto časť analyzuje technologické rámce, ktoré umožňujú jeho efektívne riešenie.

Industry 4.0 predstavuje technologický základ pre riešenie rastúcej komplexnosti moderných rozvrhovacích problémov a zdôrazňuje integráciu digitálnych technológií do jednotného systému (Bakon et al., 2022; Mourtzis, 2022).

Kľúčovým prvkom je prepojenie fyzických a digitálnych systémov prostredníctvom kyber-fyzických architektúr. Stroje, senzory a výrobné zdroje sú prepojené prostredníctvom IoT, čo umožňuje kontinuálne monitorovanie a výmenu dát v reálnom čase (Romero-Silva & Hernández-López, 2020). Vďaka tomu môžu rozvrhovacie systémy pracovať s aktuálnym stavom systému namiesto statických predpokladov.

Rozvrhovanie sa stáva integrálnou súčasťou širšieho digitálneho ekosystému zahŕňajúceho systémy ERP, MES a SCM, ktoré zabezpečujú prepojenie operatívneho riadenia so strategickým plánovaním (Mantravadi et al., 2023). Systémy MES zohrávajú významnú úlohu pri dynamickej aktualizácii rozvrhov na základe aktuálnych dát z výroby (Morgan et al., 2021; Mehdiyev et al., 2024).

Dôležitým aspektom je aj využitie distribuovaných výpočtových infraštruktúr. Cloud computing umožňuje centralizovanú optimalizáciu na úrovni podniku, zatiaľ čo edge computing podporuje decentralizované rozhodovanie priamo na úrovni výrobných zariadení (Pinto et al., 2024). Táto kombinácia umožňuje dosiahnuť rovnováhu medzi globálnou optimalizáciou a lokálnou flexibilitou.

Pokročilé technológie, ako digitálne dvojčatá a umelá inteligencia, poskytujú nové možnosti pre rozvrhovanie. Digitálne dvojčatá umožňujú simuláciu a testovanie rôznych scenárov (Ouahabi et al., 2024), zatiaľ čo metódy umelej inteligencie podporujú adaptívne a prediktívne rozhodovanie (Serrano-Ruiz et al., 2022; Zhang et al., 2024).

Industry 4.0 tak transformuje rozvrhovanie z izolovaného optimalizačného problému na kľúčový prvok inteligentného, prepojeného a autonómneho výrobného systému (Grassi et al., 2020).

### 3.2 Kľúčové technológie formujúce moderné rozvrhovanie

Moderné rozvrhovanie je čoraz viac determinované integráciou pokročilých digitálnych technológií, ktoré zásadne menia spôsob plánovania, koordinácie a optimalizácie procesov. Kým tradičné rozvrhovacie systémy boli založené prevažne na statických pravidlách a deterministických modeloch, súčasné prístupy využívajú adaptívne, dátovo riadené a inteligentné mechanizmy schopné reagovať na dynamické zmeny prostredia v reálnom čase (Mourtzis, 2022; Mantravadi et al., 2023).

Jednou z najvýznamnejších technológií je umelá inteligencia a strojové učenie, ktoré umožňujú transformáciu rozvrhovania z reaktívneho procesu na prediktívne a odporúčacie rozhodovanie. Metódy strojového učenia dokážu identifikovať vzory správania výrobných systémov, predikovať budúci vývoj a optimalizovať rozhodovanie na základe historických aj aktuálnych dát (Serrano-Ruiz et al., 2024; Zhang et al., 2024). Významný potenciál majú najmä

prístupy založené na hlbokom posilňovanom učení, ktoré umožňujú adaptívne riadenie v dynamických prostrediach pružných výrobných systémov (flexible job shop systems) (Guo et al., 2024; Wan et al., 2024). Napriek vysokému potenciálu však praktické nasadenie AI naráža na problémy interpretovateľnosti modelov, kvality dát a výpočtovej náročnosti.

Internet vecí predstavuje technologický základ pre zber a prenos dát v reálnom čase. Prostredníctvom senzorov, RFID technológií a inteligentných zariadení umožňuje kontinuálne monitorovanie stavu strojov, zásob, materiálových tokov a výrobných operácií (Romero-Silva & Hernández-López, 2020). Vďaka tomu sa rozvrhovacie systémy dokážu adaptovať na aktuálny stav systému namiesto využívania statických predpokladov. IoT zároveň podporuje implementáciu prediktívnej údržby a dynamického prideľovania zdrojov. Integrácia IoT však prináša nové výzvy v oblasti spoľahlivosti dát, latencie a kybernetickej bezpečnosti (Salatiello et al., 2022). V prostrediach s nestabilnými dátami môže IoT paradoxne znižovať robustnosť rozhodovania v dôsledku nekonzistentných alebo oneskorených dát.

Kľúčovým prvkom inteligentnej výroby sú kyber-fyzické systémy (CPS), ktoré prepájajú fyzické výrobné zariadenia s digitálnymi riadiacimi mechanizmami. CPS umožňujú decentralizované a autonómne rozhodovanie prostredníctvom kontinuálnej výmeny dát medzi fyzickou a digitálnou vrstvou systému (Seeger, Yahouni, & Alpan, 2022; Bakon et al., 2022; Mourtzis, 2022). V kontexte rozvrhovania umožňujú rýchlu reakciu na lokálne zmeny, poruchy a variabilitu výroby. Zároveň však vzniká problém koordinácie medzi jednotlivými autonómnymi rozhodovacími jednotkami, čo môže viesť ku konfliktom medzi lokálnou a globálnou optimalizáciou.

Významnú úlohu zohrávajú digitálne dvojčatá, ktoré umožňujú vytváranie virtuálnych modelov výrobných systémov a simuláciu rôznych rozvrhovacích scenárov v reálnom čase (Ouahabi et al., 2024). Digitálne dvojča umožňuje testovanie rozhodnutí pred ich implementáciou, čím znižuje riziko neefektívnych zásahov a podporuje robustnosť systému. V spojení s dátovou analytikou a AI sa digitálne dvojčatá stávajú významným nástrojom pre prediktívne a adaptívne rozvrhovanie. Ich efektívnosť je však podmienená presnosťou modelovania a schopnosťou synchronizácie s fyzickým systémom, čo môže byť v praxi náročné.

Cloud computing a edge computing vytvárajú infraštruktúrny základ moderných rozvrhovacích systémov. Cloud computing umožňuje centralizované spracovanie veľkých objemov dát a realizáciu komplexných optimalizačných algoritmov v distribuovanom prostredí (Pinto et al., 2024). Edge computing naopak podporuje rýchle lokálne rozhodovanie priamo na úrovni výrobných zariadení, čím minimalizuje latenciu a zvyšuje odozvu systému. Kombinácia týchto prístupov umožňuje vytvárať hybridné architektúry podporujúce globálnu optimalizáciu aj lokálnu flexibilitu.

Technológia blockchain nachádza uplatnenie najmä v distribuovaných a kolaboratívnych rozvrhovacích systémoch, kde je potrebné zabezpečiť transparentnosť, dôveryhodnosť a sledovateľnosť dát medzi viacerými účastníkmi procesu (Lassoued & Schwung, 2024). Význam blockchainu spočíva predovšetkým v zabezpečení integrity dát a koordinácie medzi organizáciami, nie však v samotnej optimalizácii rozvrhovania.

Robotická automatizácia procesov (RPA) zvyšuje efektívnosť administratívnych a opakujúcich sa úloh súvisiacich s rozvrhovaním. Automatizáciou rutinných operácií umožňuje zrýchlenie aktualizácie rozvrhov a integráciu heterogénnych informačných systémov (Fu et al., 2021). Hoci RPA neprináša nové optimalizačné mechanizmy, významne podporuje automatizáciu a škálovateľnosť rozvrhovacích procesov.

Dôležitú úlohu zohráva aj analýza veľkých dát (Big Data analytics), ktorá umožňuje spracovanie rozsiahlych objemov štruktúrovaných aj neštruktúrovaných dát generovaných modernými výrobnými systémami. Pokročilé analytické metódy podporujú predikciu dopytu, identifikáciu skrytých vzorov správania systému a optimalizáciu využitia zdrojov (Yin et al.,

2022; Peng et al., 2024). Rozvrhovanie sa tak transformuje z administratívnej činnosti na strategickú, dátovo orientovanú funkciu podporujúcu kontinuálne zlepšovanie procesov.

Celkovo možno konštatovať, že jednotlivé technológie prinášajú komplementárne výhody, pričom ich skutočný prínos sa prejavuje až pri ich integrácii. Budúcnosť moderného rozvrhovania preto smeruje k hybridným architektúram prepájajúcim umelú inteligenciu, simuláciu, IoT infraštruktúru a decentralizované riadenie do jednotného inteligentného ekosystému.

## 4 Diskusia

### 4.1 Porovnanie prístupov k rozvrhovaniu

Prístupy k riešeniu rozvrhovacích problémov možno rozdeliť do štyroch hlavných kategórií: exaktné metódy, heuristiky, metaheuristiky a prístupy založené na umelej inteligencii (AI-based approaches).

Exaktné metódy, ako lineárne programovanie alebo branch-and-bound algoritmy, poskytujú optimálne riešenia, avšak ich použitie je obmedzené na malé problémy z dôvodu vysokej výpočtovej náročnosti. Preto sú v reálnom čase prakticky nepoužiteľné.

Heuristické metódy, ako napríklad pravidlá Najkratší výrobný čas (SPT) alebo Najskorší termín odovzdania (EDD), umožňujú rýchle a jednoducho implementovateľné riešenia. Ich nevýhodou je nižšia kvalita riešení a obmedzená robustnosť v dynamických prostrediach.

Metaheuristiky, vrátane genetických algoritmov, simulovaného žíhania alebo algoritmov založených na kolektívnom správaní (swarm intelligence) (Lei & Liu, 2020) predstavujú kompromis medzi kvalitou riešenia a výpočtovou náročnosťou. Sú vhodné pre riešenie veľkých a komplexných problémov, avšak ich výkonnosť závisí od správneho nastavenia parametrov.

Prístupy založené na umelej inteligencii umožňujú adaptívne a dátovo riadené rozhodovanie. Sú obzvlášť vhodné pre dynamické a neisté prostredia, avšak ich implementácia je náročná a často trpí problémami s interpretovateľnosťou a generalizáciou. Nedávne prístupy založené na posilňovacom učení a hybridných metaheuristických metódach ukázali sľubné výsledky (Guo et al., 2024; Peng et al., 2024; Wan et al., 2024; Workneh et al., 2024).

V kontexte Industry 4.0 sa ako najperspektívnejšie ukazujú hybridné prístupy, ktoré kombinujú výhody viacerých metód a umožňujú dosiahnuť vyššiu flexibilitu a výkonnosť. Tabuľka 1 poskytuje komparatívny prehľad prístupov k rozvrhovaniu s ohľadom na ich aplikovateľnosť v dynamických prostrediach.

*Tabuľka 1 : Porovnanie prístupov k rozvrhovaniu v dynamickom prostredí*

| Metóda | Optimalita | Škálovateľnosť | Schopnosť reagovať v reálnom čase | Adaptabilita |
|---|---|---|---|---|
| **Exaktné metódy** | Vysoká | Nízka | Nie | Nízka |
| **Heuristiky** | Nízka až stredná | Vysoká | Áno | Nízka |
| **Metaheuristiky** | Stredná až vysoká | Stredná | Limitovaná | Stredná |
| **Metódy umelej inteligencie (AI)** | Variabilná | Vysoká | Áno | Vysoká |

Zdroj: vlastná tvorba

## 4.2 Kritická analýza podporných technológií

Hoci sú pokročilé technológie často prezentované ako kľúčové predpoklady moderného rozvrhovania, ich praktický prínos sa výrazne líši v závislosti od aplikačného kontextu.

Umelá inteligencia ponúka vysoký potenciál pre adaptívne rozvrhovanie, avšak jej efektívnosť je silne závislá od kvality a dostupnosti dát. V mnohých priemyselných prostrediach môžu neúplné alebo zašumené dáta výrazne znižovať výkonnosť modelov strojového učenia. Okrem toho zostáva nízka interpretovateľnosť modelov významnou prekážkou ich využitia v kritických rozhodovacích procesoch.

Internet vecí umožňuje zber dát v reálnom čase, čo je nevyhnutné pre dynamické rozvrhovanie. Integrácia IoT systémov však prináša výzvy spojené so spoľahlivosťou dát, latenciou a kybernetickou bezpečnosťou, ktoré môžu negatívne ovplyvniť stabilitu rozvrhovania.

