

# EKONOMIKA INFORMATIKA

vedecký časopis FHI EU v Bratislave a SSHI

2

2016  
ročník XIV.



- **hospodárska informatika**
- **účtovníctvo a audítorstvo**
- **ekonometria a operačný výskum**
- **aplikovaná štatistika**
- **aktuárstvo**

**Vydavateľ**

Fakulta hospodárskej informatiky Ekonomickej univerzity v Bratislave a Slovenská spoločnosť pre hospodársku informatiku

IČO vydavateľa 00 399 957

**Redakčná rada**

Ivan Brezina - predseda

*Ekonomická univerzita v Bratislave*

Wolfgang Brüggemann

*Universität Hamburg*

Tatiana Čorejová

*Žilinská univerzita v Žiline*

Ferdinand Daňo

*Ekonomická univerzita v Bratislave*

Christopher D. Daykin

*Government Actuary's Department, London, Great Britain*

Dana Dluhošová

*Vysoká škola báňská - Technická univerzita Ostrava*

Ralf Michael Ebeling

*Martin-Luther-Universität Halle Wittenberg*

Richard Farkaš

*KPMG Slovensko, spol. s r.o.*

Richard Hindls

*Vysoká škola ekonomická v Praze*

Josef Jablonský

*Vysoká škola ekonomická v Praze*

Václav Janeček

*Univerzita Hradec Králové*

Luboš Marek

*Vysoká škola ekonomická v Praze*

Karol Matiaško

*Žilinská univerzita v Žiline*

Ladislav Mejzlík

*Vysoká škola ekonomická v Praze*

Helmut L. Pernsteiner

*Johannes Kepler University Linz*

Józef Pociecha

*Cracow University of Economics*

Zlata Sojková

*Slovenská poľnohospodárska univerzita v Nitre*

Vincent Šoltés

*Technická univerzita v Košiciach*

Gejza Wimmer

*Univerzita Mateja Bela v Banskej Bystrici*

Marcela Žárová

*Vysoká škola ekonomická v Praze*

**Výkonná rada**

Erik Šoltés - manažér

*Ekonomická univerzita v Bratislave*

Ondrej Buchan

*Vydavateľstvo Ekonóm*

Jozef Fecenko

*Ekonomická univerzita v Bratislave*

Michal Fendek

*Ekonomická univerzita v Bratislave*

Gabriela Kristová

*Ekonomická univerzita v Bratislave*

Igor Košťál

*Ekonomická univerzita v Bratislave*

Juraj Pekár

*Ekonomická univerzita v Bratislave*

František Peller

*Ekonomická univerzita v Bratislave*

Eva Sodomová

*Ekonomická univerzita v Bratislave*

Anna Šlosárová

*Ekonomická univerzita v Bratislave*

Miloš Tumpach

*Ekonomická univerzita v Bratislave*

**Redaktorka:** Lenka Kuklišová

**Adresa redakcie:** Fakulta hospodárskej informatiky, Ekonomická univerzita v Bratislave

Dolnozemska cesta 1, 852 35 Bratislava

tel.: 02/6729 5723, e-mail: lenka.kuklisova@euba.sk

**Dátum vydania periodickej tlače**

december 2016

**ISSN 1339-987X (online)**

**ISSN 1336-3514 (online vydanie)**

---

---

## OBSAH 2/2016

### VEDECKÉ STATE A DISKUSIE

Soňa Coss <b>PRIAMA A NEPRIAMA ŠTANDARDIZÁCIA ÚMRTNOSTI</b>	5
Jozef Fecenko – Simona Frisová <b>POUŽITIE VYTVÁRAJÚCICH FUNKCIÍ PRI ANALÝZE MARKOVÝCH REŤAZCOV</b>	16
Marián Goga <b>NIEKTORE PROBLÉMY MATEMATICKÉHO MODELOVANIA SÚŤAŽNÝCH PONUKOVÝCH STRATÉGIÍ</b>	32
Eva Iglarčíková – Ľudovít Pinda <b>MIERY FINANČNÉHO RIZIKA VaR A CVaR</b>	46
Pavol Jurík <b>ROZVÍJAJÚCE SA TRENDY A BUDÚCNOSŤ E-LEARNINGU</b>	59
Andrea Kaderová <b>KONŠTRUKCIA SPOTOVÝCH A FORWARDOVÝCH VÝNOSOVÝCH KRIVIEK</b>	68
Ladislav Kareš <b>BUDÚCNOSŤ AUDÍTORSKÝCH SLUŽIEB V KONTEXTE POŽIADAVIEK VEREJNÉHO ZÁUJMU</b>	79
Daniela Katriková <b>PODNIKOVÁ KOMBINÁCIA AKO FAKTOR OPTIMALIZÁCIE VPLYVU FINANČNEJ INŠTITÚCIE NA JEJ KAPITÁLOVÚ PRIMERANOSŤ</b>	90
Jozef Kušnier <b>GEOMETRICKÁ INTERPRETÁCIA MANOVA MODELU</b>	105
Eva Mihaliková – Darina Koreňová <b>MODELOVÉ A ÚČTOVNÉ ZOBRAZENIE FINANCOVANIA ŠKOLSTVA V ZRIAĐOVATELSKEJ PÔSOBNOSTÍ OBCÍ</b>	122

---

---

---

Eva Rakovská	136
<b>MODELOVANIE ZNALOSTÍ V MANAŽÉRSKÝCH ÚLOHÁCH PROSTREDNÍCTVOM ONTOLOGIÍ A WEBOVÝCH SLUŽIEB</b>	
Peter Schmidt	153
<b>BEZPEČNOSŤ A OCHRANA ÚDAJOV Z POHĽADU CLOUD COMPUTINGU</b>	
Anna Strešňáková	166
<b>MODELOVANIE PRAVDEPODOBNOTI KRACHU POISŤOVNE V KONEČNOM ČASE</b>	
Erik Šoltés – Martin Gajdošík	178
<b>DOPAD REVÍZIE DEPRIVAČNÝCH POLOŽIEK NA HODNOTENIE MATERIÁLNEJ DEPRIVÁCIE SLOVENSKÝCH DOMÁCNOSTÍ NA ZÁKLADE DATABÁZY EU SILC 2014</b>	
<b>RECENZIE</b>	
Zsolt Simonka	198
<b>BUKOR, J. – CSIBA, P. – FEHÉR, Z. – GUNČAGA, J. – JARUSKA, L. – VELICHOVÁ, D.: GEOGEBRA V PRAXI</b>	
<b>INFORMÁCIE</b>	
Jozef Fecenko	201
<b>AKO MÔŽU SKÚSENOSTI ZO ŠTÚDIA AKTUÁRSTVA VO VEĽKEJ BRITÁNIE POMÔCŤ ZLEPŠIŤ AKTUÁRSKE VZDELÁVANIE NA FHI EU V BRATISLAVE</b>	
<b>EXTERNÍ RECENZENTI</b>	204

---

*Soňa Coss*

## PRIAMA A NEPRIAMA ŠTANDARDIZÁCIA ÚMRTNOSTI<sup>1</sup>

### Úvod

Pri analýzach intenzity rôznych demografických procesov (napr. pôrodnosti, sobášnosti, migrácie a pod.) zisťujeme, že ich úroveň veľmi často závisí aj od rôznych iných charakteristík. Takýmito charakteristikami sú napr. vek, pohlavie, vzdelanie, rodinný stav, ekonomický status a pod.

Pri posudzovaní úrovne týchto demografických javov v rôznych populáciách sa najčastejšie využívajú tzv. hrubé miery. Ich vyčíslenie je jednoduché a presné, ale charakteristika a spôsob ich výpočtu naznačuje najväčší nedostatok. Ukazovatele hrubých mier totiž vôbec nezohľadňujú vplyv týchto štrukturálnych premenných. Tým sa stávajú nevhodnými, najmä na objektívne porovnanie štrukturálne odlišných populácií. Podobne je to aj pri analýze úmrtnosti, ktorá je výrazne ovplyvnená najmä vekom.

Jej základný ukazovateľ, *hrubá miera úmrtnosti* je definovaná ako pomer súčtu zomretých z jednotlivých vekových skupín ku strednému stavu obyvateľstva. Je však zároveň váženým aritmetickým priemerom mier úmrtnosti podľa veku, kde váhami sú počty žijúcich v jednotlivých vekových skupinách.

$$hmú = \frac{D}{P} = \frac{\sum D_x}{P} = \frac{\sum \frac{D_x}{P_x} \cdot P_x}{P} = \sum u_x \cdot \frac{P_x}{P} \quad (1.1)$$

kde D je celkový počet zomretých v danej populácii

P – stredný stav obyvateľov

$D_x$  – počet zomretých v jednotlivých vekových skupinách

$P_x$  - stredný stav obyvateľov v danej vekovej skupine

$u_x$  – miera úmrtnosti vo vekovej skupine

Z vyjadrenia vyplýva, že intenzita úmrtnosti meraná touto mierou je závislá jednak od intenzity úmrtnosti v jednotlivých vekových skupinách a zároveň od vekovej štruktúry danej populácie. Je zrejme, že v populáciách s väčším podielom staršieho obyvateľstva dosahuje vyššie hodnoty, v porovnaní s relatívne mladšími populáciami. Tým hrubá miera úmrtnosti stráca svoju vypovedaciu schopnosť a prestáva byť

<sup>1</sup> Príspevok bol vypracovaný v rámci riešenia úlohy: VEGA 1/0092/15 moderné prístupy k navrhovaniu komplexných štatistických prieskumov, ktorého vedúcim je prof. Ing. Milan Terek, PhD.

spoľahlivým ukazovateľom na meranie rozdielov úmrtnosti jednotlivých krajín, ale aj pri skúmaní vývoja úmrtnosti v čase.

Eliminovať vplyv vekovej štruktúry môžeme pomocou štandardizácie. Zmyslom štandardizácie, podľa [8], je snaha previesť porovnávané súbory na vzájomne porovnateľný základ s cieľom odstrániť ich rozdielne štruktúry. K dispozícii máme dva prístupy, metódu priamej a nepriamej štandardizácie.

## 1 Priama štandardizácia

*Priama štandardizácia* je úprava, pri ktorej za štandard zvolíme určitú vekovú štruktúru a vážime ňou miery úmrtnosti podľa veku porovnávaných populácií. Podľa [3] a [8]:

$${}^{pst}\check{sm}ú = \sum \acute{u}_x \cdot \frac{{}^{st}P_x}{{}^{st}P} = \frac{\sum \acute{u}_x \cdot \frac{{}^{st}P_x}{{}^{st}P}}{\sum \acute{u}_x \cdot \frac{{}^{st}P_x}{{}^{st}P}} \cdot \sum {}^{st}\acute{u}_x \cdot \frac{{}^{st}P_x}{{}^{st}P} \quad (1.2)$$

Všeobecne voľba štandardu závisí od nášho subjektívneho rozhodnutia a významne ovplyvňuje dosiahnutý výsledok. Podľa [3], môžeme za štandard zvoliť vekovú štruktúru ktorejkoľvek z porovnávaných populácií, príp. inú populáciu, ktorá má tzv. „normálnu“ vekovú štruktúru (neovplyvnenú napr. vojnami). Taktiež môžeme zvoliť vekovú štruktúru rádovo vyššej populácie. Napr. pri porovnávaní intenzity úmrtnosti jednotlivých okresov, volíme za štandard vekovú štruktúru celej republiky. Pri medzinárodnom porovnávaní populácií sa zvyčajne používa umelo vytvorená veková štruktúra odporúčaná Svetovou zdravotníckou organizáciou (WHO).

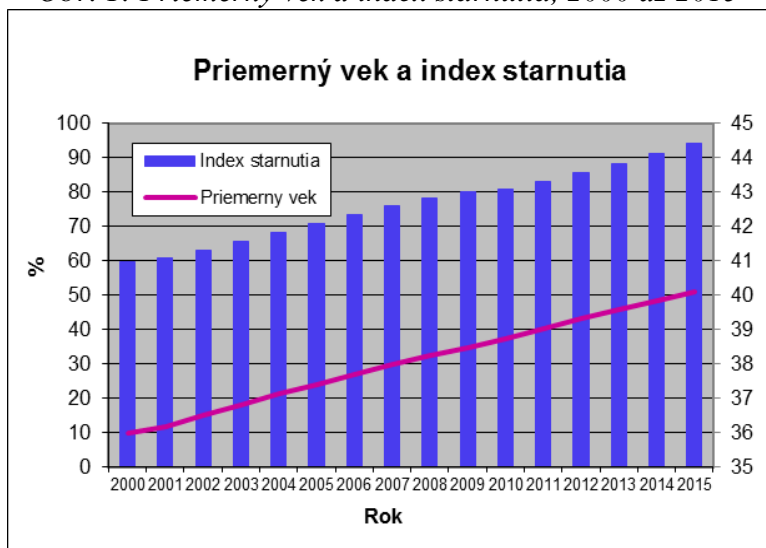
Pri výpočte priamej štandardizácie musíme mať k dispozícii absolútne počty zomretých podľa veku a vekovú štruktúru v danej populácii. Rovnako musíme poznať aj vekovú štruktúru štandardnej populácie. Prepočtom podľa vyššie uvedeného vzorca vypočítame hodnoty štandardizovanej miery úmrtnosti, ktorá by sa hypoteticky vyskytovala v reálnej populácii za predpokladu, že by jej veková štruktúra zodpovedala vekovej štruktúre štandardu. Podrobný postup je dostupný v [9] a [10].

### 1.1 Aplikácia priamej štandardizácie pri analýze vývoja úmrtnosti

Po zlepšovaní celkových úmrtnostných pomerov v 90-tych rokoch minulého storočia, by sme očakávali pokračujúci pokles hrubej miery úmrtnosti aj nasledujúcich 15 rokov. Analýzou hodnôt tejto miery (Tabuľka č.1) v období rokov 2000-2015 však pozorujeme, že k nejakému výraznému poklesu nedošlo. U mužov sledujeme stagnáciu na úrovni 10‰, u žien dokonca mierny nárast ukazovateľa.

Stagnuje, resp. dochádza k zhoršovaniu úmrtnostných pomerov na Slovensku za ostatných 15 rokov? Vysloviť takýto záver by bolo asi trochu nepresné a zavádzajúce. Proti hovorí aj analýza ostatných ukazovateľov úmrtnosti a dĺžky života. V sledovanom období totiž došlo k poklesu mier úmrtnosti vo všetkých vekových skupinách, zlepšili sa aj ukazovatele strednej dĺžky života pri narodení u oboch pohlaví. Prečo teda neklesá aj ukazovateľ hrubej miery úmrtnosti?

Obr. 1: Priemerný vek a index starnutia, 2000 až 2015



Zdroj: Vlastné spracovanie, dáta: [11]

Vývoj ukazovateľa priemerného veku aj index starnutia (Obr. 1) jednoznačne potvrdili starnutie slovenskej populácie. Táto výrazná zmena vekovej štruktúry zrejme intenzívne ovplyvňuje aj vývoj hrubej miery úmrtnosti.

Očistiť hrubú mieru úmrtnosti od vplyvu tohto faktora môžeme práve pomocou metódy priamej štandardizácie. Aplikovali sme ju na údaje o počte zomretých v 5-ročných vekových skupinách, pričom ako váhu (štandard) sme použili vekovú štruktúru z roku 2000. Vzhľadom na rozdiel v úmrtnosti mužov a žien sme sa zaoberali každým pohlavím oddelene.

Štandardizácia ukazovateľov nám pomôže vystihnúť zmeny úmrtnosti bez vplyvu starnutia populácie Slovenska. Ziskáme tak reálnu predstavu o tom, ako sa zmenila úmrtnosť na Slovensku iba vplyvom zmien úmrtnosti v jednotlivých vekových skupinách, teda samotných intenzít úmrtnosti. Výsledky po eliminácii vplyvu faktora sú veľmi zaujímavé.

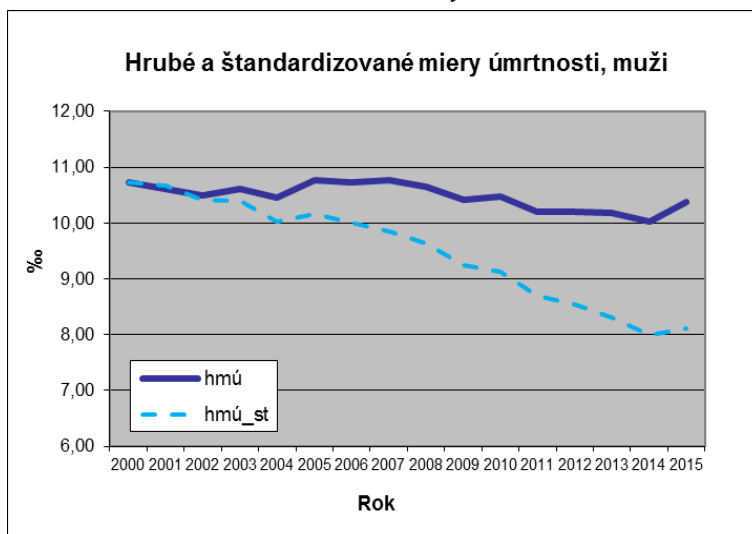
Tabuľka 1: Hrubé a štandardizované miery úmrtnosti (v ‰)

		Rok								
		2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	
Muži		2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015	
	hmú	10,72	10,60	10,50	10,61	10,45	10,77	10,73	10,77	
	šmú	10,72	10,67	10,41	10,39	10,03	10,15	10,01	9,86	
		2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015	
	hmú	10,66	10,42	10,47	10,19	10,21	10,19	10,03	10,39	
šmú	9,63	9,25	9,13	8,70	8,54	8,30	8,00	8,11		
Ženy		2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	
	hmú	8,85	8,77	8,71	8,86	8,86	9,13	9,09	9,23	
	šmú	8,85	8,91	8,71	8,70	8,44	8,51	8,29	8,25	
		2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015	
	hmú	9,05	9,14	9,24	9,06	9,21	9,09	8,94	9,48	
šmú	7,96	7,84	7,75	7,45	7,39	7,11	6,79	7,04		

Zdroj: Vlastné spracovanie, dáta: [11]

Pri posudzovaní úmrtnosti pomocou štandardizovaných mier vidíme omnoho výraznejší pokles a zlepšovanie úmrtnostných pomerov u oboch pohlaví. To, že sa krivky grafu hrubej a štandardizovanej miery postupne rozchádzajú, potvrdilo fakt starnutia populácie Slovenska. Staršie ročníky nadobúdajú stále väčšiu váhu, čím negatívne ovplyvňujú ukazovatele hrubých mier.

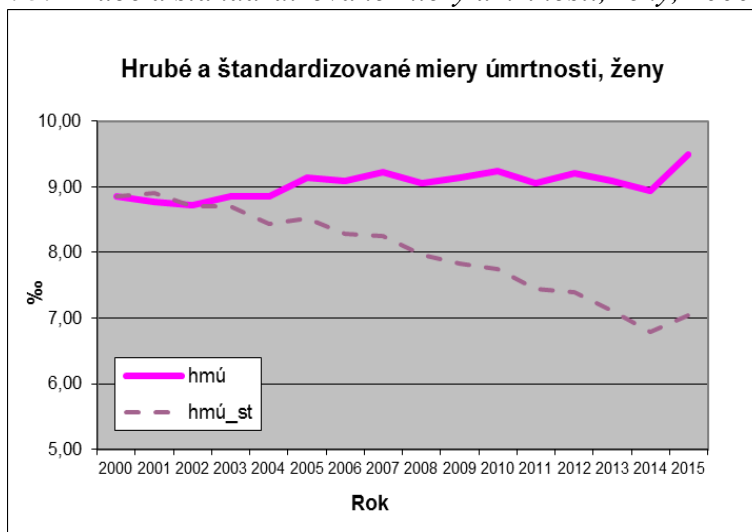
Obr. 2: Hrubé a štandardizované miery úmrtnosti, muži, 2000-2015



Zdroj: Vlastné spracovanie, dáta: [11]



Obr. 3: Hrubé a štandardizované miery úmrtnosti, ženy, 2000-2015



Zdroj: Vlastné spracovanie, dáta: [11]

V skutočnosti teda môžeme konštatovať podstatne výraznejšie zlepšovanie úmrtnosti ako pri použití hrubých mier. Interpretácia štandardizovaných mier naznačuje, aké by boli hodnoty hrubých mier za predpokladu, že by nedochádzalo k starnutiu obyvateľstva v SR. To znamená, že ak by sa veková štruktúra nezmenila a zostala by rovnaká ako v roku 2000, hrubá miera úmrtnosti by bola u mužov v roku 2015 na úrovni 8,1‰ a u žien iba 7,04‰. Za tohto predpokladu by v roku 2015 hypoteticky zomrelo iba 21,3 tisíc mužov a 19,5 tisíc žien. To je o 6,1 tisíc menej mužov a o 6,8 tisíc menej žien než v skutočnosti zomrelo v roku 2015.

## 2. Nepriama štandardizácia

Na analýzu úmrtnosti však môžeme využiť aj nepriamu štandardizáciu. Je to úprava, pri ktorej za štandard volíme miery úmrtnosti podľa veku niektorej z porovnávaných populácií. Vychádzame pritom z toho, že máme k dispozícii vekovú štruktúru za všetky populácie. Podľa [3] a [8]:

$${}^{nst} \check{m} \acute{u} = \frac{D}{\sum {}^{st} \acute{u}_x \cdot P_x} \cdot {}^{st} h m \acute{u} = \frac{\sum \acute{u}_x \cdot \frac{P_x}{P}}{\sum {}^{st} \acute{u}_x \cdot \frac{P_x}{P}} \cdot \sum {}^{st} \acute{u}_x \cdot \frac{{}^{st} P_x}{{}^{st} P} \quad (1.3)$$

Veľkou výhodou nepriamej štandardizácie je, že nám stačí mať k dispozícii v porovnávaných populáciách iba celkový počet zomretých a vekovú štruktúru. Za štandardnú populáciu potrebujeme poznať absolútne počty zomretých podľa veku a vekovú štruktúru štandardu.

Nepriamou štandardizáciou sa upravuje hrubá miera úmrtnosti štandardnej populácie indexom úmrtnosti, ktorý porovnáva intenzitu úmrtnosti skutočne pozorovanej populácie s intenzitou úmrtnosti štandardnej populácie, pri využití vekovej štruktúry pozorovanej populácie.

Na princípe nepriamej štandardizácie je založený aj ďalší ukazovateľ - štandardizovaný úmrtnostný index  $^{nst}úi$ . Jeho základom je porovnanie skutočného a očakávaného počtu úmrtí za predpokladu intenzity úmrtnosti štandardnej populácie. Podľa [3]:

$$^{nst}úi = \frac{D}{\sum^{st}ú_x \cdot P_x} = \frac{D}{\sum D_x^{st} \cdot \frac{P_x}{P_x^{st}}} \quad (1.4)$$

Očakávaný počet zomretých vypočítame tak, že počet zomretých štandardnej populácie upravíme (násobíme) podielom žijúcich skúmanej a štandardnej populácie. Vďaka jednoduchej interpretácii je práve tento index veľmi často využívaný pri analýzach diferenciacie úmrtnosti. Štandardizovaný úmrtnostný index vyjadruje, ako by sa zmenil počet zomretých, ak by veková štruktúra zostala rovnaká, iba by sa zmenili miery úmrtnosti podľa veku. Ak je hodnota indexu väčšia ako 1, intenzita úmrtnosti v danej populácii je väčšia v porovnaní so štandardnou populáciou. Zároveň nám vyčísľuje o koľko percent je táto hodnota vyššia ako priemer. Pri hodnotách indexu menších ako 1, sa jedná o podpriemernú úroveň úmrtnosti.

Samozrejme obe metódy majú v prípade používania svoje výhody aj nevýhody. Využitie typu štandardizácie jasne determinujú údaje o populácii, ktoré máme k dispozícii. Priamej štandardizácii dávame prednosť, ak máme dostatok údajov o špecifických mierach úmrtnosti vo všetkých porovnávaných populáciách. Nepriama štandardizácia môže byť vhodným riešením najmä pri nedostatku údajov o špecifických mierach úmrtnosti v jednotlivých populáciách. Na výpočet postačia počty zomretých za populácie a veková štruktúra, ktorá je zväčša k dispozícii. Taktiež je veľmi vhodným nástrojom, pri porovnávaní malých regionálnych celkov, kde pri podrobných vekových štruktúrach a práci s relatívne malými hodnotami, môže dochádzať k veľkým náhodným výkyvom hodnôt.

## 2.1 Aplikácia nepriamej štandardizácie pri regionálnej analýze úmrtnosti

Ďalšou možnosťou využitia štandardizácie je regionálne skúmanie úmrtnosti. Ide o porovnávanie úmrtnosti regiónov s rozličnou vekovou štruktúrou. Za štandard sa môže použiť niektorý z regiónov s „typickou“ vekovou štruktúrou, avšak omnoho častejšie sa volí ako štandard nadradený územný celok.

My sme pracovali s údajmi o krajoch Slovenskej republiky v roku 2015. Vekové štruktúry v jednotlivých regiónoch sme analyzovali z hľadiska základných vekových

skupín – predproduktívneho, produktívneho a poproduktívneho veku. Ako štandard sme zvolili miery úmrtnosti podľa základných vekových skupín za celé Slovensko. Opäť sme skúmali každé pohlavie samostatne. Vypočítali sme jednak hodnoty štandardizovaných úmrtnostných indexov aj štandardizované miery úmrtnosti. Postup je podrobne popísaný v [9] a [10].

Štandardizované úmrtnostné indexy sú veľmi vhodné na porovnávanie krajov. Ide o pomer skutočného a očakávaného počtu zomretých (za predpokladu intenzít úmrtnosti štandardu – teda celoslovenského ukazovateľa). Sú vyjadrené v % a jednoznačne poukazujú, v ktorých regiónoch je úmrtnosť nižšia (a o koľko %), resp. vyššia v porovnaní s celoslovenským priemerom.

Pri porovnávaní štandardizovaných úmrtnostných indexov u mužov vidíme, že vyššiu úmrtnosť v porovnaní s celoslovenským priemerom dosahujú najmä košický, žilinský, banskobystrický a najmä nitriansky kraj. Podpriemernú úroveň úmrtnosti vykazujú prešovský, trenčiansky kraj. Najlepšie hodnoty indexu dosiahol bratislavský kraj, v ktorom je mužská úmrtnosť až o 12% nižšia v porovnaní s celoslovenským priemerom.

Tabuľka 2: Hrubé a štandardizované miery úmrtnosti, kraje 2015

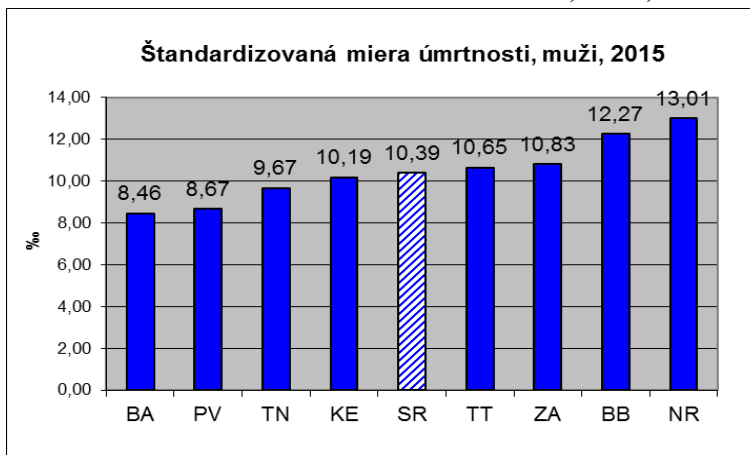
		SR	BA	TT	TN	NR	ZA	BB	PV	KE
Muži	hmú	10,39	9,67	10,67	10,43	11,90	10,42	11,39	9,05	9,96
	úi		0,88	1,00	0,93	1,09	1,04	1,08	0,96	1,02
	šmú		8,46	10,65	9,67	13,01	10,83	12,27	8,67	10,19
Ženy	hmú	9,48	9,25	9,96	9,44	11,00	8,99	10,28	8,50	8,85
	úi		0,95	1,03	0,93	1,07	0,98	1,04	1,00	0,99
	šmú		8,74	10,26	8,79	11,75	8,85	10,68	8,50	8,79

Zdroj: Vlastné spracovanie, dáta: [12]

U žien bola situácia trochu iná. Nadpriemerné hodnoty pozorujeme v trnavskom, banskobystrickom a najmä v nitrianskom kraji. Podpriemerná úroveň ženskej úmrtnosti bola v košickom, žilinskom a bratislavskom kraji. Najnižšiu hodnotu u žien dosiahol trenčiansky kraj, na úrovni 7% pod celoslovenským priemerom.

Hodnoty štandardizovaných úmrtnostných indexov samozrejme ovplyvňujú následne aj výpočet štandardizovaných mier úmrtnosti. Pomocou nich upravíme pôvodnú hrubú mieru úmrtnosti daného regiónu na štandardizovanú (porovnateľnú) úroveň. Výsledné hodnoty štandardizovaných mier úmrtnosti znázorňujú nasledujúce dva grafy.

Obr. 4: Štandardizovaná miera úmrtnosti, muži, 2015

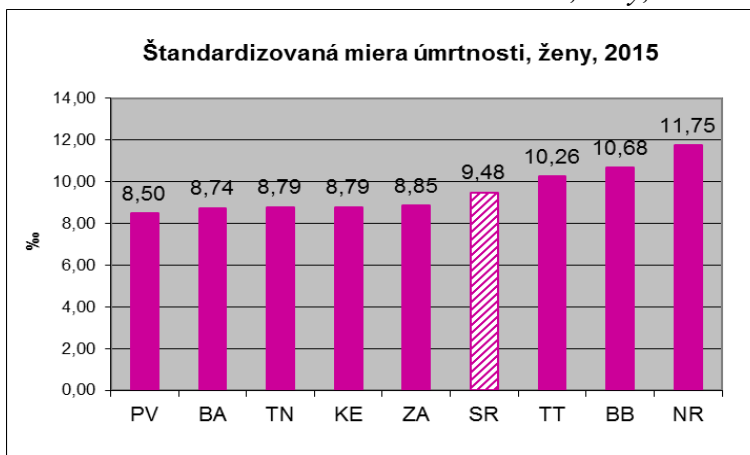


Zdroj: Vlastné spracovanie, dáta: [12]

Vyjadrujú hodnotu celkovej miery úmrtnosti v danom kraji za predpokladu, že by boli intenzity úmrtnosti zhodné s celoslovenským priemerom. Takto očistené miery umožňujú usporiadať poradie krajov z hľadiska celkového ukazovateľa úmrtnosti.

Pri pohľade na hodnoty štandardizovanej úmrtnosti mužov v jednotlivých krajoch, vidíme, že najvyššie hodnoty dosahuje v nitrianskom a banskobystrickom kraji (13,01 resp. 12,27 zomretých mužov na 1000 mužov daného kraja). Najnižšiu štandardizovanú mieru úmrtnosti sme zaznamenali v bratislavskom kraji (8,46‰) a v prešovskom kraji (8,67‰). Celková štandardizovaná úmrtnosť mužov na Slovensku je na úrovni 10,39 zomretých na 1000 mužov.