Digitálne dvojčatá poskytujú silné simulačné možnosti, ktoré umožňujú hodnotiť rozvrhovacie rozhodnutia pred ich implementáciou. Ich praktické využitie je však limitované náročnosťou na výpočtové zdroje a potrebou kontinuálnej synchronizácie s fyzickým systémom.

Cloud computing a edge computing podporujú škálovateľné a distribuované rozvrhovanie, avšak prinášajú kompromisy medzi centralizovanou optimalizáciou a decentralizovanou odozvou. Nájsť optimálnu rovnováhu medzi týmito prístupmi zostáva otvorenou výskumnou otázkou.

Technológia blockchain zvyšuje transparentnosť a dôveryhodnosť v kolaboratívnych rozvrhovacích scenároch, najmä v dodávateľských reťazcoch. Jej úloha je však primárne infraštruktúrna a neprináša priame riešenia optimalizačných problémov.

Celkovo možno konštatovať, že tieto technológie výrazne rozširujú možnosti rozvrhovania, avšak ich integrácia zároveň prináša nové vrstvy komplexnosti, ktoré si vyžadujú systematické riadenie a architektonické riešenia.

## 4.3 Budúce trendy v rozvrhovaní

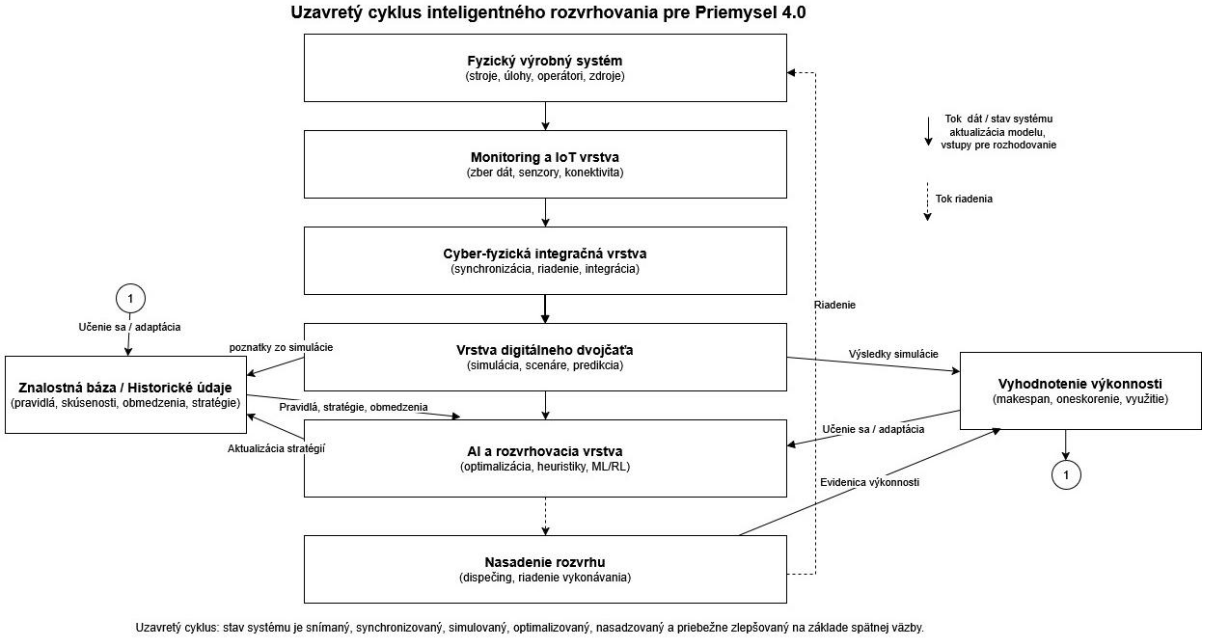
Vývoj rozvrhovania v digitálnej ére je charakterizovaný viacerými trendmi, ktoré zásadne menia jeho úlohu v moderných systémoch.

Jedným z hlavných trendov je prechod od optimalizačne orientovaného k učeniu orientovanému rozvrhovaniu. Zatiaľ čo tradičné prístupy riešia vopred definované optimalizačné úlohy, moderné systémy využívajú dátovo riadené modely, ktoré sa adaptujú na meniace sa podmienky.

Ďalším trendom je prechod od centralizovaného k decentralizovanému rozvrhovaniu. Vďaka kyber-fyzickým systémom a cloudovému computingu a edge computingu sa rozhodovanie presúva bližšie k fyzickým zdrojom, čo umožňuje rýchlejšiu reakciu na lokálne zmeny.

Významným smerom je aj rozvoj hybridných prístupov, ktoré kombinujú optimalizáciu, simuláciu a umelú inteligenciu. Tieto systémy umožňujú spojiť prediktívne schopnosti s adaptívnym riadením. Pozri obrázok 1.

*Obrázok 1: Architektúra uzavretého cyklu inteligentného rozvrhovania v prostredí Industry 4.0*




Zdroj: vlastná tvorba

S rastúcim dôrazom na udržateľnosť sa do rozvrhovania čoraz viac integrujú environmentálne kritériá, ako sú spotreba energie a emisie. Zároveň rastie význam prístupov orientovaných na človeka, ktoré zohľadňujú pracovné podmienky a ergonómiu.

Tieto trendy naznačujú, že rozvrhovanie sa vyvíja smerom k multidisciplinárnej oblasti, ktorá prepája technológie, optimalizáciu a ľudské faktory.

## 5 Syntéza

Analýza súčasného stavu výskumu ukazuje, že rozvrhovanie prechádza zásadnou transformáciou z izolovaného optimalizačného problému na komplexný, adaptívny a dátovo riadený systém. Napriek významnému pokroku však pretrváva viacero otvorených problémov.

Jedným z hlavných problémov je rozdiel medzi teoretickými modelmi a ich praktickou implementáciou. Mnohé modely predpokladajú ideálne podmienky, ktoré nezodpovedajú realite moderných výrobných systémov.

Ďalšou výzvou je integrácia rôznych technológií do jednotného systému. Kombinácia umelej inteligencie, IoT, CPS a digitálnych dvojčiat prináša vysokú komplexnosť, ktorá si vyžaduje nové architektonické prístupy.

Významným problémom zostáva aj interpretovateľnosť a spoľahlivosť rozhodovacích systémov založených na umelej inteligencii, najmä v kritických aplikáciách.

Zároveň existuje potreba vyváženia medzi centralizovaným a decentralizovaným riadením, ako aj medzi globálnou optimalizáciou a lokálnou adaptáciou.

Tieto výzvy predstavujú významné výskumné príležitosti a naznačujú smer budúceho vývoja v oblasti rozvrhovania.

## 6 Záver

Tento článok poskytol komplexný prehľad problematiky rozvrhovania v digitálnej ére, so zameraním na technologické faktory, metodologické prístupy a budúce trendy.

Analýza ukázala, že tradičné prístupy k rozvrhovaniu už nedokážu efektívne riešiť komplexnosť moderných systémov a je potrebné ich doplniť o adaptívne a dátovo riadené metódy.

Kľúčovú úlohu zohrávajú technológie Industry 4.0, ktoré umožňujú integráciu dát, simuláciu a inteligentné rozhodovanie. Najväčší potenciál majú hybridné prístupy, ktoré kombinujú optimalizačné metódy, simuláciu a umelú inteligenciu.

Budúci vývoj bude smerovať k autonómnym, inteligentným a udržateľným rozvrhovacím systémom, ktoré budú schopné reagovať na dynamické zmeny v reálnom čase a podporovať strategické ciele organizácií.

Rozvrhovanie sa tak stáva kľúčovým prvkom digitálnej transformácie a inteligentného riadenia moderných systémov.

## Literatúra


1. Allahverdi, A., Ng, C. T., Cheng, T. C. E., & Kovalyov, M. Y. (2008). A survey of scheduling problems with setup times or costs. *European Journal of Operational Research, 187*(3), 985-1032. https://doi.org/10.1016/j.ejor.2006.06.060
2. Bakon, K., Holczinger, T., Süle, Z., Jaskó, S., & Abonyi, J. (2022). Scheduling under uncertainty for Industry 4.0 and 5.0. *IEEE Access, 10*, 74977-75017.
3. Dios, M., & Framinan, J. M. (2016). A review and classification of computer-based manufacturing scheduling tools. *Computers & Industrial Engineering, 99*, 229-249. https://doi.org/10.1016/j.cie.2016.07.020
4. Fu, Y., Hou, Y., Wang, Z., Wu, X., Gao, K., & Wang, L. (2021). Distributed scheduling problems in intelligent manufacturing systems. *Tsinghua Science and Technology, 26*(5), 625-645.
5. Grassi, A., Guizzi, G., Santillo, L. C., & Vespoli, S. (2020). On the modelling of a decentralised production control system in the Industry 4.0 environment. *IFAC-PapersOnLine, 53*(2), 10714-10719. https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2020.12.2850
6. Guo, H., Liu, J., Wang, Y., & Zhuang, C. (2024). An improved genetic programming hyper-heuristic for the dynamic flexible job shop scheduling problem with reconfigurable manufacturing cells. *Journal of Manufacturing Systems, 74*, 252-263. https://doi.org/10.1016/j.jmsy.2024.03.009
7. Hu, Y., Zhang, L., Zhang, Z., Li, Z., & Tang, Q. (2024). Matheuristic and learning-oriented multi-objective artificial bee colony algorithm for energy-aware flexible assembly job shop scheduling problem. *Engineering Applications of Artificial Intelligence, 133*, 108634. https://doi.org/10.1016/j.engappai.2024.108634
8. Lassoued, Y., & Schwung, A. (2024). Blockchain-enabled collaborative scheduling in distributed manufacturing systems. *IEEE Access, 12*, 45521–45538.
9. Lei, D., & Liu, M. (2020). An artificial bee colony with division for distributed unrelated parallel machine scheduling with preventive maintenance. *Computers & Industrial Engineering, 141*, 106320. https://doi.org/10.1016/j.cie.2020.106320
10. Lei, K., Guo, P., Wang, Y., Zhang, J., Meng, X., & Qian, L. (2024). Large-scale dynamic scheduling for flexible job-shop with random arrivals of new jobs by hierarchical reinforcement learning. *IEEE Transactions on Industrial Informatics, 20*(1), 1007-1018. https://doi.org/10.1109/TII.2023.3272661
11. Ma, Y., Shi, J., Cai, J., Liu, J., Qiao, F., & Liao, Y. (2024). A semi-supervised production scheduling method based on co-training deep neural network for smart shop floors. *Computers & Industrial Engineering, 194*, 110383. https://doi.org/10.1016/j.cie.2024.110383

12. Mantravadi, S., Srai, J. S., & Møller, C. (2023). Application of MES/MOM for industry 4.0 supply chains: A cross-case analysis. *Computers in Industry, 148*, 103907.
13. Marzia, S., AlejandroVital, S., & Azab, A. (2023). Automated process planning and dynamic scheduling for smart manufacturing: A systematic literature review. *Manufacturing Letters, 35*, 861-872. https://doi.org/10.1016/j.mfglet.2023.07.013
14. Mehdiyev, N., Mayer, L., Lahann, J., & Fettke, P. (2024). Deep learning-based clustering of processes and their visual exploration: An industry 4.0 use case for small, medium-sized enterprises. *Expert Systems, 41*(2), e13139.
15. Morgan, J., Halton, M., Qiao, Y., & Breslin, J. G. (2021). Industry 4.0 smart reconfigurable manufacturing machines. *Journal of Manufacturing Systems, 59*, 481-506.
16. Mourtzis, D. (2022). Advances in Adaptive Scheduling in Industry 4.0. *Frontiers in Manufacturing Technology, 2*. https://doi.org/10.3389/fmtec.2022.937889
17. Neumann, A., Hajji, A., Rekik, M., & Pellerin, R. (2022). A didactic review on genetic algorithms for industrial planning and scheduling problems. *IFAC-PapersOnLine, 55*(10), 2593-2598. https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2022.10.100
18. Ouahabi, N., Chebak, A., Kamach, O., Laayati, O., & Zegrari, M. (2024). Leveraging digital twin into dynamic production scheduling: A review. *Robotics and Computer-Integrated Manufacturing, 89*, 102778. https://doi.org/10.1016/j.rcim.2024.102778
19. Pei, F., Zhang, J., Mei, S., & Song, H. (2022). Critical review on the objective function of flexible job shop scheduling. *Mathematical Problems in Engineering, 2022*(1), 8147581. https://doi.org/10.1155/2022/8147581
20. Peng, S., Xiong, G., Yang, J., Shen, Z., Tamir, T. S., Tao, Z., Wang, F.-Y. (2024). Multi-agent reinforcement learning for extended flexible job shop scheduling. *Machines, 12*(1), 8. https://doi.org/10.3390/machines12010008
21. Pinto, M., Silva, C., Thürer, M., & Moniz, S. (2024). Nesting and scheduling optimisation of additive manufacturing systems: Mapping the territory. *Computers & Operations Research, 165*, 106592. https://doi.org/10.1016/j.cor.2024.106592
22. Priore, P., Fuente, D. D. L., Gomez, A., & Puente, J. (2001). A review of machine learning in dynamic scheduling of flexible manufacturing systems. *Artificial Intelligence for Engineering Design, Analysis and Manufacturing, 15*(3), 251–263. https://doi.org/10.1017/s0890060401153059
23. Rannertshauser, P., Kessler, M., & Arlinghaus, J. C. (2022). Human-centricity in the design of production planning and control systems: A first approach towards Industry 5.0. *IFAC-PapersOnLine, 55*(10), 2641-2646. https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2022.10.108
24. Romero-Silva, R., & Hernández-López, G. (2020). Shop-floor scheduling as a competitive advantage: A study on the relevance of cyber-physical systems in different manufacturing contexts. *International Journal of Production Economics, 224*, 107555. https://doi.org/10.1016/j.ijpe.2019.107555
25. Salatiello, E., Guizzi, G., Marchesano, M. G., & Santillo, L. C. (2022). Assessment of performance in Industry 4.0 enabled Job-Shop with a due-date based dispatching rule. *IFAC-PapersOnLine, 55*(10), 2635-2640. https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2022.10.107
26. Seeger, P. M., Yahouni, Z., & Alpan, G. (2022). Literature review on using data mining in production planning and scheduling within the context of cyber physical systems. *Journal of Industrial Information Integration, 28*, 100371. https://doi.org/10.1016/j.jii.2022.100371
27. Serôdio, C., Mestre, P., Cabral, J., Gomes, M., & Branco, F. (2024). Software and architecture orchestration for process control in industry 4.0 enabled by cyber-physical systems technologies. *Applied Sciences, 14*(5), 2160.

28. Serrano-Ruiz, J. C., Mula, J., & Poler, R. (2021). Smart manufacturing scheduling: A literature review. *Journal of Manufacturing Systems, 61*, 265-287. https://doi.org/10.1016/j.jmsy.2021.09.011
29. Serrano-Ruiz, J. C., Mula, J., & Poler, R. (2022). Toward smart manufacturing scheduling from an ontological approach of job-shop uncertainty sources. *IFAC-PapersOnLine, 55*(2), 150-155. https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2022.04.185
30. Serrano-Ruiz, J. C., Mula, J., & Poler, R. (2024). Job shop smart manufacturing scheduling by deep reinforcement learning. *Journal of Industrial Information Integration, 38*, 100582. https://doi.org/10.1016/j.jii.2024.100582
31. Shakeri, Z., Benfriha, K., Varmazyar, M., Talhi, E., & Quenehen, A. (2025). Production scheduling with multi-robot task allocation in a real industry 4.0 setting. *Scientific Reports, 15*(1), 1795. https://doi.org/10.1038/s41598-024-84240-3
32. Wan, L., Fu, L., Li, C., & Li, K. (2024). Flexible job shop scheduling via deep reinforcement learning with meta-path-based heterogeneous graph neural network. *Knowledge-Based Systems, 296*, 111940. https://doi.org/10.1016/j.knosys.2024.111940
33. Workneh, A. D., El Mouhtadi, M., & El Hilali Alaoui, A. (2024). Deep reinforcement learning for adaptive flexible job shop scheduling: coping with variability and uncertainty. *Smart Science, 12*(2), 387-405. https://doi.org/10.1080/23080477.2024.2345951
34. Yin, Y., Chu, F., Dolgui, A., Cheng, T. C. E., & Zhou, M. C. (2022). Big data analytics in production and distribution management. *International Journal of Production Research, 60*(22), 6682–6690. https://doi.org/10.1080/00207543.2022.2131234
35. Zhang, F., Li, R., & Gong, W. (2024). Deep reinforcement learning-based memetic algorithm for energy-aware flexible job shop scheduling with multi-AGV. *Computers & Industrial Engineering, 189*, 109917. https://doi.org/10.1016/j.cie.2024.109917
36. Zhang, W., Bao, X., Hao, X., & Gen, M. (2025). Metaheuristics for multi-objective scheduling problems in industry 4.0 and 5.0: a state-of-the-art survey. *Frontiers in Industrial Engineering, 3*. https://doi.org/10.3389/fieng.2025.1540022
37. Zhang, W., Xiao, G., Gen, M., Geng, H., Wang, X., Deng, M., & Zhang, G. (2024). Enhancing multi-objective evolutionary algorithms with machine learning for scheduling problems: recent advances and survey. *Frontiers in Industrial Engineering, 2*. https://doi.org/10.3389/fieng.2024.1337174
38. Zhang, W., Zhao, F., Li, Y., Du, C., Feng, X., & Mei, X. (2024). A novel collaborative agent reinforcement learning framework based on an attention mechanism and disjunctive graph embedding for flexible job shop scheduling problem. *Journal of Manufacturing Systems, 74*, 329-345. https://doi.org/10.1016/j.jmsy.2024.03.012

# Schopnosť softvéru detekovať text generovaný umelou inteligenciou v študentských úlohách

# The software's ability to detect AI-generated text in student assignments

Eva Rakovská[1]

**Abstrakt**
Ako zlepšiť učenie a výučbu pomocou AI je téma, ktorá učiteľov zamestnáva každý deň. Nástroje AI sa vyvíjajú veľmi rýchlo a ich používanie je bezplatné. Mnohé nástroje AI dokážu generovať študentské eseje, vedecké texty, štruktúrované životopisy, motivačné listy a iné typy textov. Môžeme nájsť nástroje AI na prevod textu vytvoreného AI na ľudský text alebo na parafrázovanie pôvodného textu. Preto je veľmi zložité povedať, ktorý nástroj AI je užitočný na získavanie vedomostí alebo je len nástrojom na podvádzanie. Zistiť, či je text vygenerovaný pomocou AI alebo je ľudským originálom, nie je jednoduché hoci na webových stránkach je veľa detektorov na zistenie AI obsahu. Niektoré štúdie spomínajú aj rozdiely v angličtine medzi cudzincami a prejavom rodených hovoriacich. Výsledkom je, že väčšina textov ľudí, ktorí sa naučili angličtinu neskôr je detekovaná ako vygenerovaná AI. Článok predstavuje vybrané detektory AI a používa ich na skúmanie schopnosti detekovať obsah AI v študentských úlohách a ich spoľahlivosť. Témy sme vybrali z dvoch rozličných predmetov a rozdielnych študijných programov. Výsledok nášho výskumu môže ukázať, či je užitočné používať detektor AI v každodennej rutine univerzitných učiteľov. Nakoniec sa snažíme nájsť rovnováhu medzi používaním detektorov AI a detekciou textov študentov človekom počas hodín angličtiny (rôzne zadania).

**Kľúčové slová**
Generatívna umelá inteligencia, AI detektor, AI vo vzdelávaní, akademická etika, spracovanie prirodzeného jazyka

**Abstract**
How to improve learning and teaching with AI is a topic that keeps teachers busy every day. AI tools are developed very quickly and are free to use. Many AI tools can generate students' essays, scientific texts, structured CVs, motivation letters, and other types of texts. We can find AI tools for converting AI text to human text or paraphrasing the original text. Therefore, it is very tricky to say which AI tool is useful for gaining knowledge or is only a tool for cheating. How to find out whether the text is AI-generated or human original seems to be not easy; however, there are many AI content detectors on websites. Some studies mention differences between native and non-native English speakers (Liang et al., 2023). The result is that most non-native English speakers' text is detected as AI-generated. The article introduces selected AI detectors and uses them by exploring their ability, and reliability to detect AI-generated content from students' assignments. We chose the topics from two distinguished subjects and different study programs. The result of our research can show whether it is useful to use an AI detector in the daily routine of university teachers. Finally, we try to find the balance between using AI detectors and human-detecting students' texts during English lessons (various assignments).

[1] Bratislava University of Economics and Business, Faculty of Economic Informatics, Department of Applied Informatics, Dolnozemská cesta 1, 852 35 Bratislava, eva.rakovska@euba.sk.

**Key words**
Generative Artificial Intelligence, AI detector, AI in education, Academic ethics, Natural Language processing

**JEL classification**
I23, O39

## 1 Introduction

The rapid development of Artificial Intelligence (AI) brings many challenges for people dealing with AI. In many fields, the question of when and where to use AI is often addressed, so that it is not only useful, but also safe.

The concept of AI started with Alan Turing's idea of a "thinking machine" or "intelligent machine". His imitation game called the Turing test (Muggleton, 2014) started the activity of mathematicians towards the initiative directed to the basic concepts of AI. John McCarthy invited more mathematicians, electrical engineers and psychologists to the Dartmouth Summer Research Project on Artificial Intelligence in 1956 where AI's first concepts were discussed (e.g. symbolic methods, early expert systems, and deductive systems versus inductive systems based on first-order predictive logic). The workshop lasted six weeks and laid the foundations of artificial intelligence. The following years were full of enthusiasm for AI scientists and the idea to solve all problems using AI methods was the central motive of the research. After 20 years Dartmouth Workshop started the gold era of AI in two main directions. The first direction was oriented toward knowledge representation and the development of Expert Systems. Marvin Minsky found the knowledge frame representation in 1975, so object-oriented programming started. Object-oriented modelling and programming are still essential in the development of AI. The second direction started the era of artificial neural networks (NNs) with the idea of an artificial neuron called Perceptron (Rosenblatt, Minsky, Pappert) in 1969. It led to massive research in artificial neural networks. AI development is not only directly increasing, the time known as an "AI winter" was 40 years ago. (Hurwitz, Kaufmann, Bowles, 2015).

Neural networks are perceived as the main concept of AI in current times. Many people perceive NNs as self-learning tools, which can learn the same way as people. Therefore they are perceived as tools with a "magic power". However the NNs are very important in the AI field, they represent only a subset of AI methods. An increased interest in NNs might have started after the year 2000 with the rapid technological progress. The importance of NNs is visible mainly by recognizing the patterns and hidden relations within huge amounts of data.

Although the statistical methods were successfully used for text and language recognition for a long time, the NNs surpassed many previous approaches and techniques in this field. Therefore the NNs are one of the main concepts behind the Natural Language Processing (NLP). As Hurwitz writes "NLP is the capability of a computer system to process text written or recorded in a language used for human communication" (Hurwitz et al., 2015) and deals with unstructured data hidden in the text documents and multimedia. The NNs help find the similarities within the unstructured data and then process the syntax and semantics of language by using grammar systems. The process of recognizing the context of language is not easy and the developers of NLP systems use various combinations of techniques (Aßenmacher, 2020). The NLP boom started after the launch of chatbots searching for answers in web data where the ChatGPT, Bard (now Gemini), and Bing played crucial roles in further research. Generative AI used in the mentioned chatbots, is just at the peak of its development and young people have quickly adopted it. Although it can make life easier in some activities, it brings new problems in other activities.

The problems associated with the ethics of student thesis, essay and project writing are becoming more complicated. The question of when and how to use generative AI to create text is becoming increasingly relevant. Students can use AI tools, but sometimes they lose the ability to communicate, the capacity to make rational or logical decisions, the ability to learn in context, and the skill to learn foreign languages. They rely on mobile and web applications and the sentence: "Google knows everything" has changed to "ChatGPT tells everything". The main objective of the article comes from the KEGA project "ePortfolio as Pedagogy Facilitating Integrative Learning" and the goal of the project is to find out to what extent an e-portfolio will affect students' writing. The students create an e-portfolio and develop digital skills. Therefore, the idea of research is to explore the impact of generative AI on the creation of students' portfolios and whether it is possible to improve their language skills using chatbots.

We experimented with the students studying the English language on various levels. We obtained a set of students` assignments from two universities. The set contains 53 motivation letters (cover letters). Creating motivation letters is very easy for ChatGPT and other chatbots based on Large Language Models (Kasneci, 2023). Therefore, we try to find out whether the students were cheating or whether they used AI as a helpful tool only. Finally, we consider, whether it was possible to say they have completed the assignment successfully. The research started by selecting three AI detectors which are free and then we compare their results. The accuracy of AI detectors is presented in many web articles starting with Forbes ranking (Clark, 2023). Although these evaluations start with commercial software that has a free version, we decided to use none of them. The reason is given toward the end of the article. The main objective of the research is to compare the results from AI detectors, suggest some steps for detecting cheating, and encourage students to use the generative AI correctly and meaningfully.