Obr. 5: Štandardizovaná miera úmrtnosti, ženy, 2015



Zdroj: Vlastné spracovanie, dáta: [12]

Pri skúmaní úmrtnosti žien vidíme, že hodnota celoslovenského priemeru sa pohybuje na úrovni 9,48 promile. Najlepším krajom ženskej úmrtnosti je prešovský kraj s hodnotou 8,50 zomretých žien na každých 1000 žien daného kraja. Nasledujú kraje bratislavský, trenčiansky, košický a žilinský s veľmi podobnými hodnotami štandardizovanej úmrtnosti. Najvyššia hodnota štandardizovanej úmrtnosti žien je v nitrianskom kraji, s náskokom viac ako 2,27 promilových bodov oproti celoslovenskému priemeru.

Rozdielne hodnoty hrubej miery úmrtnosti a štandardizovaných mier úmrtnosti potvrdili, že hrubá miera úmrtnosti nie je dostatočným ukazovateľom na meranie regionálnych rozdielov úmrtnosti, Najmä, ak ide o regióny s rozdielnym vývojom pôrodnosti, zdravotného stavu obyvateľstva, úmrtnosti a následne aj rozdielných vekových štruktúr.

## **Záver**

Pri analýzach úmrtnosti, ak chceme porovnávať regióny z hľadiska rôznej intenzity úrovne úmrtnosti, musíme použiť miery úmrtnosti vhodné na porovnávanie intenzitných ukazovateľov, t.j. štandardizované ukazovatele. Štandardizácia je jedným z prostriedkov demografickej analýzy, ktorý umožňuje vylúčiť vplyv štruktúrálnych premenných na úroveň intenzitných demografických ukazovateľov, čím sa zabezpečí lepšia porovnateľnosť údajov. Tento postup môžeme aplikovať na analýzu mnohých demografických javov (pôrodnosť, sobášnosť, rozvodovosť...) a to bez ohľadu na to, aký štruktúrálny vplyv chceme vylúčiť. Či už ide o vekovú štruktúru, sociálnu štruktúru, podiel pohlaví, prípadne podiel mestského a vidieckeho obyvateľstva.

Metódu priamej štandardizácie sme využili pri analýze vývoja úmrtnosti na Slovensku v období rokov 2000 až 2015. Nepriamu štandardizáciu na regionálnu analýzu úmrtnosti v roku 2015 na úrovni jednotlivých krajov. Získali sme ukazovatele, ktoré lepšie charakterizujú reálne zmeny v úmrtnosti, ku ktorým došlo na Slovensku.

## **Kľúčové slová**

Priama štandardizácia, nepriama štandardizácia, analýza úmrtnosti

## **Klasifikácia JEL**

J11

## **LITERATÚRA**

- [1] Fiala A. 1987. *K problémum hodnocení statistické významnosti srovnávacích indexu úmrtnosti*. In: Zborník príspevkov z konferencie Čs. demografickej spoločnosti pri ČSAV–„Úmrtnost a stárnutí obyvatelstva v ČSSR“ v dňoch 28.-30.4.1987 v Liblicích. Praha: ČDS pri ČSAV, 1987. 32-38s. ISBN

- 
- [2] Jurčová D. 2005. *Slovník demografických pojmov*. Bratislava : Akty, 2005. 72s. ISBN 80-85659-40-9
- [3] Pavlík Z. – Rychtaříková J. – Šubrtová A.: *Základy demografie*. Praha : Academia, 1986. 727s. ISBN 15-593-1983-32
- [4] Roubíček V. 1966. *Vybrané kapitoly z demografie I*. Praha: SPN, 1966. 166s. ISBN
- [5] Roubíček V. 1971. *Základní problémy obecné a ekonomické demografie*. Praha: VŠE, 1971. 161s. ISBN
- [6] Roubíček V. 1988. *K problému zkoumání územní diferenciace úmrtnosti*. In: Zborník príspevkov z konferencie Čs. demografickej spoločnosti pri ČSAV– „Úmrtnost a stárnutí obyvateľstva v ČSSR“ v dňoch 28.-30.4.1987 v Liblicích. Praha: ČDS pri ČSAV, 1988. 102-113s. ISBN
- [7] Roubíček V. 1997. *Úvod do demografie*. Praha: Codex Bohemia, 1997. s. ISBN.
- [8] Srb V. – Kučera M. – Ružička L. 1971. *Demografie*. Praha: Svoboda, 1971. 611s. ISBN 25-081-71
- [9] Standardisation. Dostupné na: <http://www.healthknowledge.org.uk/e-learning/epidemiology/specialists/standardisation>
- [10] Easy Way to Learn Standardization: Direct and Indirect Methods. Dostupné na: <http://www.ncbi.nlm.nih.gov/pmc/articles/PMC3406211/>
- [11] Dáta: absolútne počty zomretých podľa veku, stredný stav obyvateľov podľa 5-ročných vekových skupín, 2000-2015, dostupné na: <http://www.infostat.sk/vdc/>
- [12] Dáta: stredný stav obyvateľov podľa veku, počty zomretých za kraje SR, rok 2015, dostupné na: <http://datacube.statistics.sk/>

## RESUMÉ

Štandardizácia je univerzálnym nástrojom na porovnávanie mier úmrtnosti rôznych populácií. Využitie iba hrubých mier úmrtnosti, by dostatočne nezachytilo skutočnú úroveň a zlepšovanie úmrtnosti. Najmä pri porovnávaní populácií s rozdielnou vekovou štruktúrou a rôznym stupňom starnutia. K dispozícii máme dve metódy, priamu a nepriamu štandardizáciu. Obe umožňujú vypočítať miery úmrtnosti, v ktorých je potlačený vplyv štruktúrneho faktora ovplyvňujúceho zmeny skúmaného intenzitného ukazovateľa.

## SUMMARY

Standardization is an universal tool comparing mortality rates of different populations. Using crude death rates, would be not very informative about the real changes of mortality improvement, especially in populations with different age structure and ageing process. Two methods of standardization are commonly used, direct and indirect standardization. Both allow to calculate mortality indicators, that are independent on structural factor in changes of intensity indicators.

## **Kontakt**

Ing. Soňa Coss, PhD., Katedra štatistiky, Fakulta hospodárskej informatiky, Ekonomická univerzita v Bratislave, Dolnozemská cesta 1, 520 35 Bratislava, e-mail: [sona.coss@gmail.com](mailto:sona.coss@gmail.com)

*Jozef Fecenko*  
*Simona Frisová*

## POUŽITIE VYTVÁRAJÚCICH FUNKCIÍ PRI ANALÝZE MARKOVOVÝCH REŤAZCOV

### Úvod

Cieľom príspevku je prezentovať širšie možnosti využitia vytvárajúcich funkcií pri analýze Markovových reťazcov s podporou open source systému Maxima. Práca vznikla z podnetu state s rovnomenným názvom nachádzajúcej sa vo vysokoškolskej učebnici [3], str. 138 – 150, kde autor spomínanej učebnice pomocou vhodných úprav naznačuje, ako je možné (v špeciálnych prípadoch) úpravami, využitím vytvárajúcich funkcií vyjadriť explicitne vektor absolútnych pravdepodobností v Markovovom reťazci, resp. mocninu matice pravdepodobnosti prechodu. V práci bude ukázaná všeobecná metóda takýchto vyjadrení s využitím teórie diferenčných rovníc, s výpočtovou podporou open source systému počítačovej algebry Maxima. Pripomeňme, že „pomocou Markovových reťazcov je možné modelovať nepreberné množstvo úloh každodennej reality“ [4].

### 1 MARKOVOVÉ REŤAZCE

Markovov reťazec popisuje spravidla diskretný stochastický proces, pre ktorý platí, že pravdepodobnosť prechodu do nasledujúceho stavu závisí iba na súčasnom stave a nie na predchádzajúcich stavoch.

Z teórie homogénnych Markovových reťazcov vieme, že vektor absolútnych pravdepodobností  $\mathbf{p}(n)$  pre začiatočný vektor pravdepodobnosti  $\mathbf{p}(0)$  a maticu prechodu  $\mathbf{P}$  je možno vyjadriť v tvare

$$\mathbf{p}(n) = \mathbf{p}(n-1)\mathbf{P} \quad (1)$$

resp.

$$\mathbf{p}(n) = \mathbf{p}(0)\mathbf{P}^n. \quad (2)$$

Markovov reťazec nazývame regulárny, ak existuje

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{p}(n) = \mathbf{p},$$

ktorá nezávisí od začiatočného vektora  $\mathbf{p}(0)$ .

V našich úvahách sa budeme zaoberať len homogénnymi, regulárnymi Markovovými reťazcami.



## 1.1 Aplikácia vytvárajúcich funkcií na určenie vektora absolútnych pravdepodobnosti

Ako už bolo spomenuté, v práci [3] je načrtnutá metóda určenia vektora absolútnych pravdepodobnosti  $\mathbf{p}(n)$  s použitím vytvárajúcich funkcií. Táto metóda je prezentovaná len na špeciálnych príkladoch, kedy príslušný rozklad na parciálne zlomky obsahuje len parciálne zlomky prvého typu. V našich úvahách sa pokúsime zovšeobecniť tento problém a načrtnúť jeho riešenie s podporou open source systému počítačovej algebry Maxima.

Nech  $\{\mathbf{F}(n)\}_{n=0}^{\infty}$  je postupnosť matic a nech existuje  $z_0 > 0$  take, že pre všetky  $z \in (-z_0, z_0)$  platí

$$\tilde{\mathbf{F}}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{F}(n)z^n. \quad (3)$$

Potom funkciu  $\tilde{\mathbf{F}}(z)$  nazývame vytvárajúcou funkciou postupnosti  $\{\mathbf{F}(n)\}_{n=0}^{\infty}$ . Funkciu  $\mathbf{F}(n)$ , definovanú na množine všetkých celých nezáporných čísel, nazývame tiež vzor matice  $\tilde{\mathbf{F}}(z)$  a funkciu  $\tilde{\mathbf{F}}(z)$  obraz funkcie  $\mathbf{F}(n)$ .

Označme  $\tilde{\mathbf{f}}(z)$  vytvárajúcu funkciu postupnosti vektorov absolútnych pravdepodobnosti  $\{\mathbf{p}(n)\}_{n=0}^{\infty}$ . Teda

$$\tilde{\mathbf{f}}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{p}(n)z^n \quad (4)$$

Po úprave dostaneme

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{f}}(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{p}(n)z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{p}(0)\mathbf{P}^n z^n = \mathbf{p}(0) \sum_{n=0}^{\infty} (z\mathbf{P})^n = \\ &= \mathbf{p}(0)(\mathbf{E} - z\mathbf{P})^{-1} = \mathbf{p}(0)\tilde{\mathbf{F}}(z) \end{aligned} \quad (5)$$

kde  $(\mathbf{E} - z\mathbf{P})^{-1}$  je inverzná matica k matici  $\mathbf{E} - z\mathbf{P}$ . Vzťah (5) platí za predpokladu, že príslušný nekonečný rad konverguje na nejakom intervale  $(-z_0, z_0)$ ,  $z_0 > 0$  a matica  $\mathbf{E} - z\mathbf{P}$  je regulárna pre všetky  $z \in (-z_0, z_0)$ .

Zo vzťahu (5) vyplývajú dve úlohy:

- nájsť vzor vektora  $\mathbf{p}(0)\tilde{\mathbf{F}}(z)$ , t. j. vektor  $\mathbf{p}(n)$  absolútnych pravdepodobnosti po  $n$  krokoch (vtedy ak vektor začiatočných pravdepodobnosti je fixne daný)
- nájsť vzor funkcie  $\tilde{\mathbf{F}}(z)$ , t. j. funkciu  $\mathbf{F}(n) = \mathbf{P}^n$  (výhodné napríklad vtedy ak predpokladáme, že budeme riešiť viacej úloh s meniacim sa začiatočným vektorom pravdepodobnosti  $\mathbf{p}(0)$ ). Táto úloha je na rozsah výpočtu náročnejšia.

Pred všeobecnou analýzou tohto problému, uvedieme triviálny príklad.

**Príklad 1.** ([3], str. 140). Nájďme vektor absolútnych pravdepodobnosti Markovovho reťazca, ktorý je daný maticou prechodu

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 \\ 0,3 & 0,7 \end{pmatrix}$$

a začiatočným vektorom  $\mathbf{p}(0) = (1; 0)$ .

*Riešenie.*

$$(\mathbf{E} - z\mathbf{P}) = \begin{pmatrix} 1 - 0,6z & -0,4z \\ -0,3z & 1 - 0,7z \end{pmatrix}$$

$$(\mathbf{E} - z\mathbf{P})^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{10 - 7z}{3z^2 - 13z + 10} & \frac{4z}{3z^2 - 13z + 10} \\ \frac{3z}{3z^2 - 13z + 10} & -\frac{6z - 10}{3z^2 - 13z + 10} \end{pmatrix}, z \neq 1, z \neq \frac{10}{3} \quad (6)$$

Po rozklade na parciálne zlomky dostaneme

$$\tilde{\mathbf{F}}(z) = \begin{pmatrix} \frac{40}{7(10 - 3z)} + \frac{3}{7(1 - z)} & -\frac{40}{7(10 - 3z)} + \frac{4}{7(1 - z)} \\ -\frac{30}{7(10 - 3z)} + \frac{3}{7(1 - z)} & \frac{30}{7(10 - 3z)} + \frac{4}{7(1 - z)} \end{pmatrix}, |z| < 1$$

Poslednú maticu môžeme napísať ako súčet matic

$$\tilde{\mathbf{F}}(z) = \frac{1}{1 - z} \begin{pmatrix} \frac{3}{7} & \frac{4}{7} \\ \frac{3}{7} & \frac{4}{7} \end{pmatrix} + \frac{1}{1 - \frac{3}{10}z} \begin{pmatrix} \frac{4}{7} & -\frac{4}{7} \\ -\frac{3}{7} & \frac{3}{7} \end{pmatrix}, \quad |z| < 1$$

Vzor funkcie  $\tilde{\mathbf{F}}(z)$  potom môžeme vyjadriť v tvare

$$\mathbf{F}(n) = \begin{pmatrix} \frac{3}{7} & \frac{4}{7} \\ \frac{3}{7} & \frac{4}{7} \end{pmatrix} + \left(\frac{3}{10}\right)^n \begin{pmatrix} \frac{4}{7} & -\frac{4}{7} \\ -\frac{3}{7} & \frac{3}{7} \end{pmatrix} = \mathbf{P}^n.$$

Potom podľa vzťahu (2)

$$\mathbf{p}(n) = (1; 0) \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{7} & \frac{4}{7} \\ \frac{3}{7} & \frac{4}{7} \end{pmatrix} + \left(\frac{3}{10}\right)^n \begin{pmatrix} \frac{4}{7} & -\frac{4}{7} \\ -\frac{3}{7} & \frac{3}{7} \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \left(\frac{3}{7} + \frac{4}{7}\left(\frac{3}{10}\right)^n; \frac{4}{7} - \frac{4}{7}\left(\frac{3}{10}\right)^n\right).$$

**Poznámka 1.** V ilustrovanom príklade determinant matice  $\mathbf{E} - z\mathbf{P}$  (v našom prípade polynóm premennej  $z$ ) mal navzájom rôzne reálne korene,  $z_1 = 1$  a  $z_2 = \frac{10}{3}$ . Natíska sa otázka, ako by sme postupovali, pri hľadaní absolútneho vektora pravdepodobnosti, ak by korene determinantu matice  $\mathbf{E} - z\mathbf{P}$  boli viacnásobné či dokonca komplexne,

prípadne aj viacnásobné komplexné korene. Postup prezentovaný v predchádzajúcom príklade by zrejme nebol príliš úspešný.