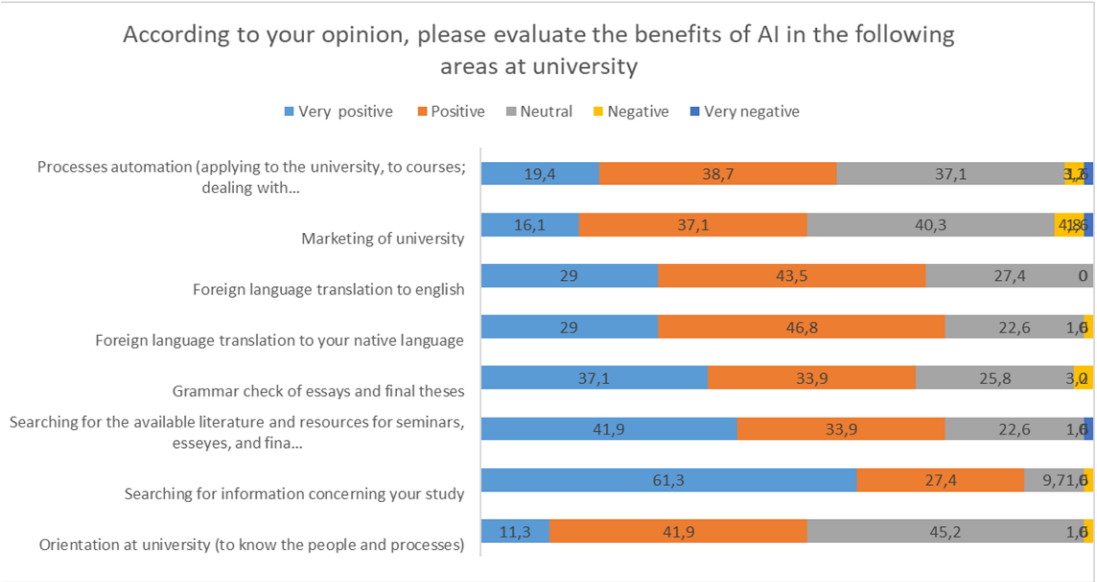
## 2 Perceiving AI in an academic environment

The Academic environment is excellent for testing new technologies and exploring whether young people understand the role of new technologies, not only in gaming, watching movies, social networks and leisure activities. Young people use AI technologies naturally and intensively, not considering what is behind them. Many times, students in the third year of their study at university do not have a clear idea about cybersecurity or ethical issues concerning AI. Therefore, we started the survey concerning using AI in the university environment in the academic year 2023/24. We continued with a more precise survey in the 2025. A new survey asked more questions and we asked students with higher granularity of possible answers. We distributed the questionnaire to more than 250 students at Bratislava University of Economics and Business (EUBA) and got back the answers from 43 respondents. The survey contains 32 questions but for our actual research, we used a selected part of the survey. These selected questions are focused on student learning and the benefits of AI.

The first section of the survey investigates whether AI has some benefits for students in practical issues (orientation at university, processes, etc.) and whether AI is helpful for learning (mainly writing essays, thesis, seminar works, etc.). The summary of the first section is in Fig. 1.

Fig. 1 shows that using generative AI such as ChatGPT or translators plays a key role in searching information (87,5%), searching resources (75,8%), checking grammar in written assignments (71%), and translation (more than 70%). Further, we asked students whether they knew some AI technologies. Surprising was that the Large Language Model or Natural Language processing is not very well-known despite the students use it often.

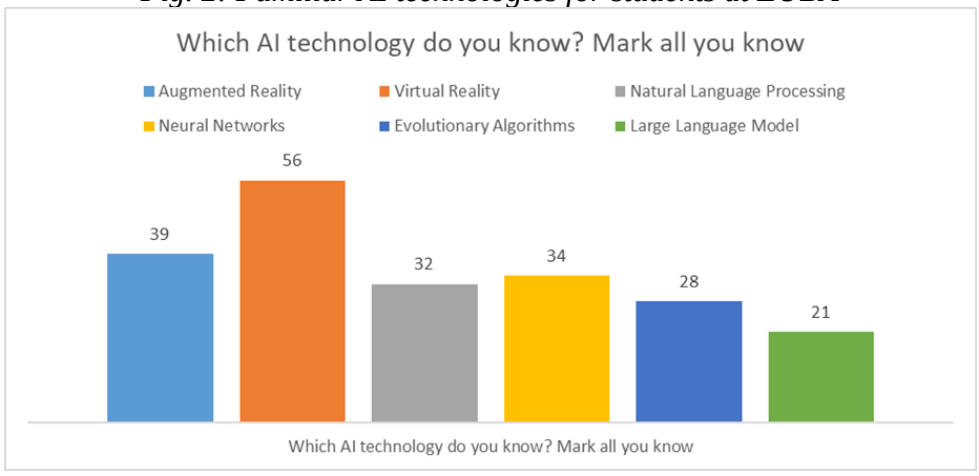
*Fig. 1: Summary of the first section of the survey at EUBA - benefits of AI in the university*




Source: Authors' own processing

Many students studied Information management, so we assumed they knew more about these technologies. Fig. 2 shows that virtual reality and augmented reality are popular. This result is thanks to playing computer games and using the cameras on mobile phones.

*Fig. 2: Familiar AI technologies for students at EUBA*

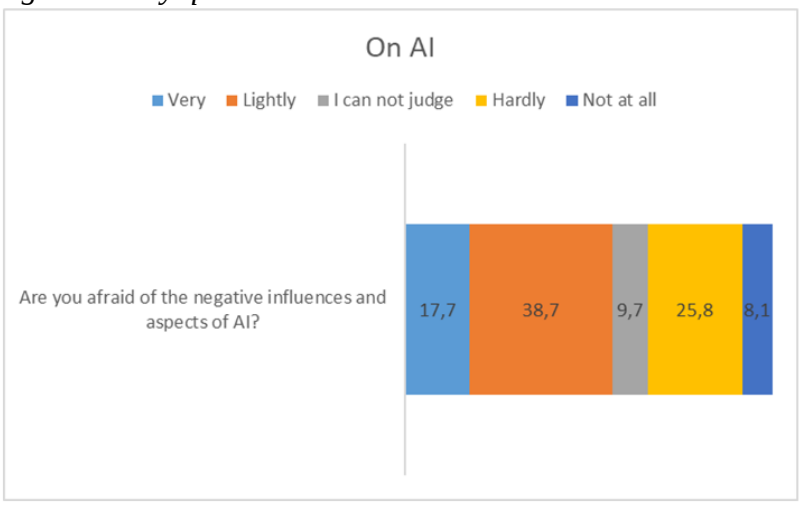



Source: Authors' own processing

The survey contained a special question regarding AI concerns or whether students fear the negative influences and aspects (Fig. 3). More than half of the students worry about AI's negative aspects. So, the discrepancy between perceptions of the benefits of AI and concerns about AI was the first stimulus to investigate whether students also practically respect AI ethics.

Considerable discrepancy in the perception of AI among students lead us to explore how intensive they use AI for writing assignments. We focus on the English lessons and some assignment in which is easy to use ChatGPT. Even though it is possible to use AI detectors for the Slovak language, detectors have a problem distinguishing Slovak grammar correctly.

*Fig. 3: Survey question – students` concerns about AI at EUBA*



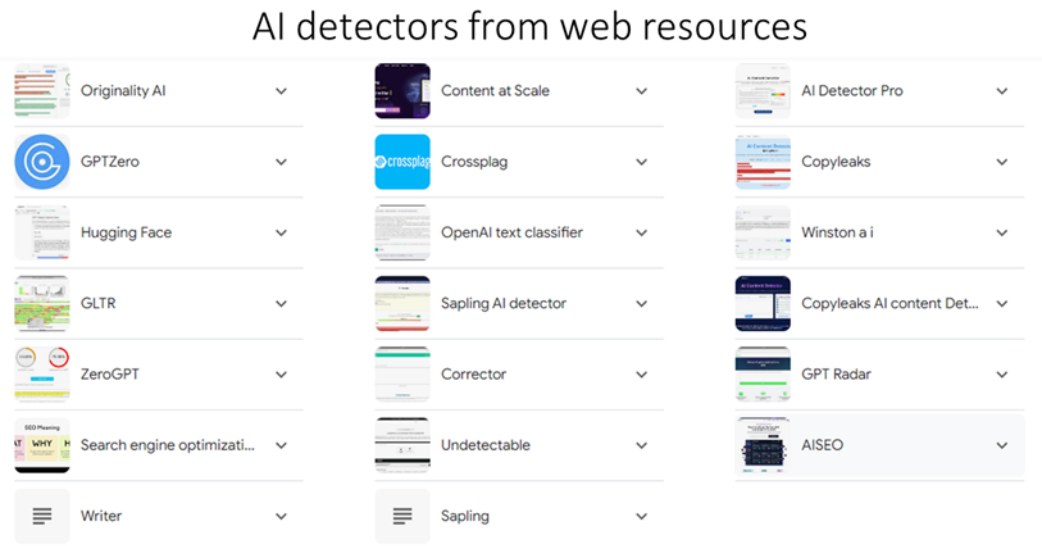

Source: Authors' own processing

## 3 AI detectors as useful tools in Learning

The history of generative AI started only around the 2020s. As (Toosi et al, 2022) writes it is "Thanks to the convergence of parallel processing, higher memory capacity, and more massive data collection (e.g., big data)" and "Computers are becoming faster. Computing power has continued to double nearly every two years (Moore's law)." Therefore, AI became very interesting for technology investors and the area of testing various technologies began to expand. LLMs such as ChatGPT 3 and then ChatGPT 4 or Bard, Gemini were trained on larger sets of human texts, therefore they began to have a better ability to predict the syntax of different sentences in the natural languages. AI detectors have evolved hand in hand with generative pre-trained AI and their self-learning models are getting more perfect. They use a large knowledge base consisting of human and AI-generated texts. It is difficult to say which AI detector is the best one. Fig. 4 shows the ranking of AI detectors from various web resources in 2024. The Google engine offered this summary to users after searching "AI detectors ranking" (Fig. 4).

The main feature of the AI detector is the accuracy. The principles of the AI detectors are based on machine-learning pre-trained algorithms, and statistical methods, and work with probability. The probability is the factor that makes it impossible to say that any AI detector evaluates text with 100% accuracy. Two main principles applied in AI detectors are important: perplexity and burstiness. Characteristics of these principles are well-described in (Leechuy, 2023): "Perplexity: The unpredictability of the content. AI-generated text tends to have low perplexity, while human writing has higher perplexity. Burstiness: Variation in the length and structure of the sentences. AI content tends to be more steady and have lower burstiness than human writing." Author Leechuy lists multiple features typical of AI-generated text (repetition of the words, repetitive syntax of sentence, unnatural words, generic or impersonal tone, inconsistent verb tense, etc.). Although AI detectors are strong tools, they might fail still in some cases. (Leechuy, 2023).

*Fig. 4: AI detectors from web resources*




Source: Google 2024

We started our research with a list of AI detectors and their ranking evaluation on various websites. It seemed that AI detectors, which are free of charge, met the requirements best for our research. No regular payment and accuracy over 60% were sufficient, therefore we used the ranking from (Driessen, 2024) "Best AI Detector | Free & Premium Tools Compared". The two best-ranking and free versions were with the 78% accuracy Quillbot (Quillbot, n.d.) and Scribbr (Scribbr, n.d.) and ZeroGPT (ZeroGPT, 2025) with 64% accuracy (Table 1). We tested a few free versions of paid software, but although their paid versions are high-ranking, none recognized AI-generated text correctly (AI-generated covering letter). Or the user interface was not as intuitive as for our chosen detectors.

As previously mentioned the student assignments are included in the project "ePortfolio as Pedagogy Facilitating Integrative Learning". We tried to choose an assignment that could be completed at different English language levels and AI could easily generate that.