## 2 ANALÝZA PROBLÉMU

Z vlastnosti výpočtu inverznej matice pomocou adjungovanej vyplýva, že prvky matice  $(\mathbf{E} - z\mathbf{P})^{-1}$  sú racionálne funkcie, ktorých stupeň polynómu v menovateli je nanajvýš rovný stupňu matice  $\mathbf{P}$  a čitateľ stupeň polynómu aspoň o jednotku menší než menovateľ. Aj po vynásobení vektora  $\mathbf{p}(0)$  maticou  $(\mathbf{E} - z\mathbf{P})^{-1}$  v tomto poradí dostaneme vektor, ktorého zložky sú racionálne funkcie.

Nech vytvárajúca funkcia niektorej zložky matice  $(\mathbf{E} - z\mathbf{P})^{-1}$  alebo zložky vektora

$\mathbf{p}(0)(\mathbf{E} - z\mathbf{P})^{-1}$  je racionálna funkcia

$$c_0 + c_1z + c_2z^2 + c_3z^3 + \dots = \frac{a_0 + a_1z + a_2z^2 + \dots + a_mz^m}{b_0 + b_1z + b_2z^2 + \dots + b_nz^n}, \quad (7)$$

kde  $m < n$ .

Zrejme  $b_0 \neq 0$  pretože nekonečný rad na ľavej strane rovnice (7) by nekonvergoval pre  $z = 0$ . Vynásobením rovnice (7) menovateľom výrazu na pravej strane tohto vzťahu a porovnaním výrazov pri rovnakých mocninách na oboch stranách rovnice dostaneme

$$\begin{aligned} b_0c_0 &= a_0 \\ b_0c_1 + b_1c_0 &= a_1 \\ &\vdots \\ b_0c_m + b_1c_{m-1} + \dots + b_m c_0 &= a_m \\ b_0c_{m+1} + b_1c_m + \dots + b_{m+1}c_0 &= 0 \\ b_0c_{m+2} + b_1c_{m+1} + \dots + b_{m+2}c_0 &= 0 \\ &\vdots \\ b_0c_n + b_1c_{n-1} + b_2c_{n-2} + \dots + b_n c_0 &= 0 \\ &\vdots \\ b_0c_{n+k} + b_1c_{n+k-1} + b_2c_{n+k-2} + \dots + b_n c_k &= 0, \text{ pre } k \geq 1. \end{aligned} \quad (8)$$

Z prvých  $n$  rovníc môžeme vypočítať hodnoty  $c_0, c_1, \dots, c_{n-1}$ . Ďalšie rovnice vo vzťahu (8) sú diferenčné rovnice, resp. jedna homogénna lineárna diferenčná rovnica  $n$ -tého rádu s konštantnými koeficientmi.

Úloha, nájsť obraz racionálnej funkcie na pravej strane vzťahu (7) sa pretransformovala na úlohu nájsť riešenie diferenčnej rovnice

$$b_0c_n + b_1c_{n-1} + b_2c_{n-2} + \dots + b_n c_0 = 0, \quad (9)$$

pri vypočítaných začiatočných podmienkach  $c_0, c_1, \dots, c_{n-1}$ . Inými slovami, nájsť partikulárne riešenie diferenciálnej rovnice (9) so začiatočnými podmienkami  $c_0, c_1, \dots, c_{n-1}$  znamená nájsť vytvárajúcu funkciu postupnosti  $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$ . Techniky riešenia takýchto diferenciálnych rovníc môže čitateľ nájsť napríklad v publikácii [6], str. 208 – 212.

**Príklad 2.** Vypočítajme vytvárajúce funkcie zložiek postupnosti vektora pravdepodobnosti Markovovho reťazca z príkladu 1, využijúc riešenie príslušnej diferenciálnej rovnice.

*Riešenie.*

Najskôr vypočítame zložky vektora  $\mathbf{p}(1)$ .

$$\mathbf{p}(1) = (1; 0) \begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 \\ 0,3 & 0,7 \end{pmatrix} = (0,6; 0,4)$$

Počítajme

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{f}}(z) &= \mathbf{p}(0)(\mathbf{E} - z\mathbf{P})^{-1} = \\ &= (1; 0) \begin{pmatrix} \frac{10 - 7z}{3z^2 - 13z + 10} & \frac{4z}{3z^2 - 13z + 10} \\ \frac{3z}{3z^2 - 13z + 10} & -\frac{6z - 10}{3z^2 - 13z + 10} \end{pmatrix} \\ &= \left( \frac{10 - 7z}{3z^2 - 13z + 10}; \frac{4z}{3z^2 - 13z + 10} \right) \end{aligned} \quad (10)$$

Z porovnania vzťahov (9), (10) vyplýva, že sa žiada riešiť diferenciálna rovnica

$$10c_{n+2} - 13c_{n+1} + 3c_n = 0 \quad (11)$$

so začiatočnými podmienkami  $c_0 = 1$ ,  $c_1 = \frac{3}{5}$  (pre prvú zložku vektora  $\mathbf{p}(n)$ ).

Charakteristická rovnica diferenciálnej rovnice je

$$10\lambda^2 - 13\lambda + 3 = 0$$

a jej korene sú  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = \frac{3}{10}$ .

Pre všeobecné riešenie diferenciálnej rovnice (11) dostávame

$$c_n = K_1 \cdot 1^n + K_2 \cdot \left(\frac{3}{10}\right)^n = K_1 + K_2 \cdot \left(\frac{3}{10}\right)^n.$$

Ak zohľadníme začiatočné podmienky pre prvú zložku, t. j.  $c_0 = 1$ ,  $c_1 = \frac{3}{5}$ , dostaneme systém rovníc

$$\begin{aligned} 1 &= K_1 + K_2 \\ \frac{3}{5} &= K_1 + K_2 \cdot \frac{3}{10}, \end{aligned}$$

ktorého riešením je

$$K_1 = \frac{3}{7}, \quad K_2 = \frac{4}{7}.$$

Partikulárne riešenie pre prvú zložku absolútneho vektora pravdepodobností po  $n$  krokoch je

$$c_n = \frac{3}{7} + \frac{4}{7} \cdot \left(\frac{3}{10}\right)^n = \mathbf{p}_1(n).$$

Podobne dostaneme pre druhú zložku (ak zohľadníme začiatočné podmienky, t. j.  $(c_0 = 0, c_1 = \frac{2}{5})$ )

$$c_n = \frac{4}{7} - \frac{4}{7} \cdot \left(\frac{3}{10}\right)^n = \mathbf{p}_2(n).$$

Celý výpočet môžeme jednoducho realizovať v open source programe Maxima.

Skôr než začneme výpočty s diferenciálnymi rovnicami v systéme Maxima, musíme si privolať procedúru na riešenie rekurentných postupností príkazom `load(solve_rec)`, resp. `load("solve_rec")`. Postup výpočtu je zrozumiteľne prezentovaný skriptom v nasledujúcom obrázku (výstupe z Maximy)

**Obr. 1:** Výstup riešenia príkladu 2 v open source programe Maxima.

```
(%i1) load("solve_rec")$
(%i2) rec: 10*c[n+2]-13*c[n+1]+3*c[n]=0;
(%o2) 10 c_{n+2} - 13 c_{n+1} + 3 c_n = 0
(%i3) solve_rec(rec, c[n]);
(%o3) c_n = \frac{{\%k_1} 3^n}{10^n} + {\%k_2}
(%i4) solve_rec(rec, c[n], c[0]=1, c[1]=3/5);
(%o4) c_n = \frac{4 3^n}{7 10^n} + \frac{3}{7}
(%i5) solve_rec(rec, c[n], c[0]=0, c[1]=2/5);
(%o5) c_n = \frac{4}{7} - \frac{4 3^n}{7 10^n}
```

Z predchádzajúcich výpočtov v Maxime vyplýva, že vektor absolútnych pravdepodobností

$$\begin{aligned} \mathbf{p}(n) &= \left( \frac{3}{7} + \frac{4}{7} \cdot \left( \frac{3}{10} \right)^n ; \frac{4}{7} - \frac{4}{7} \cdot \left( \frac{3}{10} \right)^n \right) = \\ &= \left( \frac{3}{7}; \frac{4}{7} \right) + \left( \frac{4}{7} \cdot \left( \frac{3}{10} \right)^n ; -\frac{4}{7} \cdot \left( \frac{3}{10} \right)^n \right), \end{aligned} \quad (12)$$

ktoré je, ako vidíme, možné rozdeliť na súčet dvoch vektorov. Prvý v poradí vo vzťahu (12) určuje stacionárnu zložku vektora absolútnych pravdepodobností. Druhý závisí od počtu krokov  $n$  a zároveň nám vyjadruje „rýchlosť konvergencie“ vektora  $\mathbf{p}(n)$ , k vektoru stacionárnych pravdepodobností

$$\left( \frac{3}{7}; \frac{4}{7} \right).$$

Vypočítajme zo vzťahu (6) ešte maticu  $\mathbf{F}(n)$ .

Nájdime postupnosť, ktorej vytvárajúcou funkciou je racionálna funkcia

$$\tilde{\mathbf{F}}(z)_{1,1} = \frac{10 - 7z}{3z^2 - 13z + 10},$$

ktorá sa nachádza v prvom riadku a v prvom stĺpci matice (6).

Začiatocné podmienky príslušnej diferenciálnej rovnice môžeme určiť napríklad z Taylorovho rozvoja

$$c_0 = \tilde{\mathbf{F}}(0)_{1,1} = 1, \quad c_1 = (\tilde{\mathbf{F}}(0)_{1,1})' = \frac{3}{5}$$

alebo z mocnín matice prechodu

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^0 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{P}^1 &= \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{3}{10} & \frac{7}{10} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Dostávame  $c_0 = 1, c_1 = \frac{3}{5}$  a diferenciálnu rovnicu, ktorú sme už riešili predtým. Jej riešením je

$$c_n = \frac{3}{7} + \frac{4}{7} \cdot \left( \frac{3}{10} \right)^n = \mathbf{F}_{1,1}$$

Vypočítajme ešte napríklad  $\mathbf{F}_{2,2}$ :

$$c_0 = 1, c_1 = \frac{7}{10}.$$

Riešením diferenciálnej rovnice

$$10c_{n+2} - 13c_{n+1} + 3c_n = 0$$

s vyššie uvedenými začiatočnými podmienkami je

$$c_n = \frac{3^{1+n}}{7 \cdot 10^n} + \frac{4}{7} = \mathbf{F}_{2,2}.$$

Podobným spôsobom vypočítame ostatné zložky matice  $\mathbf{F}(n)$ . Dostaneme

$$\mathbf{F}(n) = \begin{pmatrix} \frac{3}{7} + \frac{4}{7} \cdot \left(\frac{3}{10}\right)^n & \frac{4}{7} - \frac{4 \cdot 3^n}{7 \cdot 10^n} \\ \frac{3}{7} - \frac{3^{1+n}}{7 \cdot 10^n} & \frac{3^{1+n}}{7 \cdot 10^n} + \frac{4}{7} \end{pmatrix}.$$

**Príklad 3.** ([3], str. 142) Nájdime vektor absolútnych pravdepodobností Markovovoho reťazca, ktorý je daný maticou prechodu

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{3}{20} & \frac{1}{20} \\ \frac{9}{10} & \frac{1}{20} & \frac{1}{20} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a vektorom začiatočných pravdepodobností  $\mathbf{p}(0) = (1; 0; 0)$ .

**Riešenie.** Vieme, že vytvárajúca postupnosť jednotlivých zložiek vektorov pravdepodobností je racionálna funkcia, ktorej menovateľ má stupeň nanajvyš rovný  $n$  a stupeň čitateľa bude nanajvyš rovný  $n - 1$ , kde  $n$  je stupeň matice  $\mathbf{P}$ , v našom prípade  $n = 3$ . Vypočítajme ešte

$$\mathbf{p}(1) = \mathbf{p}(0)\mathbf{P} = \left( \frac{4}{5} \quad \frac{3}{20} \quad \frac{1}{20} \right).$$

Nájdime obraz vektora  $\mathbf{p}(n)$

$$\begin{aligned} & \mathbf{p}(0)(\mathbf{E} - z\mathbf{P})^{-1} \\ &= (1,0,0) \begin{pmatrix} \frac{10z - 200}{19z^2 + 170z - 200} & -\frac{30z}{19z^2 + 170z - 200} & \frac{z}{19z^2 - 39 * z + 20} \\ \frac{180z}{19z^2 + 170z - 200} & \frac{160z - 200}{19z^2 + 170z - 200} & \frac{z}{19z^2 - 39 * z + 20} \\ 0 & 0 & \frac{1}{1 - z} \end{pmatrix} = \\ &= \left( \frac{10z - 200}{19z^2 + 170z - 200} \quad \frac{10z - 200}{19z^2 + 170z - 200} \quad \frac{z}{19z^2 - 39 * z + 20} \right). \end{aligned}$$

Nasledujúci skript prezentuje výpočet vektora absolútnych pravdepodobností (vzoru vektora  $\mathbf{p}(n)$ ) použitím open source systému Maxima

**Obr. 2:** Výpočet jednotlivých zložiek absolútneho vektora pravdepodobností v Maxime z príkladu 3.

```
(%i1) load("solve_rec")$
(%i2) p[0]:matrix([1,0,0]);
(%o2) [1 0 0]
(%i3) p[1]:matrix([4/5,3/20,1/20]);
(%o3) [ 4/5  3/20  1/20 ]
(%i4) rec:200*c[n+2]-170*c[n+1]-19*c[n]=0;
(%o4) 200 c_{n+2} - 170 c_{n+1} - 19 c_n = 0
(%i5) for i:1 while i<=2 do
      print(solve_rec(rec,c[n],c[0]=p[0][1,i],c[1]=p[1][1,i]));
c_n = 6/7 * 19^n / 20^n + (-1)^n / 7 * 10^n
c_n = 19^n / 7 * 20^n - (-1)^n / 7 * 10^n
(%o5) done
(%i6) rec:20*c[n+2]-39*c[n+1]+19*c[n]=0;
(%o6) 20 c_{n+2} - 39 c_{n+1} + 19 c_n = 0
(%i7) solve_rec(rec,c[n],c[0]=p[0][1,3],c[1]=p[1][1,3]);
(%o7) c_n = 1 - 19^n / 20^n
```

Vypočítali sme vektor absolútnych pravdepodobností

$$\begin{aligned} \mathbf{p}(n) &= \left( \frac{6}{7} \cdot \left( \frac{19}{20} \right)^n + (-1)^n \cdot \frac{1}{7} \cdot \left( \frac{1}{10} \right)^n; \frac{1}{7} \cdot \left( \frac{19}{20} \right)^n - (-1)^n \cdot \frac{1}{7} \cdot \left( \frac{1}{10} \right)^n; 1 - \left( \frac{19}{20} \right)^n \right) = \\ &= (0; 0; 1) + \left( \frac{6}{7} \cdot \left( \frac{19}{20} \right)^n + (-1)^n \cdot \frac{1}{7} \cdot \left( \frac{1}{10} \right)^n; \frac{1}{7} \cdot \left( \frac{19}{20} \right)^n - (-1)^n \cdot \frac{1}{7} \cdot \left( \frac{1}{10} \right)^n; \left( \frac{19}{20} \right)^n \right). \end{aligned}$$



Z výpočtu vyplýva, že v tomto prípade „rýchlosť konvergencie“ vektora  $\mathbf{p}(n)$  k stacionárnemu vektoru pravdepodobností  $(0; 0; 1)$  je relatívne pomalá (avšak stále exponenciálneho typu, nie polynomickeho), pretože najväčší základ  $\frac{19}{20}$  vo vyjadrení  $\mathbf{p}(n)$  je blízko jednotky.