*Tab. 1: Comparing the chosen AI detectors*

| | Accuracy | False positive | free | Star ranking |
|---|---|---|---|---|
| Quillbot | 78% | 0 | yes | 3,9 * |
| Scribbr (free) | 78% | 0 | yes | 3,9 * |
| ZeroGPT | 64% | 1 | yes | 3,1 * |

Source: Authors' own processing

The project referred to above is implemented in two universities: Trnava University in Trnava and the Bratislava University of Economics and Business (EUBA). We selected students from both universities. Thirty-three students of Trnava University in Trnava study the English language in the 3rd year of their first degree (Bachelor`s degree). Their study programs are:

- Teacher Training of the English Language and Literature in the study field: Teacher Training and Educational Sciences
- English Language and Anglophone Cultures, study field: Philology

Students from the EUBA study at the Faculty of Economic Informatics, the 1st degree of study. The assumption was that English language students would not cheat and would use AI-generated text as little as possible. On the other hand, we supposed that students of EUBA

would use more because they know better the various software. The assignment for both groups asked students to write a cover letter for a job position.

*Tab. 2: Results of AI detectors for Trnava University in Trnava*

| ***Student ID*** | | ***1*** | ***2*** | ***3*** | ***4*** | ***5*** | ***6*** | ***7*** | ***8*** | ***9*** | ***10*** | ***11*** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **QuilltBot** | %AI generated | 43 | 79 | 19 | 65 | 0 | 100 | 100 | 76 | 0 | 29 | 22 |
| **Scribbr** | %AI generated | 100 | 48 | 23 | 24 | 6 | 100 | 100 | 1 | 13 | 25 | 1 |
| **ZeroGPT** | %AI generated | 13 | 72 | 14 | 23 | 0 | 100 | 87 | 8 | 32 | 37 | 32 |
| | **Trnava University in Trnava group** | | | | | | | | | | | |
| ***Student ID*** | | ***12*** | ***13*** | ***14*** | ***15*** | ***16*** | ***17*** | ***18*** | ***19*** | ***20*** | ***21*** | ***22*** |
| **QuilltBot** | %AI generated | 80 | 15 | 26 | 25 | 25 | 24 | 0 | 78 | 22 | 28 | 36 |
| **Scribbr** | %AI generated | 25 | 2 | 19 | 25 | 0 | 0 | 5 | 76 | 21 | 16 | 16 |
| **ZeroGPT** | %AI generated | 20 | 21 | 22 | 49 | 59 | 0 | 0 | 54 | 16 | 48 | 35 |
| | **Trnava University in Trnava group** | | | | | | | | | | | |
| ***Student ID*** | | ***23*** | ***24*** | ***25*** | ***26*** | ***27*** | ***28*** | ***29*** | ***30*** | ***31*** | ***32*** | ***33*** |
| **QuilltBot** | %AI generated | 68 | 0 | 0 | 22 | 100 | 44 | 69 | 100 | 23 | 0 | 100 |
| **Scribbr** | %AI generated | 100 | 7 | 0 | 25 | 100 | 24 | 100 | 88 | 15 | 0 | 100 |
| **ZeroGPT** | %AI generated | 98 | 9 | 3 | 31 | 100 | 88 | 33 | 45 | 0 | 38 | 100 |

Source: Authors' own processing

People often use an AI generator to write cover letters. It is more comfortable and the AI generator helps people formulate better ideas without grammar mistakes. Table 2 shows the results of 33 students` cover letters studying the English language at Trnava University. Table 3 shows the results of 21 students` cover letters studying Economic Informatics at the EUBA.

*Tab. 3: Results of AI detectors for EUBA*

| ***Student ID*** | | ***1*** | ***2*** | ***3*** | ***4*** | ***5*** | ***6*** | ***7*** | ***8*** | ***9*** | ***10*** | ***11*** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **QuilltBot** | %AI generated | 30 | 52 | 100 | 66 | 0 | 100 | 100 | 100 | 100 | 52 | 31 |
| **Scribbr** | %AI generated | 34 | 60 | 100 | 100 | 0 | 100 | 100 | 100 | 100 | 60 | 37 |
| **ZeroGPT** | %AI generated | 13 | 77 | 95 | 84 | 0 | 99 | 100 | 100 | 100 | 9 | 0 |
| | **Bratislava University of Economics and Business** | | | | | | | | | | | |
| ***Student ID*** | | ***12*** | ***13*** | ***14*** | ***15*** | ***16*** | ***17*** | ***18*** | ***19*** | ***20*** | ***21*** | |
| **QuilltBot** | %AI generated | 100 | 0 | 0 | 0 | 62 | 30 | 68 | 56 | 78 | 0 | |
| **Scribbr** | %AI generated | 100 | 26 | 6 | 34 | 1 | 32 | 100 | 22 | 81 | 18 | |
| **ZeroGPT** | %AI generated | 29 | 25 | 6 | 16 | 0 | 16 | 100 | 0 | 65 | 0 | |

Source: Authors' own processing

### 3.1 Summary of the experiment

We had two statements before the experiment. First, the students studying the English language and Literature as their main subject, are not cheating. They use AI-generated text on a minimal level.

The results showed that four students (cca 12%) submitted fully AI-generated text; eight (cca 24%) students had a very high percentage of AI text at least from one AI detector (over

75%); it seems that other students used AI text generators less or more in a rational way (e.g., for finding some phrases, better words, grammar syntax, etc.)

The second statement was that the students of Economic Informatics use the AI-generated text often. This statement has been confirmed. Seven students` texts are detected as AI-generated (one-third of the number). One letter of cover was completely human-written (all three detectors evaluate text as 0% AI-generated).

The objective of the experiment was to explore whether it is possible to say that using an AI detector is reliable and useful for teachers. An important observation in research was also the quality of the student's text. How many and which type of grammar mistakes are within the text? It is a very tricky issue; therefore, we used the software Grammarly and did not count the number of mistakes exactly. The advantage of Grammarly is that mistakes in the text are sorted by colour. We used heuristics and visually compared the length of text (the number of words or characters visible in the AI detectors) with the number of mistakes. So, we had categories: no mistakes; number of mistakes from 1 to 5; a few mistakes; many; too many mistakes; and mistakes only in the sentence structure.

The experiment verifies that the AI-generated text usually contains a few syntax errors (incorrect sentence structure). It has never been with zero mistakes in sentence structure. The text marked as human-written with a low percentage usually contained many mistakes (students of EUBA) or the one (totally 0% evaluated) contained only 5 mistakes.

Comparing the three chosen AI detectors, we can say that they gave us more or less similar results in most cases. In certain instances, the results were unexpected and confusing, e.g., 1st case: Quillbot detection was 76%, Scribbr 1%, ZeroGPT 8%; 2nd case: Quillbot 62%, Scribbr 1%, ZeroGPT 0%. These discrepancies depend on the algorithms used in the detector and the user's language level. The mix of sentence structure (e.g., Slovak vs. English sentence structure) and incorrect grammar syntax influenced the reliability of AI detectors. It is not easy to say which of the AI detectors is better or the best, but for experienced teachers, it is valuable to check the students' assignments with AI detectors. Especially, when there are similarities in the set of assignments (two cover letters started with the same sentences); the letter has no mistakes; the letter has only a few syntactic errors, etc. When the teachers have large student groups it is impossible to work individually with the students, to compare speaking abilities with written text (EUBA). The rules of many universities require using the anti-plagiarism system for all assignments. Practically, it is impossible because the topics of assignments are repetitive every year (maybe every second year). Therefore, using AI detectors as supporting tools for student assessment is better and can have several benefits:

- a more fairly assessment of students,
- greater student motivation to handle the assignments independently,
- saving the teacher`s time,
- a change in the routinely done assessment by scoring only,

and maybe more. Although, it is not possible to judge completely the quality of AI detectors, the result of our investigation is that students need to be taught how to use generative AI properly. It seems that 25 to 40% of text in assignments is useful and can help the students improve their language skills (e.g., the student the student uses prepositions incorrectly).

## 4 Conclusion

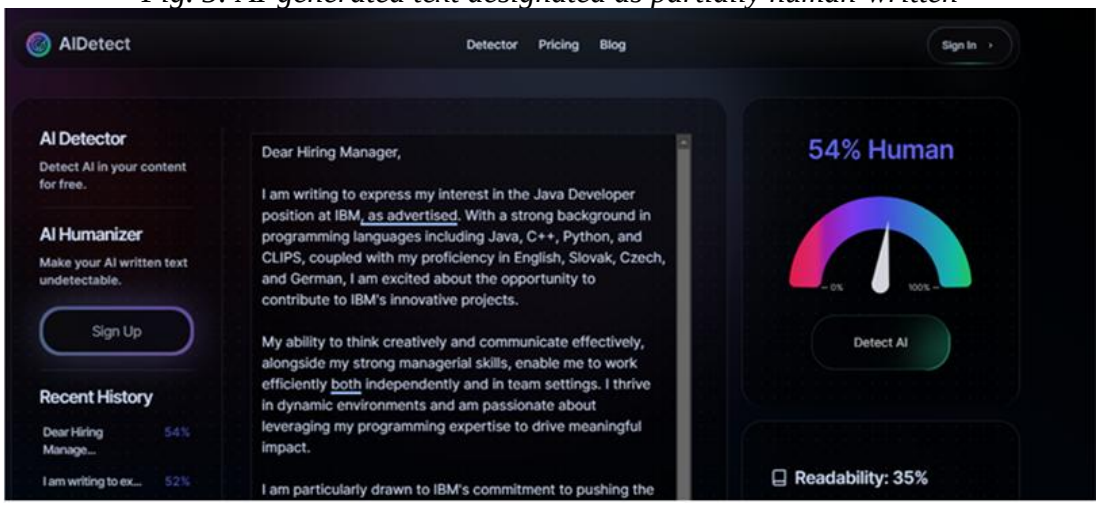
The software tools of generative AI are very powerful, but we cannot rely on them. Their Large Linguistic Models strictly work by using syntax and grammar rules and do not follow the emotional aspects of language. A good example of LLMs is the software Grammarly, controlling grammar errors. Grammarly works with a large amount of data from a text corpus and has a self-learning cycle that follows the users' behaviour; therefore, the model changes in

every cycle and accordingly changes the result. (Grammarly, 2019) That is the reason why the software is changing from the point of view of the user's observation. LLMs include the key principle of Machine learning. The model develops itself. (Aßenmacher, 2020)

AI detectors use similar principles but focus more on statistics and probability. They follow the complexity of sentences, sentence structure, repetitive words, matter-of-fact writing, formal writing, etc. Based on these attributes, the AI detector guesses whether the text is AI-generated or not (Leechuy, 2023). AI detector's reliability is expressed by false positivity (human-written text is detected as AI-generated), and the ranking usually also shows false positivity.

On the other hand, an AI detector can evaluate the AI-generated text that is partially or totally human-written (Figure 5). We also tested false positivity in the process of choosing suitable AI detectors. Our experiment was only the first step in investigating. We plan to explore more student assignments with other content (essays, students' seminar theses from cyber-security, IT, programming, etc.) or in the Slovak language. However, using the AI generative software seems to be easy, we can see in real life many mistakes (maybe hoaxes) produced by using them. Many various software robots operate in the web space and search for something interesting, new, short and bombastic for readers. These bots are products of generative AI, and the common user is not able to notice that the author of the text is not a human.

*Fig. 5: AI-generated text designated as partially human-written*




Source: (AIdetect, 2024)

The students use webpages for writing seminars, research papers, essays, theses, and so on. They often use the web pages created by robots such as resources for their work without verifying the facts. As our research shows, students of Informatics rely more on AI tools without considering the consequences. This situation is contradictory to the result of the survey question "Are you afraid of using AI?" Many students "are afraid," but they do not understand that AI depends on humans. A human is the core of AI wisdom. AI is based on well and correctly done algorithms and proper usage, and can learn from people. Whatever we put into the AI system starts inference and copies our ideas. That is why it is necessary to start talking and teaching more students what artificial intelligence actually is and how to deal with it.

**Resources**


1. AIdetect, (2024). Detect AI, Anywhere. https://www.aidetect.com [Accessed 05 May 2025]
2. Assenmacher, M. et al., (2020, September 8). Modern approaches in Natural Language Processing. Modern Approaches in Natural Language Processing. https://slds-lmu.github.io/seminar_nlp_ss20/ [Accessed 05 March 2025]
3. Clark, E., (2023) The 10 Greatest AI Content Detector Tools. https://www.forbes.com/sites/technology/article/best-ai-content-detector-tools/?sh=17a1ff625d5e [Accessed 25 May 2024]
4. Driessen, K., (2024, November 18). Best AI Detector | Free & Premium Tools Compared. https://www.scribbr.com/ai-tools/best-ai-detector/ [Accessed 25 Januar 2025]
5. Google. 2024. Searching: AI detectors ranking. [online] Available at <https://www.google.com/ > [Accessed 25 May 2025]
6. Grammarly. (2019, May 17). How We Use AI to Enhance Your Writing | Grammarly Spotlight. https://www.grammarly.com/blog/how-grammarly-uses-ai/ [Accessed 25 May 2025]
7. Hurwitz, J., Kaufman, M., & Bowles, A. (2015). Cognitive computing and big data analytics. John Wiley & Sons.
8. Leechuy, J., (2024, March 14). How Reliable Are AI Detectors? Claims vs. Reality. https://www.theblogsmith.com/blog/how-reliable-are-ai-detectors/ [Accessed 25 May 2025]
9. Kasneci, E., et al., (2023). Chatgpt for good? On opportunities and challenges of large language models for Education. Learning and Individual Differences, 103, 102274. https://doi.org/10.1016/j.lindif.2023.102274 [Accessed 2 May 2025]
10. Muggleton, S. (2014, February 1). Alan Turing and the development of Artificial Intelligence. AI Communications, 27(1), 3–10. https://doi.org/10.3233/aic-130579 [Accessed 2 November 2025]
11. QuillBot, a Learneo, Inc. business (n.d.). Unlock your potential with QuillBot's creative suite. https://quillbot.com/ [Accessed 25 November 2025]
12. Scribbr. (n.d.). Your path to academic success, https://www.scribbr.com [Accessed 25 November 2025]
13. Toosi, A., Bottino, A. G., Saboury, B., Siegel, E., & Rahmim, A. (2021). A brief history of AI: How to prevent another winter (a critical review). PET Clinics, 16(4), 449–469. https://doi.org/10.1016/j.cpet.2021.07.001 [Accessed 25 May 2025]
14. ZeroGPT. (2025). Trusted GPT-5, ChatGPT and AI Detector tool by ZeroGPT, https://www.zerogpt.com/ [Accessed 25 November 2025]

# Pokusy o prienik do online Linux systémov

# Attempts to penetrate online Linux systems

Pavol Sojka[1]

**Abstrakt**
V prvej a druhej časti nášho článku popisujeme niekoľko typov útokov, ktoré v súčasnosti ovplyvňujú bezpečnosť dát. Zameriavame sa na slovníkové útoky a útoky hrubou silou v teórii a praxi. Následne sme vybrali službu (Secure shell server), ktorá je vystavená do internetu a je známa ako nástroj pre systémových administrátorov na spravovanie a údržbu operačných systémov. Tretia kapitola popisuje metodiku, ktorú sme použili v našom výskume. Štvrtá kapitola sa zameriava na výsledky, ktoré sme získali pomocou rôznych techník, a nakoniec na protiopatrenia, ktoré sme aplikovali. Vyfiltrovali sme krajiny, z ktorých boli útoky vedené, a nakoniec sme ukázali stručný graf nákladov vynaložených na bezpečnostné opatrenia a odhadovaných budúcich nákladov.

**Kľúčové slová**
bezpečnosť, zraniteľnosť, online systémy, protiopatrenia

**Abstract**
In the first and second parts of our article, we describe several types of attacks that currently affect data security. We focus on dictionary attacks and brute force attacks in theory and practice. We then selected a service (Secure shell server), which is exposed to the Internet and is known as a tool for system administrators to manage and maintain operating systems. The third chapter describes the methodology we used in our research. The fourth chapter focuses on the results we obtained using different techniques and finally on the countermeasures we applied. We filtered out the countries from which the attacks were conducted and finally we showed a brief graph of the costs spent on security measures and estimated future costs.

**Key words**
security, vulnerability, online systems, countermeasures

**JEL classification**
M15

## 1 Úvod

V posledných rokoch sme svedkami rýchleho zavádzania nových technológií a modernizácie existujúcich. Každé zariadenie a služba, ktorú vlastníme, generuje určité množstvo údajov. Tieto údaje sa stávajú cennejšími ako predtým kvôli neustálemu prechodu z papierových médií na digitálne médiá v štátnej správe, podnikovej sfére a podobne. Údaje sú cenné pre čierny trh pri obchodovaní, špionáži, vydieraní a iných nelegálnych aktivitách. Štátna správa, ale aj súkromné spoločnosti investujú viac prostriedkov do posilnenia bezpečnosti svojich systémov a bezpečnostného povedomia zamestnancov. Tieto položky v rozpočtoch neustále rastú, preto je potrebné zdôrazniť najslabšie miesta v infraštruktúre. Tieto miesta by mali byť identifikované individuálne podľa potrieb spoločnosti a podľa služieb, ktoré

[1] Ekonomická univerzita v Bratislave, Fakulta hospodárskej informatiky, Katedra aplikovanej informatiky, Dolnozemská cesta 1/b, 852 35 Bratislava, pavol.sojka@euba.sk.

poskytujú. Náš článok sa zameriava na jednu z najčastejšie napádaných služieb, ktorú mnohé spoločnosti využívajú na správu svojich informačných systémov.

## 2 Informačná bezpečnosť

V súčasnosti existujú mnohé hrozby pre IT infraštruktúru. Toto správanie prináša zvýšené náklady kvôli opatreniam prijatým pred poškodením údajov alebo nákladom spôsobeným po ňom. Ekonomické škody môže utrpieť akúkoľvek spoločnosť. Podľa časopisu Cybercrime (Morgan, 2019) sa celosvetové výdavky zvýšili z 3,5 miliardy amerických dolárov v roku 2014 na 120 miliárd USD v roku 2017, čo je takmer 35-násobok za 13 rokov. Tieto zahŕňajú trh kybernetickej bezpečnosti ako celok – hardvérové aj softvérové opatrenia. Informačná bezpečnosť je podmnožinou celkového trhu kybernetickej bezpečnosti a jej vlastné náklady dosiahli v roku 2018 114 miliárd USD a predpokladané náklady sú približne 170 miliárd USD. Vyššie uvedené náklady sú len tie, ktoré sa vynakladajú na preventívne opatrenia. Škody spôsobené útokmi sú oveľa vyššie, predpoveď na rok 2026 je takmer 1,2 bilióna USD (Duarte, 2026). Spoločnosti musia investovať do svojej infraštruktúry, ako je špecializovaný hardvér, ktorý by mohol zabrániť narušeniu systémov spoločnosti, zálohovacie systémy a podobne. Po druhé, spoločnosti musia znášať vyššie náklady na bezpečnostné kurzy a školenia zamestnancov, aby si zvýšili svoje skutočné znalosti v oblasti bezpečnosti. Cieľom našej práce bolo zistiť, analyzovať a prijať protiopatrenia na zabránenie akýmkoľvek zisteným škodlivým aktivitám, a tým znížiť riziko straty údajov a s tým spojených zvýšených nákladov.

### 2.1 Typy útokov a spôsoby narušenia systémov

V praxi existuje niekoľko typov útokov, medzi ktoré patrí phishingový útok, ktorého cieľom je presvedčiť obeť, aby vykonala nejakú akciu, ktorú útočník potrebuje na úspešné preniknutie do systému. Takáto nevedomá spolupráca spočíva napríklad v oklamaní obete, aby spustila prílohu z e-mailu, napríklad falošnú fakturáciu od operátora, keď po spustení obsahu zip archívu boli v počítači zašifrované súbory s najznámejšími príponami a útočník požadoval výkupné za dešifrovanie súborov. Ďalším typom útoku je červ, ktorý prehľadáva napríklad domáce a firemné siete a vyhľadáva zraniteľné služby, ako sú služby zdieľania súborov a podobne. Ďalším typom útoku je útok prostredníctvom verejných Wi-Fi sietí, kde sa útočník môže pokúsiť zachytiť nešifrovanú komunikáciu iných používateľov. Ďalšou populárnou technikou je, keď sú USB kľúče voľne ponechané na rôznych verejných miestach a po vložení do počítača sa môžu pokúsiť ho infikovať a následne zachytiť aktivity používateľa, ako sú stlačenia klávesov, nahrávať obsah obrazovky, zapnúť kameru alebo mikrofón, aby sledovali aktivitu v okolí počítača.

V našom článku sa zameriame iba na sieťové útoky, ktoré sú zamerané na prienik pomocou nástrojov na skenovanie portov a následné testovanie známych mien a hesiel – útoky založené na slovníkoch alebo útoky hrubou silou.

### 2.2 Infraštruktúra

Naša infraštruktúra, na ktorej sme aktívne monitorovali pokusy o prienik, zahŕňala niekoľko typov serverov, na ktorých boli nainštalované linuxové distribúcie, a to server Ubuntu Linux a server Red Hat Enterprise Linux. Obidva servery slúžia na testovacie účely a majú nakonfigurované iba tie služby a porty, ktoré sú pre danú službu potrebné. Servery sú pravidelne aktualizované, aby bežali na najnovších verziách knižníc. Okrem známych chýb v operačných systémoch a iných softvérových produktoch existujú aj tzv. zero-day zraniteľnosti, kde výrobca softvéru ešte neaktualizoval dotknuté knižnice. Tento typ chýb je pravdepodobne najnebezpečnejší a neexistuje proti nim žiadna účinná ochrana.

Na našej infraštruktúre momentálne beží služba *ssh* (secure shell), ktorá je nevyhnutná pre vzdialenú správu serverov založených na systéme Linux. Okrem toho je webový server Apache (alebo iná alternatíva) nevyhnutný pre spúšťanie webových aplikácií. Webový server Apache nie je jediný produkt, ktorý umožňuje spúšťanie webových aplikácií, ale je jedným z najpoužívanejších. Okrem toho máme v našom prostredí spustený databázový server MySQL. Databázové servery môžu bežať úplne izolovane od internetového prostredia, ale sú nepriamo zraniteľné prostredníctvom tzv. sql-injection útokov, ktoré môže útočník vykonať prostredníctvom aplikácie bežiacej na webovom serveri Apache počas komunikácie s databázovým serverom.

### 2.3 Secure Shell

Secure Shell (SSH) je kryptografický sieťový protokol na bezpečné pripojenie do vlastnej siete cez nezabezpečené siete, ako je napríklad internet. Medzi typické aplikácie patrí vzdialené prihlásenie cez príkazový riadok a vzdialené vykonávanie príkazov, ale pomocou SSH je možné zabezpečiť akúkoľvek sieťovú službu.

SSH používa kryptografiu s verejným kľúčom na overenie vzdialeného počítača a umožňuje mu overiť používateľa, ak je to potrebné. Existuje niekoľko spôsobov použitia SSH, jedným z nich je použitie automaticky generovaných párov verejného a súkromného kľúča na vytvorenie šifrovaného sieťového pripojenia a následné prihlásenie pomocou overenia heslom alebo certifikátom.

## 3 Metodika

Na základe prehľadu literatúry sme vybrali niektoré typy útokov, ktoré sa vyskytli najmä na našich operačných systémoch. Analyzovali sme aj škodlivé správanie zaznamenané v systémových protokoloch (logoch). Podľa Pana (Pan et al., 2019) môžu mať útoky výrazne odlišné charakteristiky. Rôzne typy webových útokov, ako napríklad SQL injection, cross-site scripting, zraniteľnosti typu vzdialené spustenie kódu a zahrnutie súborov, používajú rôzne formy útočného vektora a zneužívajú rôzne zraniteľnosti vo webových aplikáciách. Tieto útoky preto často vykazujú úplne odlišné charakteristiky. Napríklad SQL injection sa zameriava na databázy, zatiaľ čo vzdialené spustenie kódu sa zameriava na súborové systémy. Naše úsilie bolo zamerané na predchádzanie útokom primárne na službu *ssh*, pretože sme použili hĺbkovú kontrolu log súborov pred výberom služby, ktorá je najviac zaplavená pokusmi o prienik do systému.

Metodika, ktorú sme v našom modeli použili, bola nasledovná:

1) Manuálna kontrola vybraných log súborov na dennej báze. Log súbory, ktoré sme monitorovali, boli *zabezpečený* log súbor, ktorý sa nachádza v adresári */var/log a access_log* v adresári */var/log/httpd (apache)*. Podľa Pompona a Heatha (Pompon, 2020) patria autentifikačné útoky medzi desať najčastejších útokov na poskytovateľov online služieb. Naše monitorovanie potvrdzuje tento predpoklad a zamerali sme sa na monitorovanie už spomínaného *secure* log súboru;
2) V *secure* log súbore sme použili špecifické techniky na detekciu pokusov s neúspešným prihlásením. Techniky sú podrobnejšie vysvetlené v časti „Výsledky“ v tomto dokumente;
3) Po identifikácii škodlivých IP adries sme prijali protiopatrenia na ich zablokovanie (popísané v časti „Výsledky“);
4) Neskôr sme monitorovali ďalšie neúspešné pokusy o prihlásenie a zároveň sme sledovali, či sa zakázané IP adresy stále pokúšali pripojiť k našim systémom;

5) Pomocou nástroja *whois* sme zistili krajinu pôvodu IP adries;
6) Štatistiky boli vypočítané za obdobie od 10. do 25. marca 2026 (tab. 1).