Prezentovaný postup môžeme uplatniť aj v prípade, že determinant matice  $\mathbf{E} - z\mathbf{P}$  má komplexné alebo násobné korene. Úspešnosť riešenia takejto úlohy, s využitím softvéru Maxima, závisí iba od toho, či spomínaný softvér dokáže vyriešiť diferenciálne rovnice vyplývajúce zo vzťahu  $\mathbf{p}(\mathbf{0})(\mathbf{E} - z\mathbf{P})^{-1}$ .

Postup riešenia v prípade komplexných koreňov ilustrujeme na nasledujúcom príklade.

**Príklad 4.** Nájdime vektor absolútnych pravdepodobností Markovovho reťazca, ktorý je daný maticou prechodu

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & 0 & \frac{1}{5} \\ \frac{9}{10} & 0 & \frac{1}{10} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

a vektorom začiatočných pravdepodobností  $\mathbf{p}(\mathbf{0}) = (1; 0; 0)$ .

**Riešenie.** Vypočítame maticu  $(\mathbf{E} - z\mathbf{P})^{-1}$ :

$$(\mathbf{E} - z\mathbf{P})^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-50 + 20z + z^2}{z^3 - 11z^2 + 60z - 50} & -\frac{2z^2}{z^3 - 11z^2 + 60z - 50} & -\frac{10z}{z^3 - 11z^2 + 60z - 50} \\ \frac{16z^2 - 45z}{z^3 - 11z^2 + 60z - 50} & -\frac{50 - 60z + 12z^2}{z^3 - 11z^2 + 60z - 50} & -\frac{5z + 5z^2}{z^3 - 11z^2 + 60z - 50} \\ -\frac{20z + 9z^2}{z^3 - 11z^2 + 60z - 50} & \frac{8z^2 - 10z}{z^3 - 11z^2 + 60z - 50} & \frac{40z - 50}{z^3 - 11z^2 + 60z - 50} \end{pmatrix}$$

Samotný výpočet vektoru absolútnych pravdepodobností realizujeme opäť v open source programe Maxima.

**Obr. 3:** Výpočet vektora absolútnych pravdepodobností z príkladu 4.

```
(%i1) load("solve_rec")$

(%i2) P:matrix([4/5,0,1/5],[9/10,0,1/10],[2/5,1/5,2/5]);

(%o2) 
$$\begin{bmatrix} \frac{4}{5} & 0 & \frac{1}{5} \\ \frac{9}{10} & 0 & \frac{1}{10} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix}$$


(%i3) p[0]:matrix([1,0,0]);

(%o3) 
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$


(%i4) for i:1 while i<=2 do
      print(concat("p[" ,i,"]="),p[i]:p[i-1].P);

p[1]= 
$$\begin{bmatrix} \frac{4}{5} & 0 & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$


p[2]= 
$$\begin{bmatrix} \frac{18}{25} & \frac{1}{25} & \frac{6}{25} \end{bmatrix}$$


(%o4) done

(%i5) rec:-50*c[n+3]+60*c[n+2]-11*c[n+1]+c[n]=0;

(%o5)  $-50 c_{n+3} + 60 c_{n+2} - 11 c_{n+1} + c_n = 0$ 

(%i6) /* Riešenie v komplexnom tvare */
      for i:1 while i<=3 do
      print(solve_rec(rec,c[n],c[0]=p[0][1,i],c[1]=p[1][1,i],c[2]=p[2][1,i]));

c_n = 
$$\frac{(1-\%i)^n (6+13 \%i)}{41 10^n} - \frac{(1+\%i)^n (13 \%i - 6)}{41 10^n} + \frac{29}{41}$$


c_n = 
$$-\frac{(1-\%i)^n (1+9 \%i)}{41 10^n} + \frac{(1+\%i)^n (9 \%i - 1)}{41 10^n} + \frac{2}{41}$$


c_n = 
$$-\frac{(1-\%i)^n (5+4 \%i)}{41 10^n} + \frac{(1+\%i)^n (4 \%i - 5)}{41 10^n} + \frac{10}{41}$$


(%o6) done
```

```
(%i7) /* Riešenie v reálnom tvare */
      for i:1 while i<=3 do
      print(expand(ratsimp(realpart
      (solve_rec(rec,c[n],c[0]=p[0][1,i],c[1]=p[1][1,i],c[2]=p[2][1,i]))));

$$c_n = \frac{13 \cdot 2^{1+\frac{n}{2}} \sin\left(\frac{\pi n}{4}\right)}{41 \cdot 10^n} + \frac{3 \cdot 2^{2+\frac{n}{2}} \cos\left(\frac{\pi n}{4}\right)}{41 \cdot 10^n} + \frac{29}{41}$$


$$c_n = -\frac{9 \cdot 2^{1+\frac{n}{2}} \sin\left(\frac{\pi n}{4}\right)}{41 \cdot 10^n} - \frac{2 \cdot 2^{1+\frac{n}{2}} \cos\left(\frac{\pi n}{4}\right)}{41 \cdot 10^n} + \frac{2}{41}$$


$$c_n = -\frac{2 \cdot 2^{3+\frac{n}{2}} \sin\left(\frac{\pi n}{4}\right)}{41 \cdot 10^n} - \frac{5 \cdot 2^{1+\frac{n}{2}} \cos\left(\frac{\pi n}{4}\right)}{41 \cdot 10^n} + \frac{10}{41}$$

      (%o7) done
```

Dostali sme vektor absolútnych pravdepodobností vyjadrený v komplexnom tvare

$$\mathbf{p}(n) = \left(\frac{29}{41} \quad \frac{2}{41} \quad \frac{10}{41}\right) + \left(\frac{6+13i}{41} \left(\frac{1-i}{10}\right)^n - \frac{13i-6}{41} \left(\frac{1+i}{10}\right)^n; \quad -\frac{1+9i}{41} \left(\frac{1-i}{10}\right)^n + \frac{9i-1}{41} \left(\frac{1+i}{10}\right)^n; \quad -\frac{5+4i}{41} \left(\frac{1-i}{10}\right)^n + \frac{4i-5}{41} \left(\frac{1+i}{10}\right)^n\right)$$

a v reálnom tvare (po krátkej úprave)

$$\mathbf{p}(n) = \left(\frac{29}{41} \quad \frac{2}{41} \quad \frac{10}{41}\right) + \left(\frac{1}{5\sqrt{2}}\right)^n \left(\frac{12}{41} \cos\left(n\frac{\pi}{4}\right) + \frac{26}{41} \sin\left(n\frac{\pi}{4}\right); \quad -\frac{2}{41} \cos\left(n\frac{\pi}{4}\right) - \frac{18}{41} \sin\left(n\frac{\pi}{4}\right); \quad -\frac{10}{41} \cos\left(n\frac{\pi}{4}\right) - \frac{8}{41} \sin\left(n\frac{\pi}{4}\right)\right).$$

Pre ilustráciu vypočítajme  $\mathbf{p}(5)$  pomocou iterácií a explicitného vyjadrenia  $\mathbf{p}(n)$ .

$$\mathbf{p}(3) = \mathbf{p}(2)\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 177 & 6 & 61 \\ 250 & 125 & 250 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{p}(4) = \mathbf{p}(3)\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 442 & 61 & 61 \\ 625 & 1250 & 250 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{p}(5) = \mathbf{p}(4)\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 8841 & 61 & 3049 \\ 12500 & 1250 & 12500 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{p}_1(5) = \frac{(1-i)^5(6+13i)}{4100000} - \frac{(1+i)^5(13i-6)}{4100000} + \frac{29}{41} = \frac{8841}{12500}$$

$$\mathbf{p}_2(5) = -\frac{(1-i)^5(1+9i)}{4100000} + \frac{(1+i)^5(9i-1)}{4100000} + \frac{2}{41} = \frac{61}{1250}$$

$$\mathbf{p}_3(5) = -\frac{(1-i)^5(5+4i)}{4100000} + \frac{(1+i)^5(4i-5)}{4100000} + \frac{10}{41} = \frac{3049}{12500}$$

$$\mathbf{p}_1(5) = \left(\frac{1}{5\sqrt{2}}\right)^5 \left(\frac{12}{41} \cos\left(5\frac{\pi}{4}\right) + \frac{26}{41} \sin\left(5\frac{\pi}{4}\right)\right) + \frac{29}{41} = \frac{8841}{12500}$$

$$\mathbf{p}_2(5) = \left(\frac{1}{5\sqrt{2}}\right)^5 \left(-\frac{2}{41} \cos\left(5\frac{\pi}{4}\right) - \frac{18}{41} \sin\left(5\frac{\pi}{4}\right)\right) + \frac{2}{41} = \frac{61}{1250}$$

$$\mathbf{p}_3(5) = \left(\frac{1}{5\sqrt{2}}\right)^5 \left(-\frac{10}{41} \cos\left(5\frac{\pi}{4}\right) - \frac{8}{41} \sin\left(5\frac{\pi}{4}\right)\right) + \frac{10}{41} = \frac{3049}{12500}$$

Vidíme, že postup riešenia s podporou open source systému je prehľadnejší a podstatne jednoduchší, čo sa týka náročnosti.

Je dôležité poznamenať, že pokiaľ by nám stačilo poznať iba hodnotu vektora absolútnych pravdepodobností pre niektoré konkrétne  $n$ , resp. pre všetky  $n \leq n_0$ , kde  $n_0$  je nejaké prirodzené číslo, je podstatne jednoduchšie využiť vhodný program, ktorý generuje iterácie vektorov absolútnych pravdepodobností.

Následné uvádzame dva takéto skripty v open source programe Maxima

**Obr. 4:** Výpočet vektora/vektorov absolútnych pravdepodobností pomocou iterácií. Prvý skript zahŕňa prvé štyri príkazy. Druhý sa odlišuje od prvého iba posledným príkazom, ktorý nahradíme v poradí štvrtým príkazom.

```
[ --> /* Zadať maticu pravdepodobností prechodu*/
      P:matrix(...)

[ --> /* Zadať začiatkový vektor pravdepodobností*/
      p[0]:matrix(...)

[ --> /* Zadať hodnotu začiatkovej iterácie*/
      n0:...

[ --> /* Dostaneme iba výpis jednej hodnoty*/
      p:p[0]
      for n:1 while n<=n0 do p:p.P
      p
```

```

--> /* Dostaneme výpis všetkých hodnôt od n = 1 do n = n0*/
for n:1 while n<=n0 do
(p[n]:p[n-1].P,
print("p(",n,")=" ,p[n]))
    
```

**Príklad 5.** Nech

$$P = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 & 0 \\ 0,8 & 0 & 0,2 \\ 0 & 0,8 & 0,2 \end{pmatrix}$$

je matica pravdepodobností prechodu v bonus-malus systéme ([1], str. 203). Poistenec sa nachádza v druhej bonus-malus triede. Určme vektor absolútnych pravdepodobností a vypočítajte vektor stacionárnych pravdepodobností a pravdepodobnosť s akou sa bude poistenec nachádzať v jednotlivých bonus-malus triedach po piatich rokoch.

**Riešenie.** Najjednoduchší výpočet posledných dvoch úloh je pomocou iterácií, použitím vyššie uvedeného programu s výpisom iba poslednej iterácie. Dostaneme

$$p(5) = (0,76288; 0,1856; 0,05152).$$

Vektor stacionárnych pravdepodobností budeme aproximovať vektorom  $p(100)$ . Dostaneme

$$p(100) = (0,7619047619047643; 0,1904761904761911; 0,04761904761904777).$$

Výpočet explicitného vyjadrenia vektora  $p(n)$  dáva

$$(E - zP)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-25 + 5z + 4z^2}{4z^3 - 4z^2 - 25z + 25} & \frac{z^2 - 5z}{4z^3 - 4z^2 - 25z + 25} & \frac{z^2}{4z^3 - 4z^2 - 25z + 25} \\ \frac{4z^2 - 20z}{4z^3 - 4z^2 - 25z + 25} & \frac{25 - 25z + 4z^2}{4z^3 - 4z^2 - 25z + 25} & \frac{4z^2 - 5z}{4z^3 - 4z^2 - 25z + 25} \\ \frac{16 \cdot z^2}{4z^3 - 4z^2 - 25z + 25} & \frac{16 \cdot z^2 - 20 \cdot z}{4z^3 - 4z^2 - 25z + 25} & \frac{-25 + 20 \cdot z + 4z^2}{4z^3 - 4z^2 - 25z + 25} \end{pmatrix}$$

$$(0;1;0)(E - zP)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{4z^2 - 20z}{4z^3 - 4z^2 - 25z + 25} & \frac{25 - 25z + 4z^2}{4z^3 - 4z^2 - 25z + 25} & \frac{4z^2 - 5z}{4z^3 - 4z^2 - 25z + 25} \end{pmatrix}.$$

Vektor absolútnych pravdepodobností určíme tak, ako v predchádzajúcich príkladoch využitím procedúry "solve\_rec" v Maxime. Dostaneme

$$p(n) = \begin{pmatrix} \frac{16}{21} & \frac{4}{21} & \frac{1}{21} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{2^n}{3 \cdot 5^n} - \frac{3(-2)^n}{7 \cdot 5^n} & \frac{2^{n-1}}{3 \cdot 5^n} - \frac{9(-2)^{n-1}}{7 \cdot 5^n} & \frac{2^{n-1}}{3 \cdot 5^n} + \frac{3(-2)^{n-1}}{7 \cdot 5^n} \end{pmatrix}.$$

odkiaľ vieme priamo vypočítať presnú hodnotu vektora stacionárnych pravdepodobností, ktorá je  $\begin{pmatrix} \frac{16}{21} & \frac{4}{21} & \frac{1}{21} \end{pmatrix}$ .

Vypočítajme ešte chybu aproximácie vektora stacionárnych pravdepodobností vektorom  $\mathbf{p}(100)$ .

$$\begin{pmatrix} \frac{16}{21} & \frac{4}{21} & \frac{1}{21} \end{pmatrix} - (0,7619047619047643 \quad 0,1904761904761911 \quad 0,04761904761904777) = \\ = (-2,442490654175344 \cdot 10^{-15} \quad -6,38378239159465 \cdot 10^{-16} \quad -1,52655665885959 \cdot 10^{-16}).$$

## Záver

V práci boli prezentované dve metódy vyjadrenia vektora pravdepodobností Markovovho reťazca a to exaktná metóda jeho explicitného vyjadrenia a výpočtom pomocou iterácií. Pri explicitnom vyjadrení boli využité diferenčné rovnice a ich riešenie s podporou open source systému Maxima. Ukázali sme, že presnosť výpočtu vektora stacionárnych pravdepodobností aproximatívnym výpočtom pomocou iterácií (použitím dostatočného počtu operácií) dosahuje požadovanú presnosť.

## Kľúčové slovo

Markovove reťazce, vytvárajúce funkcie, vektor absolútnych pravdepodobností, diferenčné rovnice, Maxima – open source program

**Klasifikácia JEL:** C02, C10

**Klasifikácia MSC (Mathematics Subject Classification):** 60J10

**Príspevok bol spracovaný v rámci riešenia grantovej úlohy VEGA č. 1/0806/14: Kalkulácia SCR na krytie rizík neživotného poistenia v súlade s potrebami praxe.**

## LITERATÚRA

- [1] Fecenko, J. (2012) *Neživotné poistenie*. Ekonóm, Bratislava, ISBN 798-80-225-3400-0
- [2] Horáková, G. – Huťka, V. (2012) *Teória pravdepodobnosti 1*, Ekonóm, Bratislava, ISBN 978-80-225-2888-7
- [3] Huťka, V. (2002) *Teória pravdepodobnosti 2*, Ekonóm, Bratislava, ISBN 80-225-1573-6
- [4] Janková, K. – Kilianová, S. – Brunovský, P. – Bokes, P. (2015) *Markovové reťazce a ich aplikácie*. Epos, Bratislava, ISBN: 97-880-5620-075-9
- [5] Leydold, J. – Petry, M. (2016) *Introduction to Maxima for Economics, Institute for Statistics and Mathematics*, WU Wien <http://statmath.wu.ac.at/~leydold/maxima/> (prístup 20.4.2016)
- [6] Peller, F. – Pinda, L. – Fecenko, J. (2001) *Matematika 3*, IURA EDITION, Bratislava, ISBN 80-88715-97-0

- [7] Pfeiffer, P.E. (1990) *Probability for Applications*, Springer, New-York, ISBN-13: 978-1-4615-7678-5
- [8] Sakalová, K. (2014) *Difference equations in Life Insurance Mathematics*. Managing and modelling of financial risks: 7<sup>th</sup> international scientific conference, PTS I-III Pages: 684-690, Ostrava
- [9] Skřivánková, V. (2004) *Náhodné procesy a ich aplikácie*, UPJŠ Košice, ISBN 80-7097-542-3

## RESUMÉ

Pomocou Markovových reťazcov je možné modelovať nepreberné množstvo úloh každodennej reality. Cieľom príspevku je prezentovať širšie možnosti použitia vytvárajúcich funkcií pre analýzu Markovových reťazcov s využitím teórie diferenčných rovníc a s podporou open source systému Maxima. Práca prezentuje originálnu metódu určovania explicitného vyjadrenia vektora absolútnych pravdepodobností v Markovových reťazcoch vytvorenú jedným z autorom príspevku. Zaoberá sa tiež výpočtom spomínaného vektora pravdepodobností iteračnou metódou a porovnáva presnosť odhadu vektora stacionárnych pravdepodobností touto metódou s exaktným výpočtom pomocou explicitného vyjadrenia.

## SUMMARY

### Use generating functions in the analysis of Markov chains

Markov chains can be modeled many of tasks of everyday reality. The aim of this paper is to present extensive opportunities of applications generating functions for the analysis of Markov chains using the theory of difference equations with supporting open source system Maxima and also to present an original method of determining an explicit expression a vector of absolute probabilities of Markov chains. It in addition deals with the calculation of said probability vector using an iterative method and compares the accuracy of the estimate vector stationary probability mentioned method with exact calculations using explicit expression.

## Kontakt

Fecenko, Jozef, doc. RNDr., CSc., Katedra matematiky a aktuárstva, Fakulta hospodárskej informatiky, Ekonomická univerzita v Bratislave, Dolnozemska cesta 1, 852 35 Bratislava, tel. +421 2/672 95 814,  
e-mail: [jozef.fecenko@euba.sk](mailto:jozef.fecenko@euba.sk)

Frisová Simona, Ing., Asseco Central Europe, a. s., Trenčianska 56/A, 821 09 Bratislava, tel.: +421 220 838 611, [simona.frisova@asseco-ce.com](mailto:simona.frisova@asseco-ce.com)

---

*Marián Goga*

## **NIEKTORÉ PROBLÉMY MATEMATICKÉHO MODELOVANIA SÚŤAŽNÝCH PONUKOVÝCH STRATÉGIÍ**

### **Úvod**

Ekonomická prax prináša stále nové a zložitejšie problémy, ktoré treba riešiť v procese ekonomického rozhodovania. Určitým nedostatkom štandardných prístupov k matematickému modelovaniu rozhodovacích situácií je, že sú založené na monokriteriálnej účelovej funkcii a majú spravidla deterministický charakter. Reálne rozhodovacie procesy však obyčajne vyžadujú, aby sa pri rozhodovaní bralo do úvahy viac hľadísk súčasne.

V praxi často vznikajú situácie, v ktorých sa účastník musí rozhodnúť pre vhodnú stratégiu, aby dosiahol zo svojho pohľadu čo najlepší výsledok. Ak jeho rozhodnutie závisí aj od rozhodnutí iných účastníkov, otvára sa priestor na použitie poznatkov z teórie hier [5], [21]. Jej náplňou je modelovať široký okruh rozhodovacích úloh v konfliktných situáciách. Každá takáto situácia (hra, súťaž) je určená účastníkmi (ich počtom), danými pravidlami, poradím rozhodovania účastníkov, ich informovanosťou, vplyvom ich rozhodnutí na výsledok hry a preferenciami jednotlivých výsledkov. Konflikty sú špeciálnym prípadom rôznych rozhodovacích situácií, v ktorých dochádza k stretu záujmov účastníkov, ktorí v nich vystupujú. Bezprostredné ekonomické aplikácie teórie maticových hier sú podmienené antagonistickým charakterom modelovaných konfliktných situácií.

Pri rozhodovaní v konfliktných situáciách je nevyhnutné brať do úvahy aj konanie druhej strany - „protihráča“. Výsledkom správneho rozboru takýchto situácií je odporúčanie zvoliť taký postup (stratégiu), ktorý by pri akomkoľvek konaní protihráča zaručil určitý dosiahnuteľný výsledok [3], [14], [17].

Základný princíp takéhoto postupu sa nachádza aj pri ponukových súťažiach, v ktorých efektívnosť rozhodnutia jednej strany (jedného účastníka) závisí od rozhodnutí druhej strany (druhého účastníka). Metódy, ktoré uvádzame v článku sa zaoberajú oblasťou správania sa dvoch konkurentov v ponukovej súťaži. Obsahom súťaže sú ponuky na získanie práva na vlastníctvo alebo možnosti vykonávať určité služby. Konkurenti (ponúkajúci) súťažia o získanie práva alebo výkonov podľa



pravidiel určených štátom (zákonom) [22], [23] alebo organizáciou (osobou), ktorá ponuku vyvoláva.

Predmetom súťažnej ponuky v rôznej forme môžu byť: kontrakty, koncesie, patentové licencie, cenné predmety atď. Súťaž vo všeobecnosti môže prebiehať formou dražby, aukcie, konkurzov, obstarávania, predkladaných privatizačných projektov a pod.

V odbornej literatúre [6], [4] sa v podstate vyskytujú dva typy súťažných ponukových situácií. Prvý typ ponuky tvorí *otvorená ponuka* alebo *dražba*, v ktorej dvaja alebo viacerí ponúkajúci (záujemcovia) pokračujú v otvorených ponukách na nejaký hodnotný predmet (objekt) až dotedy, kým nikto nechce ďalej zvýšiť ponuku. Posledná ponuka je potom víťaznou ponukou. Druhý typ tvorí *uzavretá ponuka*, v ktorej nezávisle dvaja alebo viacerí ponúkajúci ponúkajú svoje ponuky na získanie práva na vlastníctvo alebo na výkon služieb. Vo väčšine prípadov sa povoľuje len jedna ponuka na jedného súťažiaceho a posudzovateľ prijíma najvyššiu alebo najnižšiu ponuku, podľa toho, ako to určujú pravidlá súťaže [16], [2], [19], [20].

V článku analyzujeme dve relatívne jednoduché situácie na otvorenú ponuku a na uzavretú ponuku a uvedieme tvar modelu, ktorým je možné vyhodnocovať súťažné ponuky. Ide o modely orientované na maximalizáciu rozdielu ziskov a maximalizáciu očakávaného zisku pri otvorenej a zatvorenej ponuke a model na vyhodnocovanie súťažných ponúk.

## 1 MAXIMALIZÁCIA ROZDIELU ZISKOV (OTVORENÁ PONUKA)

Preskúmame najskôr jednoduchú situáciu, v ktorej je záujem o dva cenné predmety (obrazy) so známymi hodnotami  $C_1$  a  $C_2$ . Ide teda o dražbu (aukciu) cenných predmetov. Predpokladajme, že sú len dvaja ponúkajúci A a B, ktorí majú na svoju ponuku k dispozícii určité množstvo peňazí  $S_A$  a  $S_B$ . Ďalej predpokladajme, že  $S_A$  a  $S_B$  sú menšie ako  $(C_1 + C_2)$  a že platí

$$\frac{1}{2} < \frac{S_A}{S_B} < 2.$$

Predpokladáme tiež, že ponúkajúci A pozná množstvo peňazí, ktoré má ponúkajúci B k dispozícii. Keďže chceme určiť optimálnu stratégiu ponúkajúceho A, nemusíme sa zaoberať tým, či ponúkajúci B pozná množstvo  $S_A$ .

Ponúkajúci A chce vedieť, kedy má prestať vo zvyšovaní ponuky na prvý predmet. Pri riešení tejto úlohy je veľmi dôležité, aký je cieľ ponúkajúceho A pri určovaní ponúk. Zvyčajným cieľom je dosiahnuť maximálny celkový zisk. Je teda možné, že A

sa bude snažiť, aby celkový zisk B bol minimálny. Tento cieľ môže pre A znamenať maximalizovanie čistého rozdielu medzi ziskom A a ziskom B. Obidva ciele – maximalizácia celkového zisku a maximalizácia čistého rozdielu ziskov – vedú k rôznym optimálnym stratégiám. Našu analýzu najskôr zameriame na hľadanie optimálnej stratégie pri maximalizovaní rozdielu ziskov  $Z_A - Z_B$  v otvorenej ponuke, kde  $Z_A$  je zisk ponúkajúceho A a  $Z_B$  je zisk ponúkajúceho B [15], [6].

Predpokladajme, že ponúkajúci B ponúkol  $x$  eur za jeden z dvoch predmetov na predaj. Vieme, že najmenšie zvýšenie ponuky je  $\Delta$ . Ponúkajúci A sa musí rozhodnúť, či ponúkne  $x + \Delta$ , alebo nechá B zvíťaziť s ponukou  $x$ . Situácia vedie A k rozhodovaniu medzi dvoma stratégiami:

1. Ak A nechá B získať prvý predmet za  $x$  eur, B bude mať  $S_B - x$  eur na druhý predmet. Keďže  $S_A > S_B - x$  (toto vyplýva z predpokladu, že  $\frac{1}{2} < \frac{S_A}{S_B} < 2$  a A a B sú racionálni súťažiaci), vtedy A má istotu, že získa druhý predmet za  $S_B - x + \Delta$ .

Keď A nechá B získať prvý predmet za  $x$  eur, potom pre zisk A a B platí

$$Z_A = C_2 - (S_B - x + \Delta)$$

$$Z_B = C_1 - x.$$

Rozdiel medzi ziskom A a B je:

$$Z_A - Z_B = (C_2 - S_B + x - \Delta) - (C_1 - x) = C_2 - S_B - C_1 + 2x - \Delta.$$

2. Ak ponúkajúci A ponúkne  $x + \Delta$  a ponúkajúci B ho nechá získať prvý predmet pri tejto ponuke, potom zisk A a B bude

$$Z'_A = C_1 - (x + \Delta)$$

$$Z'_B = C_2 - [S_A - (x + \Delta) + \Delta].$$

Keďže A bude mať po prvom obchode len  $S_A - (x + \Delta)$  eur, B získa druhý predmet za  $S_A - (x + \Delta) + \Delta$  a rozdiel medzi ziskom A a ziskom B je potom

$$Z'_A - Z'_B = [C_1 - (x + \Delta)] - [C_2 - S_A + x] = C_1 - C_2 + S_A - 2x - \Delta.$$

Uvedené dve stratégie vedú k predbežnému záveru: ponúkajúci A nechá ponúkajúceho B prvý predmet za  $x$  eur vtedy, keď rozdiel medzi ziskom A a ziskom B je väčší ako rozdiel, ktorý vznikne v prípade, že A bude ponúkať viac a ponúkne  $x + \Delta$ .

Druhú stratégiu ponúkajúci A zvolí vtedy, ak je splnená podmienka, že

$$Z_A - Z_B \leq Z'_A - Z'_B,$$

čiže

$$(C_2 - S_B + x - \Delta) - (C_1 - x) \leq (C_1 - x - \Delta) - (C_2 - S_A + x),$$

alebo po úprave

$$4x \leq 2C_1 - 2C_2 + S_A + S_B.$$

Situácia, že ponúkajúci A ponúkne  $x + \Delta$  eur za prvý predmet nastane vtedy, keď

$$x \leq \frac{2.(C_1 - C_2) + (S_A + S_B)}{4}.$$

Ak v tejto situácii predpokladáme, že ponúkajúci B je racionálny a ponúka čestne, potom ponúkajúci A je nútený ponúkať až po hodnotu  $x$ , ktorú charakterizuje rovnica:

$$x = \frac{2.(C_1 - C_2) + (S_A + S_B)}{4}.$$

Rozdiel medzi ziskom A a ziskom B sa zistí dosadením tejto hodnoty  $x$  do rovnice  $Z'_A - Z'_B$ , z ktorej potom vyplynie, že

$$Z'_A - Z'_B = \frac{S_A - S_B}{2} - \Delta.$$

Ak  $\Delta \rightarrow 0$ , potom rozdiel v ziskoch nezávisí od výšky peňazí, ktoré sa v súťaži ponúkli, ale závisí len od rozdielu množstva peňazí, ktoré mali ponúkajúci na začiatku k dispozícii [6], [11].

Individuálny zisk A je za týchto podmienok

$$Z'_A = \frac{C_1 + C_2}{2} - \frac{S_A + S_B}{4} - \Delta.$$

Teraz uvidíme číselnú ilustráciu týchto problémov.

Predpokladajme, že sa na aukcii (dražbe) predávajú cenné predmety. Ponúkajúci A má k dispozícii 10 000 eur a ponúkajúci B 11 000 eur. Obidvaja vedia, koľko eur má ten druhý k dispozícii.

Nech B ponúkne za prvý z dvoch predmetov 6 000 eur. Ponúkajúci A sa musí rozhodnúť, či má alebo nemá ponúknuť 6 100 eur.

Z podmienky

$$x \leq \frac{2.(C_1 - C_2) + (S_A + S_B)}{4}$$

vyplýva, že A ponúkne 6 100 eur vtedy, ak platí

$$6\,000 \leq \frac{2.(C_1 - C_2) + (10\,000 + 11\,000)}{4}.$$

Ďalej predpokladajme, že A hodnotí prvý predmet na 7 500 eur a druhý predmet na 10 000 eur. Potom

$$\frac{2.(7\,500 - 10\,000) + (10\,000 + 11\,000)}{4} = 4\,000 < 6\,000.$$

Z uvedeného vyplýva, že ponúkajúci A by nemal ponúknuť viac ako 4 000 eur za prvý predmet.

Možno povedať, že dve stratégie ponúkajúceho A by viedli k dvom rozdielnym výsledkom:

1. Ponúkajúci A nechá získať prvý predmet ponúkajúcemu B za 6 000 eur a bude si istý, že získa druhý predmet za nie viac ako

$$S_B - x + \Delta = 11\,000 - 6\,000 + 100 = 5\,100 \text{ eur.}$$

Potom čistý zisk A by bol  $C_2 - (S_B - x + \Delta) = (10\,000 - 5\,100) = 4\,900$  eur a čistý zisk B by bol  $C_1 - x = (7\,500 - 6\,000) = 1\,500$  eur. Ponúkajúci A by teda volil lepšiu stratégiu ako ponúkajúci B, pretože rozdiel čistých ziskov  $Z_A - Z_B$  je  $(4\,900 - 1\,500) = 3\,400$  eur v prospech A.

2. Keď však ponúkajúci A zvolí druhú stratégiu a ponúkne 6 100 eur za prvý predmet, pričom ponúkajúci B ho nechá zviťaziť v ponuke, potom čistý zisk A je  $Z'_A = C_1 - (x + \Delta) = 7\,500 - (6\,000 + 100) = 1\,400$  eur.

Ponúkajúci B získa druhý predmet za  $(S_A - (x + \Delta) + \Delta) = (10\,000 - 6\,100 + 100) = 4\,000$  eur a čistý zisk B je potom  $Z'_B = C_2 - [S_A - (x + \Delta) + \Delta] = 10\,000 - 4\,000 = 6\,000$  eur.