Pre náš vlastný výskum je potrebné mať server bežiaci na verejnej sieti – internete a povolené protokolovanie udalostí pre konkrétnu službu. Musíme vedieť, ako používať dostupné nástroje tretích strán na analýzu záznamov protokolov alebo ako používať vstavané nástroje operačného systému. Na analýzu sme použili vstavané nástroje operačného systému, pretože sú prítomné v každej inštalácii Linuxu, a preto sú okamžite dostupné.

Systém analýzy protokolov pre použitie v našej práci bol nastavený ako postupnosť krokov, kedy poskytujeme aktuálne aj archivované záznamy z protokolov (Hussain, 2013) na účely spracovania. Ako druhý krok sme pripravili skript, ktorý vykonal analýzu protokolov, výsledkom čoho bola extrakcia údajov, ktoré obsahovali iba neúspešné pokusy o prihlásenie. Keďže protokoly obsahujú stovky až tisíce záznamov o legálnych aj nelegálnych pokusoch o prihlásenie, filtrovanie relevantných údajov bolo nevyhnutným krokom. Keďže novozískané údaje sú tiež vo veľkom množstve – v závislosti od veľkosti protokolových súborov, to môžu byť tisíce riadkov v podľa zvoleného časového rozpätia – je potrebné vykonať dodatočné filtrovanie podľa IP adresy (Schmidt, 2017), kde získame početnosť IP adries, z ktorých boli vykonané pokusy o prienik. Následná analýza určí prvých päť najpočetnejších útokov a z ktorých krajín, respektíve sietí pochádzali. Na určenie poskytovateľa internetových služieb útočiacej IP adresy použijeme nástroj na kontrolu IP adries s názvom *whois* v spojení s nástrojom *nslookup*. Oba nástroje budeme používať podľa potreby, pričom *whois* bude používaný najviac. Po hlavnej analýze vieme určiť, ktoré adresy sú najviac zapojené do aktuálnych pokusov o infiltráciu našej siete, a môžeme správcom siete poskytnúť odporúčania na aktívne opatrenia. Tento nástroj je možné použiť opakovane bez obmedzení, a preto môže poskytovať odporúčania kedykoľvek, ale pre zníženie zaťaženia aktuálneho servera sa odporúča vykonávať analýzu raz denne, alebo vykonávať analýzu offline, teda podľa potreby na inom určenom serveri.

Nástroj v súčasnej fáze vývoja je navrhnutý tak, aby vyhľadával podozrivé IP adresy, z ktorých sa vykonáva vopred definovaný počet pokusov o prienik a po analýze zobrazoval IP adresu správcovi systému. V budúcnosti autor plánuje rozšíriť nástroj aj o aktívne opatrenia vo forme priameho zápisu škodlivých IP adries do súboru /etc/hosts.deny (Bandel, 2000), kde blokujeme možnosť pripojenia k serveru a v našom prípade pôjde o *ssh* službu, ktorá bola spomenutá vo vyššie uvedenom texte.

## 4 Výsledky

Ako už bolo spomenuté, operačný systém, na ktorom budeme analyzovať protokoly, je Ubuntu Linux verzie 22.04 odvodený od Debian Linuxu a Red Hat Enterprise Linux 8.10, ktorý sám o sebe a jeho deriváty patria medzi najpoužívanejšie operačné systémy v podnikovej oblasti (The Red Hat Enterprise Linux Team, 2018). V tejto verzii Linuxu hľadáme záznamy protokolu v ceste /var/log/ a vyhodnotíme protokoly pokusov o prienik prostredníctvom protokolu *ssh* bežiaceho na porte 22 a názov súboru protokolu je *secure*, úplná cesta k súboru protokolu bude /var/log/secure. V iných operačných systémoch Linux sa používa tiež umiestnenie /var/log/, ale názov súboru protokolu sa môže líšiť a môže sa líšiť aj vnútorná štruktúra týchto súborov protokolu. Napríklad v Ubuntu Linux sa záznamy *ssh* ukladajú do súborov s názvom *auth.log*. Analyzovali sme záznamy od 10. do 25. marca 2026.

Keďže potrebujeme nájsť pokusy o prienik, použijeme nástroje operačného systému, aby sme zistili, či existujú neplatné pokusy o prihlásenie, a spočítame ich počet pomocou iného nástroja operačného systému (nástroj *wc*, ktorý bude spomenutý neskôr). Ako je uvedené v texte vyššie, budeme musieť nastaviť prahovú hodnotu predstavovanú počtom neplatných pokusov o prihlásenie. Pre naše účely zvolíme hodnotu 5 pokusov, pokiaľ sa hodnota neukáže

ako dostačujúca (napríklad legitímny používateľ zabudne heslo a otestuje viaceré svoje heslá na prihlásenie), tak túto prahovú hodnotu upravíme. Na nájdenie neplatných pokusov o prihlásenie použijeme kombináciu príkazov Linuxu v rámci *bash* (Michael, 2011): *cat /var/log/secure | grep - i failed*. Táto kombinácia príkazov zobrazí (cat) obsah súboru a potom vykoná príkaz *grep -i* po príkaze *cat* , ktorý hľadá výskyt slova *failed*. Prepínač *-i* zabezpečuje, že slovo *failed* môže mať aj tvar *Failed*, keďže Linux rozlišuje v príkazoch veľké a malé písmená a aj vo vyhľadávaní. Táto vlastnosť sa všeobecne označuje ako rozlišovanie veľkých a malých písmen (Bresnahan, 2015). V malej ukážke si ukážeme výsledok tejto operácie:

Mar 24 20:41:03 ubuntu-2204-linux sshd[99967]: Failed password for invalid user paula from 220.119.37.141 port 52762 ssh2

Ako je znázornené na vyššie uvedenom príklade, útočník sa pokúsil pripojiť k *ssh* z kórejskej IP adresy 220.119.37.141 s neexistujúcim používateľom *paula*.

V ďalšom príklade vypočítame počet pokusov o prienik pomocou kombinácie príkazov: *cat /var/log/secure | grep -i failed| wc -l* . Táto kombinácia príkazov už nezobrazuje obsah súboru *secure* na obrazovke, ale priamo počíta výskyt riadkov so slovom *failed* v pamäti počítača a na konci operácie uvádza iba počet záznamov. Príkaz *wc* znamená „word count/počet slov“ a prepínač -l spočíta počet riadkov.

### 4.1 Zablokovanie IP adries útočníkov

Blokovanie adries, ktoré sa pokúšajú pripojiť k nášmu serveru cez *ssh*, je možné vykonať niekoľkými spôsobmi. Pokiaľ ide o podnikovú infraštruktúru, najjednoduchším riešením je požiadať správcu siete o aktiváciu pravidla blokovania na centrálnom firewalle, čo je zariadenie na zabezpečenie bezpečnosti sieťovej prevádzky. Tento prístup je najpoužívanejší, ale pre náš prístup má jednu nevýhodu, ktorou je neustála potreba kontaktovať správcu siete, aby zablokoval alebo odblokoval konkrétnu adresu, ak si to situácia vyžaduje. Ďalšou možnosťou je použiť firewall na našom vlastnom serveri na blokovanie IP adresy. Túto službu poskytuje napríklad utilita *firewall-cmd* (Ellingwood, 2015) alebo aplikácia *ufw* (Krout, 2019). Konfigurácia týchto utilít však vyžaduje určité skúsenosti so správou siete, ako aj znalosť sieťových protokolov, napríklad ktorá služba používa ktorý port (Russel, 2012) a podobne.

Preto použijeme systémovú službu, ktorá nám umožňuje blokovať jednotlivé IP adresy na základe zvolenej služby. Definujeme teda, ktorá služba je blokovaná pre konkrétnu IP adresu, ale ostatné služby nie sú pokryté, ak toto nastavenie nezmeníme. Stručne povedané, ak zablokujeme IP adresu v prístupe k našej *ssh* službe, potom služba *www*, teda služba webového servera, blokovanie neuplatní. Je to preto, že prístup k správe servera (prostredníctvom *ssh*) vykonáva väčšinou niekoľko málo ľudí, ale k webovej prezentácii pristupuje prakticky ktokoľvek z celého sveta, pretože webová prezentácia je určená na verejný prístup. Operačný systém Linux používa na riadenie prístupu k svojim službám dvojicu súborov, a to */etc/hosts.allow* a */etc/hosts.deny*. Súbor *hosts.allow* umožňuje prístup k službe adresám, ktoré sú explicitne definované, pričom je aplikovaný úplný zákaz prístupu a *hosts.deny* má opačný účinok, že všetky IP adresy majú povolený prístup k našej službe okrem tých, ktoré sú definované v tomto súbore. Pre naše účely sme zvolili spôsob, že všetky IP adresy majú prístup k službám nášho servera – v našom prípade k službe *ssh* – okrem tých, ktoré sú explicitne definované v súbore */etc/hosts.deny*. Adresy v tomto súbore majú byť „potrestané“ zákazom prístupu, pretože ich správanie na našom serveri sa vyhodnocuje ako pokus o prienik a nie ako štandardná komunikácia.

Ďalšou výhodou tohto riešenia je, že môžeme deaktivovať celé rozsahy IP adries (Schmidt, 2017), nielen jednu konkrétnu IP adresu. Z našich skúseností vieme, že útočníci používajú tisíce IP adries, takže nie je na škodu zablokovať celý rozsah, najmä ak vieme, že ide o lokality mimo Slovenska. Po vykonaní a uložení záznamu do tohto súboru sa aktivuje blokovanie danej adresy. Adresa je trvalo zablokovaná, kým nie je manuálne vymazaná.

Samozrejme, musíme si dávať pozor, aby sme sa sami neúmyselne nezablokovali, pretože potom je potrebné odblokovať IP adresu buď priamo na fyzickom mieste servera, alebo ho odblokovať z inej neblokovanej IP adresy. Toto platí pre *ssh* službu. Výhodou tohto prístupu je, že aj nie-IT špecialista je schopný tieto zásahy vykonať po krátkom zaškolení. Tu je malý náhľad z /etc/hosts.deny:

sshd: 138.2.76.115, 136.144.244.162, 165.154.6.49, 2.57.122.190, 103.82.27.19, 164.92.143.110, 80.94.95.115, 45.148.10.151, 165., 155., 136., **161.**

Z krátkej ilustrácie je zrejmé, že blokujeme aj konkrétne IP adresy (majú tvar X.Y.Z.W - teda majú štyri oktety (Blank, 2004)) alebo celé rozsahy IP adries, napr. 161 (označené tučným písmom) . To znamená, že žiadna IP adresa začínajúca prvým oktetom 161 sa k našej službe nepripojí. Ktorá služba používa toto aktívne blokovanie, je vyznačené na začiatku blokovaných IP adries, v našom prípade je to *sshd* (tučné), čo znamená *ssh daemon* – služba spomenutá skôr v texte. V tabuľke 1 vidíme z akých krajín boli najčastejšie pokusy o preniknutie do systému. Z tabuľky vidíme, že najviac pokusov bolo z Vietnamu, USA, Austrálie, Holandska a Bangladéša. Z tabuľky ďalej vidíme, že z USA sa najviac pokusov realizovalo z pravdepodobne cloudových služie firmy Oracle, ktorá poskytuje zdarma službu FreeTier, ktorú využívajú pravdepodobne útočníci. Počet pokusov o nelegálny prienik eliminuje aj nástroj *sshguard,* ktorý ale po čase uvoľní zablokované adresy z blokovania a preto trvalé zablokovanie prináša naše riešenie. Bez *sshguard* by boli pokusy o prienik násobne vo väčšom počte. Po aplikovaní našich pravidiel sa pokusy o pripojenie z definovaných IP adries nebudú dať realizovať už nikdy až do vymazania adresy zo zoznamu blokovaných adries.