V tomto prípade by volil lepšiu stratégiu ponúkajúci B, pretože rozdiel čistých ziskov  $Z'_A - Z'_B$  je  $(1\,400 - 6\,000) = -4\,600$  eur v neprospech A, ale v prospech B.

Poznamenávame, že v oboch prípadoch predpokladáme rovnaké ohodnotenie predmetov zo strany oboch ponúkajúcich. Keby B určil iné ohodnotenie predmetov ako A, potom relatívna výhoda tejto druhej stratégie by nebola pre neho taká istá [4].

## 2 MAXIMALIZÁCIA OČAKÁVANÉHO ZISKU (OTVORENÁ PONUKA)

V druhej časti článku preskúmame prípad, keď cieľom ponúkajúceho A je maximalizácia vlastného očakávaného zisku.

Predpokladáme, že A ponúkne  $x + \Delta$  eur za prvý predmet vtedy, keď jeho očakávaný zisk je väčší alebo sa rovná očakávanému zisku ako v prípade, že B získa prvý predmet za  $x$  eur, t. j.

$$Z'_A \geq Z_A, \text{ čiže } C_1 - (x + \Delta) \geq C_2 - (S_B - x + \Delta), \text{ alebo po úprave, keď}$$

$$x \leq \frac{C_1 - C_2 + S_B}{2}.$$

Analogická úvaha platí aj o druhom ponúkajúcom B, t. j. B ponúkne  $x + \Delta$  eur za prvý predmet vtedy, keď platí

$$x \leq \frac{C_1 - C_2 + S_A}{2}.$$

Ak predpokladáme, že obaja ponúkajúci A a B ponúkajú čestne, potom ich konečná ponuka bude zmenšená o hodnotu  $\Delta$ . Vyplýva to z toho, že:

a) Keď  $S_A > S_B$ , zisk ponúkajúceho A zistíme dosadením  $\frac{C_1 - C_2 + S_B}{2}$  namiesto  $x$  na

ľavej strane nerovnice  $C_1 - (x + \Delta) \geq C_2 - (S_B - x + \Delta)$ .

Dostaneme  $Z'_A = \frac{C_1 + C_2 - S_B}{2} - \Delta$ , ( $S_A > S_B$ ).

b) Keď  $S_A < S_B$ , zisk A sa nájde dosadením  $\frac{C_1 - C_2 + S_A}{2}$  namiesto  $x$  na ľavú stranu tej

istej nerovnice  $C_1 - (x + \Delta) \geq C_2 - (S_B - x + \Delta)$ , pričom dostaneme  $Z'_A = \frac{C_1 + C_2 - S_A}{2} -$

$\Delta$ , ( $S_A \leq S_B$ ).

Poznamenávame, že analogické úvahy platia aj pre ponúkajúceho B.

Z uvedených úvah vyplýva, že hodnota zisku ponúkajúceho A, t. j.  $Z'_A$  v prípade maximalizácie očakávaného zisku je väčšia ako hodnota jeho zisku v prípade maximalizácie rozdielu zisku A a zisku B [6].

Aj tu uvedieme číselnú ilustráciu týchto problémov.

Preskúmame teraz tú istú situáciu, ako sme ju opísali v predchádzajúcej ilustrácii. Cieľom ponúkajúceho A však bude maximalizovanie jeho očakávaného zisku (netýka sa ho priamo, koľko získa B). Výpočtami sme zistili, že:

a) Keď B získa prvý predmet za 6 000 eur a A dostane druhý predmet za 5 100 eur, potom hodnota zisku A je  $(10\,000 - 5\,100) = 4\,900$  eur.

b) Keď A získa prvý predmet za 6 100 eur, potom hodnota jeho zisku je  $(7\,500 - 6\,100) = 1\,400$  eur.

Teda najlepšia stratégia z oboch prípadov je vtedy, keď hodnota zisku A je 4 900 eur.

Pri použití vzťahu  $x \leq \frac{C_1 - C_2 + S_B}{2}$ , za predpokladu, že cieľom A je maximalizovanie jeho očakávaného zisku zistíme, že  $\frac{7\,500 - 10\,000 + 11\,000}{2} = 4\,250$  eur, z čoho vyplýva, že ponúkajúci A by nemal ponúkať viac ako 4 250 eur za prvý predmet.

Z analýzy v prvej a druhej ilustrácii vyplýva pre ponúkajúceho A, že:

- v prípade maximalizovania rozdielu čistých ziskov by A nemal ponúknuť viac ako 4 000 eur za prvý predmet,
- v prípade maximalizovania svojho očakávaného zisku by A nemal ponúknuť viac ako 4 250 eur za prvý predmet.

Odlíšne hodnoty vyplývajú z odlišnosti cieľov.

### 3 VÝBER STRATÉGIE PRI UZAVRETEJ PONUKE (DVAJA ÚČASTNÍCI)

Analýza situácie v tejto časti článku je podobná ako analýza v predchádzajúcich častiach, s tým rozdielom, že na dva cenné predmety s hodnotou  $C_1$  a  $C_2$  dávajú súčasne dvaja ponúkajúci A a B svoje ponuky, pričom každý z nich dáva dve uzavreté ponuky. Aby sme situáciu zjednodušili, predpokladáme, že A aj B majú k dispozícii na obidva predmety každý po  $S$  eur a  $S < (C_1 + C_2)$ . V prípade nerozhodného výsledku predpokladáme, že o výhercovi rozhodne hod mincou.

Uvažujme o ponúkajúcom A, ktorý zostavil dve ponuky  $P_1$  a  $P_2$  na dva predmety. Keď budú ponuky úspešné, potom zisk bude pri oboch predmetoch rovnaký. Teda,  $Z$  je celkový zisk, spojený s úspešnou ponukou  $Z = \frac{C_1 + C_2 - S}{2}$ .

Hodnoty ponúk ponúkajúceho A majú tvar:

$$P_1 = C_1 - Z = \frac{C_1 - C_2 + S}{2}, (C_1 - C_2 + S \geq 0),$$

$$P_2 = C_2 - Z = \frac{C_2 - C_1 + S}{2}, (C_2 - C_1 + S \geq 0).$$

Poznamenávame, že ak niektorá hodnota ponuky je záporná, potom sa táto hodnota mení na nulu a ponuka všetkých použiteľných prostriedkov sa presúva na druhý predmet.

Analogickým spôsobom sa určí aj optimálna stratégia ponúkajúceho B.

V prípade, že sa ponúkajúci B odchýli od tejto stratégie a bude ponúkať napríklad  $C_1 - Z + \delta$  za prvý predmet a  $C_2 - Z - \delta$  za druhý predmet, potom A získa druhý predmet a B získa prvý predmet. Zisk oboch ponúkajúcich však bude rozdielny:

$$Z_B = C_1 - (C_1 - Z + \delta) = Z - \delta,$$

$$Z_A = C_2 - (C_2 - Z) = Z.$$

Zisk ponúkajúceho A je teda väčší o hodnotu  $\delta$  ako zisk ponúkajúceho B. Tým, že A zvolí optimálne stratégie  $P_1$  a  $P_2$  získa aspoň zisk  $Z$  a zároveň zabráni ponúkajúcemu B dosiahnuť viac ako  $Z$ .

Aj tieto problémy ilustrujeme číselne.

Predpokladajme, že obaja ponúkajúci A a B majú k dispozícii po 10 000 eur. Ostatné číselné údaje sú podobné ako v oboch predchádzajúcich číselných ilustráciách. Ponúkajúci A zvolí tieto dve ponuky:

$$\text{a) za prvý predmet ponúkne: } P_1 = \frac{7\,500 - 10\,000 + 10\,000}{2} = 3\,750 \text{ eur,}$$

$$\text{b) za druhý predmet ponúkne: } P_2 = \frac{10\,000 - 7\,500 + 10\,000}{2} = 6\,250 \text{ eur.}$$

Jeho zisk v obidvoch prípadoch (keby vyhral) je:

$$Z_A^1 = 7\,500 - 3\,750 = 3\,750 \text{ eur}$$

$$Z_A^2 = 10\,000 - 6\,250 = 3\,750 \text{ eur.}$$

To znamená, že v oboch prípadoch dosiahne rovnaký zisk. Takáto istá stratégia je najlepšou stratégiou aj pre ponúkajúceho B. Keď to obaja zistia, potom získanie predmetov bude závisieť od hodenia mince, teda od náhody.

Poznamenávame, že v prípade, ak je disponibilná suma peňazí u ponúkajúcich A a B rôzna a počet predmetov je väčší ako dva, problém sa stáva zložitejším. Riešenie – najlepšia stratégia sa však dá nájsť analyticky. Podobne k zložitým výpočtom dochádza v prípade, ak sa v súťaži zúčastní  $n$  účastníkov so svojimi uzavretými ponukami [6], [14], [9], [10].

#### 4 MODEL NA VYHODNOCOVANIE SÚŤAŽNÝCH PONÚK

V tejto časti článku analyzujeme možnosti využitia matematického modelovania pri výbere a vyhodnocovaní súťažných ponúk v rámci verejného obstarávania. Postupovým krokom jednotlivých metód obstarávania vždy predchádza výber metódy obstarávania, ktorý má charakter základného postupového kroku. Z hľadiska procesných postupov je pri každej metóde obstarávania najdôležitejšia ich diferenciácia v rámci jednotlivých druhov obstarávania a racionalizácia týchto postupov.

Zákon o verejnom obstarávaní dáva k dispozícii možnosť použiť tri základné súťažné metódy obstarávania (verejná súťaž, užšia súťaž, rokovacie konanie so zverejnením a súťažný dialóg), jednu nesúťažnú metódu obstarávania (rokovacie konanie bez zverejnenia, neformálne označované ako priame zadanie) a racionalizačné doplnujúce formy základných súťažných metód (elektronické obstarávanie tovarov, rámcové zmluvy, spoločné obstarávanie a elektronická aukcia) [22], [19].

Pri výbere metódy obstarávania treba prioritne pri každom prípade obstarávania posúdiť možnosť použiť metódu verejnej súťaže. Metóda verejnej súťaže sa vo všeobecnosti považuje za univerzálne vhodnú pre väčšinu prípadov obstarávania a vyberá sa preto vždy, ak nie sú vážne prekážky na jej úspešné využitie v danom prípade obstarávania. Iné metódy obstarávania sa volia len vtedy, ak sú na splnenie cieľa daného obstarávania evidentne výhodnejšie. Dôvodmi pre nepoužitie metódy verejnej súťaže môžu byť napríklad obava z neúmerne vysokého počtu záujemcov so snahou znížiť ich počet (v tom prípade sa volí metóda užšej súťaže), alebo neschopnosť dostatočne špecifikovať predmet obstarávania (v tom prípade sa volí metóda rokovacieho konania so zverejnením), alebo mimoriadna zložitosť prípadu obstarávania (v tom prípade sa volí metóda súťažného dialógu) [19].

V procese verejného obstarávania verejný obstarávateľ uvádza v súťažných podkladoch spôsob uplatnenia kritérií na vyhodnotenie ponúk – pravidlá na hodnotenie kritérií podľa § 34, ods. 9 zákona o verejnom obstarávaní [22]. Na základe uplatnenia

kritérií na vyhodnotenie ponúk verejný obstarávateľ stanoví poradie ponúk. Ak sú ponuky vyhodnocované na základe najnižšej ceny, poradie ponúk sa stanoví od najnižšej ceny po najvyššiu. Ak hodnotenie ponúk prebieha na základe ekonomicky najvýhodnejšej ponuky, verejný obstarávateľ musí vypracovať model na vyhodnocovanie ponúk [13].

Vychádzajúc z matematického modelu, poradie ponúk sa stanoví podľa súčtu všetkých bodov pridelených jednotlivým ponukám v rámci jednotlivých kritérií na hodnotenie ponúk. V zmysle zákona o verejnom obstarávaní sa nesmú používať zložité rovnice ako napr. kvadratické, kubické a iné. Odporúča sa použiť jasné, nediskriminačné a objektívne pravidlo, pri ktorom sa jednotlivé návrhy na plnenie kritérií dajú do pomeru s najlepšie hodnoteným návrhom v danom kritériu a následne sa vynásobia váhou daného kritéria.

Matematický tvar modelu používa dve hlavné kritériá hodnotenia, ku ktorým verejný obstarávateľ vypočítava bodové hodnoty: cenu ( $C$ ) a funkčnú charakteristiku ( $FCH$  – hodnotiace kritérium, ktoré si vybral verejný obstarávateľ a ktoré sa dá vyčíslieť).

Kritériá majú takýto tvar:

- cenové kritérium ( $C$ ):  
 čiastkové body za  $C = \frac{\text{ponuka s najnižšou číselnou hodnotou}}{\text{vyhodnocovaná ponuka}} \cdot \text{váha kritéria } C$ ,
- kritérium funkčnej charakteristiky ( $FCH$ ):  
 čiastkové body za  $FCH = \frac{\text{vyhodnocovaná ponuka}}{\text{ponuka s najvyššou číselnou hodnotou}} \cdot \text{váha kritéria } FCH$ ,
- celkový súčet: celkový počet bodov = čiastkové body za  $C$  + čiastkové body za  $FCH$ .

Aby sa predišlo situácii, keď uchádzač v záujme získať čo najvyšší počet bodov za kritérium  $FCH$  navrhne nereálny, resp. zbytočne vysoký návrh plnenia, môže verejný obstarávateľ stanoviť maximálny počet bodov, ktorý bude uchádzačom za dané kritérium na vyhodnotenie ponúk udelený. Túto informáciu je potrebné jasne uviesť v súťažných podkladoch [13].

Stanovenie kritérií na vyhodnotenie súťažných ponúk, spôsob ich uplatnenia a stanovenie ich váh vychádza z opisu predmetu zákazky, čo znamená, že tieto činnosti sú špecifické, a tým jedinečné pre jednotlivé predmety zákazky. Je potrebné aj jednoznačne určiť vzťah kritérií na vyhodnotenie ponúk k obchodným podmienkam plnenia predmetu zákazky (a budúcej zmluve). Plnenie predmetu zmluvy musí byť



stanovené v súlade s parametrami, podľa ktorých bol vybraný úspešný uchádzač v rámci procesu verejného obstarávania [9].

Uvedenú problematiku teraz ilustrujeme na číselnom prípade, v ktorom predpokladáme, že kritériami na vyhodnotenie ponúk sú cena (vypočítaná na základe celkových nákladov na vlastníctvo softvéru) a počet rokov, počas ktorých je produkt firmy na trhu. Do verejnej súťaže sa prihlásili dvaja uchádzači.

Nech verejný obstarávateľ stanovil na jednotlivé kritériá tieto váhy:

- cena = 70 % (kritérium  $K_1$ ),
- počet rokov, počas ktorých je produkt na trhu = 30 % (kritérium  $K_2$  - maximálna hodnota plnenia je 10 rokov).

Ak niektorý z uchádzačov ponúkne plnenie vybraného kritériá nad rámec stanoveného rozsahu, verejný obstarávateľ ho pozmení na určenú maximálnu hodnotu tohto plnenia (v druhom kritériu bolo maximálne obdobie ohraničené na desať rokov). To znamená, že uchádzač, ktorý preukáže napríklad pätnásťročné pôsobenie svojho produktu na trhu nezíska viac bodov ako ten, ktorý preukáže desaťročné pôsobenie. Verejný obstarávateľ zároveň určil, že v prípade rovnosti dosiahnutého počtu bodov u viacerých uchádzačov bude rozhodujúcim (pomocným) kritériom na určenie úspešného uchádzača cena.

Uchádzač A ponúkol na plnenie kritérií:  $K_1 = 2\,000$  eur a  $K_2 = 7$  rokov.