Ukážme si efekt po aktivácii pravidiel blokovania (príkaz používaný na filtrovanie odmietnutých pripojení *cat /var/log/secure|grep -i refused*). Len za tri dni bolo pozorovaných 206 odmietnutých IP adries, pre ilustráciu ukážeme iba jednu:

Mar 24 21:24:25 ubuntu-2204-linux sshd[100201]: **refused** connect from 103.82.27.19 (103.82.27.19)

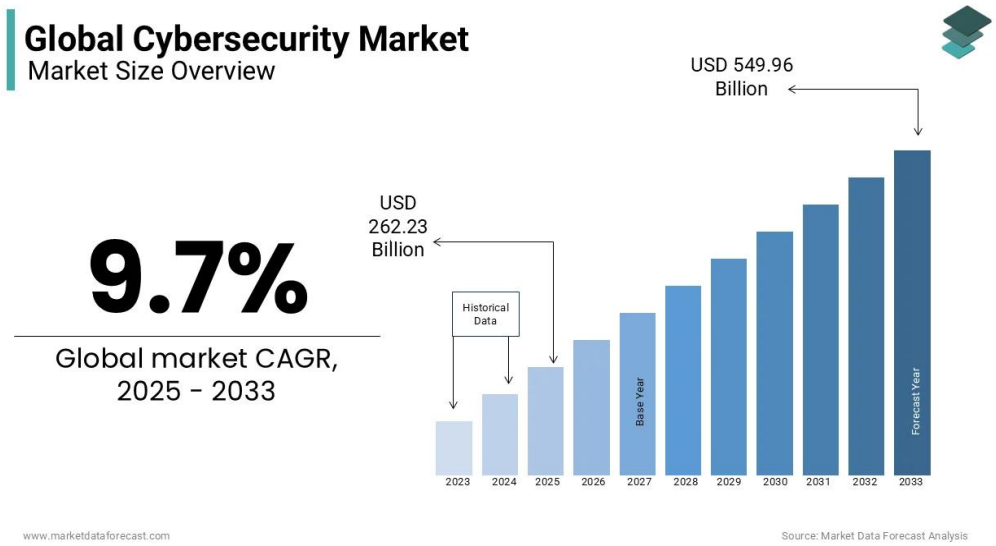
*Tab. 1: Počet IP adries podľa krajiny pôvodu útočníka*

| Štát | IP adresa | Počet útokov |
|---|---|---|
| Vietnam | 103.82.27.19 | 53 |
| USA Oracle | 152.67.251.120 | 18 |
| Austrália | 163.192.24.247 | 18 |
| USA Oracle | 138.2.76.115 | 16 |
| USA Oracle | 161.153.83.179 | 14 |
| USA Oracle | 152.69.178.152 | 12 |
| USA Oracle | 64.110.67.17 | 12 |
| Holandsko | 45.148.10.121 | 11 |
| Holandsko | 92.118.39.95 | 11 |
| Bangladéš | 103.158.206.141 | 10 |

Zdroj: vlastné spracovanie

Podľa spoločnosti Market Data Forecast náklady na kybernetickú bezpečnosť z roka na rok rastú a do budúcna porastú násobne ako je vidieť na obrázku 1.

*Obr. 1: Globálne výdavky na kybernetickú bezpečnosť*




Zdroj: https://www.marketdataforecast.com/market-reports/cyber-security-market

## 5 Diskusia

Cieľom našej práce bolo identifikovať IP adresy so škodlivým úmyslom nabúrať sa do online Linux systémov. Na tento účel sme vybrali servery založené na systéme Linux, ktoré sa používajú na testovanie rôznych úloh. Oba servery boli vystavené podobnému typu útokov. Účelom útočníkov bolo zistiť, ktoré služby sú zverejnené v internetovej sieti, a následne prispôsobiť typ útokov. Na našich serveroch je nakonfigurovaná služba World Wide Web (www) (server Apache), služba Secure Shell (ssh) a nepriamo je možné pristupovať aj k databázovému serveru (MySQL). Preto sme v predchádzajúcom texte opísali hlavné typy útokov, ktoré môžeme očakávať. Pozorovaním logovacích súborov sme identifikovali časté pokusy o nabúranie sa do našich systémov prostredníctvom Secure Shell technikou, ktorá môže byť buď slovníkovým útokom, alebo útokom hrubou silou. Prijali sme opatrenia na zastavenie týchto aktivít blokovaním konkrétnej IP adresy alebo celého bloku adries, ak útočník prichádzal z podozrivých IP adries mimo európskych krajín. Náš prístup k bezpečnostným protiopatreniam má hlavný nedostatok v tom, že v našom riešení je používateľovi navždy zakázaný prístup k službe. To môže bežným používateľom spôsobiť problém s prístupom k službe *ssh* z týchto adries, ale dá sa to vyriešiť časovo obmedzeným blokovaním. Používatelia pristupujúci k službe *ssh* sú väčšinou administrátori, takže prístup k tejto službe môže byť zablokovaný pre všetkých mimo povolených IP adries (white list).

## 6 Záver

Ako sme videli v analýze údajov z reálneho sveta, problém kompromitovania a hackovania systémov je aktuálnejší ako kedykoľvek predtým a dá sa predpokladať, že podobné scenáre sa odohrávajú na všetkých dostupných operačných systémoch na celom internete. Vďaka masívnemu rozsahu internetových útokov vedú k relatívne úspešným prienikom do systémov. Na základe lustrácie verejných databáz (Collins, 2014) je možné zistiť vlastníkov IP adries, ale nie je možné určiť, kto za týmito adresami skutočne stojí. Je zrejmé, že vlastníci týchto adries ich bez spolupráce so štátnymi orgánmi neodhalia.

Samozrejme, na získanie presnejších údajov by bolo užitočné analyzovať záznamy protokolov za obdobie aspoň pol roka a ideálne na aspoň desiatich a viacerých zapojených operačných systémoch. Toto môže byť predmetom budúceho výskumu.

## Literatúra


1. Bandel, D. A. (2000). *Linux security toolkit*. Foster City, CA: M & T, IDG. 480 p. ISBN 978-0764546907
2. Blank, A. G. (2004). *TCP/IP foundations. San Francisco*, CA: SYBEX. 304 p. ISBN 0-7821-4370-9
3. Bresnahan, C., Blum, R. (2015). *Linux essentials*. Indianapolis: Sybex. 368 p. ISBN 978-1119092063
4. Collins, M. (2014*). Network security through data analysis: Building situational awareness*. Beijing: O'Reilly. 428 p. ISBN 978-1491962817
5. Duarte, F. (2026, March 10). *Cybercrime cost 2026: $1.2 trillion (& rising).* Programs.com. https://programs.com/resources/cybercrime-cost/
6. Ellingwood, J. (2015, June 18). *How to set up a firewall using Firewall on CentOS 7.* DigitalOcean. https://www.digitalocean.com/community/tutorials/how-to-set-up-a-firewall-using-firewalld-on-centos-7
7. Hussain, S. (2013, December 17). *How to view and configure Linux logs on Ubuntu and CentOS.* DigitalOcean. https://www.digitalocean.com/community/tutorials/how-to-view-and-configure-linux-logs-on-ubuntu-and-centos
8. Krout, E. (2019, October 1). *How to configure a firewall with UFW.* Linode. https://www.linode.com/docs/security/firewalls/configure-firewall-with-ufw/
9. Michael, R. K. (2011). *Mastering Unix shell scripting: Bash, Bourne, and Korn shell scripting for programmers, system administrators, and UNIX gurus* (2nd ed.). Wiley Publishing.
10. Morgan, S. (2019, June 11). *Global cybersecurity spending predicted to exceed $1 trillion The software's ability to detect AI-generated text in student assignments*. https://cybersecurityventures.com/cybersecurity-market-report/
11. Pan, Y., et al. (2019). Detecting web attacks with end-to-end deep learning. *Journal of Internet Services and Applications, 10*(1). https://doi.org/10.1186/s13174-019-0115-x
12. Pompon, R., & Heath, M. (2020, February 6). *Top attacks against service providers 2017–2019.* F5 Labs. https://www.f5.com/labs/articles/threat-intelligence/top-attacks-against-service-providers-2017-2019
13. Russel, J., & Cohn, R. (2012). *List of TCP and UDP port numbers.* Book on Demand.
14. Schmidt, P. (2017). *Základy informačných sietí.* AZ Print.
15. The Red Hat Enterprise Linux Team. (2018, October 3). *Red Hat continues to lead the Linux server market.* Red Hat. https://www.redhat.com/en/blog/red-hat-continues-lead-linux-server-market

## EXTERNÍ RECENZENTI

Peter Červenka
Danica Fajnorová
Marián Hosťovecký
Alzbeta Kanáliková
Pavel Kvetan
Iveta Stankovičová
Jana Špirková

# POKYNY PRE AUTOROV

***Rozsah***:

- vedecké state a diskusie 10 až 15 strán. Základnou požiadavkou je originalita príspevku a komplexnosť jeho spracovania. Prijímame príspevky v slovenskom, českom a anglickom jazyku (uprednostňujú sa príspevky v anglickom jazyku);
- informácie maximálne 2 strany;
- recenzie maximálne 2 strany.

***Forma:***

Použite textový editor MS WORD, verzia 2 000 a vyššia. Šablóna pre písanie článkov je na webovej stránke:

https://fhi.euba.sk/veda-a-vyskum/vedecke-casopisy/ekonomika-a-informatika/o-casopise

a v elektronickom systéme na stránke:

http://ei.fhi.sk/index.php/EAI

Príspevky predkladajú autori elektronicky vo formáte .doc/.docx do systému na stránke http://ei.fhi.sk/index.php/EAI. Príspevky sú recenzované. Redakčná rada zabezpečí interné a externé posúdenie textu príspevku. Autor príspevku je povinný zapracovať pripomienky z posudkov najneskôr do 2 týždňov od doručenia e-mailov so žiadosťou o vykonanie oponentských posudkov v elektronickom systéme časopisu a zaslať príspevok so zapracovanými pripomienkami vo formáte .doc/.docx prostredníctvom elektronického systému časopisu *Ekonomika a informatika*. Konečné rozhodnutie o publikovaní príspevku urobí redakčná rada časopisu. Autor pred zverejnením príslušného čísla časopisu *Ekonomika a informatika* odsúhlasí formátovanie elektronickej verzie článku. Fakulta hospodárskej informatiky si vyhradzuje právo zverejniť príspevky schválené redakčnou radou v elektronickej forme časopisu *Ekonomika a informatika*.

**Autorské honoráre** sa neplatia. Predložením príspevku do elektronického systému vedeckého časopisu *Ekonomika a informatika* dáva autor príspevku vydavateľovi právo, aby bezplatne publikoval text príspevku v časopise *Ekonomika a informatika* v elektronickej forme vo formáte .pdf.

## EKONOMIKA A INFORMATIKA

Vedecký časopis Fakulty hospodárskej informatiky Ekonomickej univerzity v Bratislave a občianskeho združenia Slovenská spoločnosť pre hospodársku informatiku.

Poslaním vedeckého časopisu je publikovať teoretické a aplikačné poznatky získané v ekonomickom výskume a hospodárskej praxi z oblastí hospodárskej informatiky, účtovníctva a audítorstva, ekonometrie a operačného výskumu, aplikovanej štatistiky a aktuárstva, s akcentom na aktuálne otázky harmonizácie, integrácie a kompatibility s európskou a svetovou metodológiou a praxou.
Uverejňuje vedecké state a diskusie, recenzie a informácie o dizertačných a habilitačných prácach, inauguračných prednáškach a vedeckých podujatiach v slovenskom, českom alebo anglickom jazyku, ktoré sú výsledkom vedeckovýskumnej činnosti autorov, vedeckých aktivít doktorandov, medzinárodnej výskumnej a pedagogickej spolupráce a ich aplikácie v ekonomickej praxi.

## ECONOMICS AND INFORMATICS

A scientific journal of the Faculty of Economic Informatics of University of Economics in Bratislava and the Slovak Economic Informatics Association.

Mission of the scientific journal is to publish theoretical and application knowledge acquired in economic research and practice in the areas of economic informatics, accounting and auditing, applied statistics, actuarial science, econometrics and operations research, with emphasis on the current issues of harmonization, integration and compatibility with the European and global methodology and practice.
The journal publishes scientific articles and paper discussions, reviews and information on doctoral and habilitation theses, inauguration lectures and scientific events in Slovak, Czech or English language, which are results of scientific and research activity of authors, scientific activities of doctoral students, international research and educational cooperation and their application in the economic practice.

**EKONOMIKA A INFORMATIKA**

**Vydáva:** Fakulta hospodárskej informatiky Ekonomickej univerzity v Bratislave a Slovenská spoločnosť pre hospodársku informatiku
Vychádza: 2x ročne