Uchádzač B ponúkol na plnenie kritérií:  $K_1 = 2\,500$  eur a  $K_2 = 14$  rokov.

Celkové vyhodnotenie výsledkov podľa uvedených návrhov na plnenie kritérií je takéto:

- pri ponuke uchádzača A:  $K_1 = \frac{2\,000}{2\,000} \cdot 70 = 70$  bodov,

$$K_2 = \frac{7}{10} \cdot 30 = 21 \text{ bodov,}$$

celkový počet bodov: 91.

- pri ponuke uchádzača B:  $K_1 = \frac{2\,000}{2\,500} \cdot 70 = 56$  bodov,

$$K_2 = \frac{10}{10} \cdot 30 = 30 \text{ bodov,}$$

celkový počet bodov: 86.

Uchádzačovi B sa v súlade s maximálnou hodnotou plnenia druhého kritéria záráta len 10 rokov (oproti deklarovaným 14 rokom).

Z vyhodnotenia vyplýva, že vo verejnej súťaži bol úspešným uchádzač A.

## Záver

V článku analyzované modelovacie prístupy k vyhodnocovaniu súťažných ponukových stratégií tvoria časť rozsiahlejšej problematiky, ktorá v sebe zahŕňa problémy modelovania napríklad multiplikatívnych ponukových stratégií, symetrických a asymetrických aukcií, statických a dynamických aukčných hier, strategických aukčných analýz a pod. Problematika sa stáva oveľa zložitejšou, keď sa do ponukovej súťaže zapojí veľký počet uchádzačov. Aby uchádzač (ponúkajúci) mohol zvoliť nejakú novú stratégiu je dôležité, aby mal v súťažnej ponuke jasne definovaný cieľ. Veľa rôznych stratégií v ponukovej súťaži vyplýva z veľa možných cieľov, napríklad zvýšiť celkový očakávaný zisk, získať aspoň určité percento investícií, znížiť očakávanú stratu, znížiť zisk súťažiacim konkurentom a pod. Niektoré z uvedených problémov sú súčasťou pripravovanej analýzy súťažných ponukových stratégií autora tohto článku.

## Kľúčové slová

Súťažná ponuka, otvorená a uzavretá ponuka, aukcia, dražba, stratégia, teória hier, maximalizácia zisku, vyhodnocovanie ponúk, verejné obstarávanie

## Klasifikácia JEL

C 02, C 79, D 44, D 49

## LITERATÚRA

- [1] ATHEY, S. – HAILE, P. A.: Identifikation of Standard Auction Models. In: *Econometrica*, 2002, Vol. 70, No. 6, s. 2107-2140.
- [2] FLASSIK, J. – NEMEC, J. – VLACH, J. – URSÍNY, D.: *Verejné obstarávanie na Slovensku*. Bratislava: CPHR – TIS, 2000, dostupné na internetovej stránke: [http://www.transparency.sk/studie/verejne\\_obstaravanie/](http://www.transparency.sk/studie/verejne_obstaravanie/).
- [3] FRIEDMAN, L.: A competitive Bidding Strategy. In: *Operations research*, 1956, Vol. 4, No. 1, s. 104-112.
- [4] GOGA, M.: *Kvantitatívny manažment*. Bratislava: IURA EDITION, 2000, ISBN 80-88715-85-7.
- [5] GOGA, M.: *Teória hier*. Bratislava: IURA EDITION, 2013, ISBN 978-80-8078-613-7.
- [6] CHURCHMAN, C. W. – ACKOFF, R. L. – ARNOFF, E. L.: *Introduction to Operations Research*. New York: John Wiley and Sons, 1957.

- 
- [7] JOFRE-BONET, M. – PESENDORFER, M.: Estimation of a Dynamic Auction Game. In: *Econometrica*, 2003, Vol. 71, No. 5, s. 1443-1489.
- [8] KAMIJO, Y.: Bidding Behaviors for a Keyword Auction in a Sealed-bid Environment. In: *Decision Support Systems*, 2013, Vol. 56, s. 371-378.
- [9] KLEMPERER, P.: *Auctions: Theory and Practice*. Princeton: Princeton University Press, 2004, [ISBN 0-691-11925-2](#).
- [10] KRISHNA, V.: *Auction Theory*. New York: Academic Press, 2002, [ISBN 978-0-12-426297-3](#).
- [11] McAFEE, R. P. – McMILLAN, J.: Auctions and Bidding. In: *Journal of Economic Literature*, 1987, Vol. 25, No. 2, s. 699-738.
- [12] MASKIN, E. – RILEY, J.: Asymmetric Auctions. In: *The Review of Economic Studies*, 2000, Vol. 67, No. 3, s. 413-438.
- [13] *Metodický pokyn pre verejné obstarávanie IKT: Príloha 3*, ([www.informatizacia.sk/ext\\_dok-metodicky\\_pokyn...priloha3/15179c](http://www.informatizacia.sk/ext_dok-metodicky_pokyn...priloha3/15179c)).
- [14] MILGROM, P. – WEBER, R.: A Theory of Auctions and Competitive Bidding. In: *Econometrica*, 1982, Vol. 50, No. 5, s. 1089-1122.
- [15] MYERSON, R.: Optimal Auction Design. In: *Mathematics of Operations Research*, 1981, Vol. 6, No. 1, s. 58-73.
- [16] PAVEL, J.: *Ekonomické aspekty verejných zakázek*. Praha: Oeconomica, 2007, ISBN 978-80-245-1260-0.
- [17] ROTHKOPF, M.: A Model of Rational Competitive Bidding. In: *Management Science*, 1969, Vol. 15, No. 7, s. 362-373.
- [18] ROTHKOPF, M.: On Multiplicative Bidding Strategies. In: *Operations Research*, 1980, Vol. 28, No. 3, Part 1, s. 570-575.
- [19] VLACH, J. – URSÍNY, D.: *Ako dobre a správne verejne obstarávať* (Praktická príručka – ako vybrať správne postupy a ako pri nich správne postupovať). Bratislava: CPHR – TIS, 2007, ISBN 978-80-89244-17-1.
- [20] VLACH, J. – NEMEC, J.: *Verejné obstarávanie v USA a v Európskej únii*. Bratislava: CPHR – TIS, 2001, ISBN 80-89041-06-X.
- [21] WILSON, R.: Strategic Analysis of Auctions. In: AUMANN, R. J. – HART, S. (eds.): *Handbook of Game Theory*. Amsterdam: North Holland Press, 1993.
- [22] *Zákon o verejnom obstarávaní č. 343/2015 Z. z.*
- [23] *Zákon o dobrovoľných dražbách č. 568/2007 Z. z. v znení neskorších predpisov*

## RESUMÉ

V článku autor analyzuje dve relatívne jednoduché situácie na otvorenú ponuku a na uzavretú ponuku a uvádza tvar modelu, ktorým je možné vyhodnocovať súťažné ponuky v rámci verejného obstarávania. Ide o modely orientované na maximalizáciu rozdielu ziskov a maximalizáciu očakávaného zisku pri otvorenej a zatvorenej ponuke a model na vyhodnocovanie súťažných ponúk. Výsledkom správneho rozboru takýchto situácií je odporúčanie zvoliť taký postup (stratégiu), ktorý by pri akomkoľvek konaní protihráča zaručil určitý dosiahnuteľný výsledok.

Základný princíp takéhoto postupu sa nachádza pri ponukových súťažiach, v ktorých efektívnosť rozhodnutia jednej strany (jedného účastníka) závisí od rozhodnutí druhej strany (druhého účastníka). Metódy, ktoré sú uvedené v článku sa zaoberajú oblasťou správania sa dvoch konkurentov v ponukovej súťaži. Obsahom súťaže sú ponuky na získanie práva na vlastníctvo alebo možnosti vykonávať určité služby. Konkurenti (ponúkajúci) súťažia o získanie práva alebo výkonov podľa pravidiel určených štátom (zákonom) alebo organizáciou (osobou), ktorá ponuku vyvoláva.

Predmetom súťažnej ponuky v rôznej forme môžu byť: kontrakty, koncesie, patentové licencie, cenné predmety atď. Súťaž vo všeobecnosti môže prebiehať formou dražby, aukcie, konkurzov, obstarávania, predkladaných privatizačných projektov a pod. Vo väčšine prípadov sa povoľuje len jedna ponuka na jedného súťažiaceho a posudzovateľ prijíma najvyššiu alebo najnižšiu ponuku, podľa toho, ako to určujú pravidlá a kritériá súťaže.

## SUMMARY

### **Some problems of mathematical modeling competitive bidding strategies**

In this article the author analyzes two relatively simple situations on the open and close bidding and states the model that can evaluate tenders within public procurement. It concerns the models focused on maximizing difference of profits and maximizing expected profit at the open and close tender and also the model for evaluation of tenders. The result of correct analysis of these situations is recommendation to choose such a procedure (strategy), which would guarantee a specific achievable outcome in any proceedings of opponent.

The basic principle of these steps is visible in case of tender competitors, in which the effectiveness of one party decision (one entrant) depends on decision of the other party (second entrant). The methods that are listed in this article dealing with a behavioral part of two competitors in tender competition. The content of the competition are bids to acquire ownership rights or capacity to perform certain services.

Competitors (candidates) compete to acquire rights or performances according to rules set up by state (law) or organization (entity) that offer raises.

The subject of competitive bidding may be in various form, as: contracts, licenses, patent licenses, valuables, etc. In general the competition can take the form of auction, tender, acquisition, submitted privatisation projects, etc. In most cases, it allows only one tender for each competitor and the judge accepts the highest or the lowest bid depending on the rules and criteria of the competition.

### **Kontakt**

doc. Ing. Marián Goga, CSc., Katedra operačného výskumu a ekonometrie, Fakulta hospodárskej informatiky, Ekonomická univerzita v Bratislave, tel: 0903 906 533, goga@euba.sk

*Eva Iglarčíková*

*Ľudovít Pinda*

## **MIERY FINANČNÉHO RIZIKA VaR A CVaR**

### **Úvod**

Regulačné reakcie na krízy, ktoré dlhodobo zužovali finančné podniky, sa stali podmetom pre použitie metód Value at Risk (VaR). Následkom Veľkej hospodárskej krízy v 30. rokoch 20. storočia americká organizácia Securities Exchange Commission (ďalej SEC)<sup>1</sup> požadovala, aby banky udržali svoje pôžičky pod špecifikovaným vlastným kapitálom. V priebehu nasledujúcich desaťročí banky dôkladne vymýšľali nové miery rizík a iné kontrolné opatrenia aby boli schopné spĺňať tieto kapitálové požiadavky.

So zvýšeným rizikom spojeným s trhmi s derivátmi a pohyblivým výmenným kurzom na začiatku 70. rokoch sa požiadavky pre kapitál spresnili. V dokumente Uniform Net Capital Rule (UNCR) SEC definoval dvanásť tried aktív, ktorými finančné podniky disponovali, vzhľadom na riziko, a upresnil kapitálové požiadavky pre každú z týchto tried. Finančné podniky navyše museli vykazovať svoj kapitál každý kvartál v reporte Financial and Operating Combined Uniform Single (FOCUS). V 1980 SEC upresnil kapitálové požiadavky vzhľadom na straty finančných podnikov, ktoré by vznikli s 95% spoľahlivosťou v priebehu 30 dňového intervalu pre každú triedu. V podstate SEC požadoval 30 dňový 95% odhad hodnoty VaR a dostatočný kapitál pre krytie potencionálnych strát v danom 30 dňovom intervale. Napriek prísnejším regulačným opatreniam sa obchodné portfólia investičných bánk a komerčných bánk stávali väčšie a nestálejšie. Preto boli potrebné sofistikovanejšie opatrenia na kontrolu a meranie rizík.

Do 90. rokov mnoho finančných podnikov vyvinulo základy VaR s mnohými možnosťami ako ho zmerať. Avšak až po nespočetných katastrofálnych stratách spojené s pákovým efektom medzi rokmi 1993 až 1995 a po krachu anglickej banky Barings Brothers v roku 1995, boli finančné podniky pripravené pre komplexnejšie miery rizika. V tomto období J. P. Morgan vyvinul celopodnikový systém merania rizika, ktorý dokázal pri zohľadnení veľkého množstva rizikových faktorov odhadnúť predpokladanú stratu z držby určitého portfólia aktív. Od tohto obdobia je VaR uznávaná miera rizika vo finančných službách podnikoch a dokonca sa začína akceptovať aj v nefinančných službách.

---

<sup>1</sup> Kľúčové pravidlá od SEC o kapitálových požiadavkách sú dostupné na internete: <[https://www.sec.gov/about/offices/oia/oia\\_market/key\\_rules.pdf](https://www.sec.gov/about/offices/oia/oia_market/key_rules.pdf)>

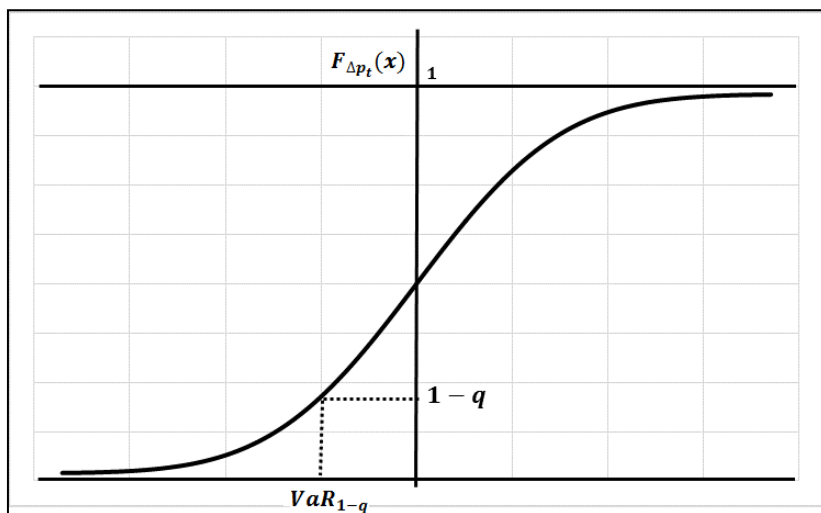
VaR vyjadruje maximálnu výšku straty, ktorá môže nastať s určitou pravdepodobnosťou za časový interval za predpokladu normálnych podmienok na trhu.<sup>2</sup> Napríklad, banka vykalkulovala denné VaR svojho obchodovateľného portfólia na 1 milión eur pre 99% hladinu spoľahlivosti. V prípade normálnych podmienok na trhu, len 1 % časového intervalu (v tomto prípade je časový interval jeden deň) denné straty prekročia 1 milión eur. Pod normálnymi podmienkami na trhu chápeme trh, ktorý nie je poznačený nečakanou udalosťou ako napríklad krízou. V praxi sa preferuje uvažovanie časového intervalu, ktorý je vyjadrený jednotkou – 1 deň, 1 týždeň alebo 1 rok.

VaR teda poskytuje finančnému rizikovému manažérovi hodnotu najhoršej možnej straty za určitý časový interval pre zvolenú hladinu spoľahlivosti. Inými slovami, VaR poskytuje manažérovi predstavu o tom, akú potencionálnu stratu môže očakávať za určitý časový interval. Všeobecne povedané, VaR predstavuje kvantil rozdelenia ziskov a strát za daný časový interval.

## 1 DEFINÍCIA VaR PRE JEDNO FINANČNÉ AKTÍVUM

Uvažujme aktívum, ktorého cenu vyjadruje  $p_t$  v čase  $t$ . Zmenu ceny tohto aktíva za časový interval  $[s, t]$  označíme  $\Delta p_{s,t}$  keď  $\Delta p_{s,t} = p_t - p_s$ . V prípade, že  $\Delta p_{s,t}$  je kladná, máme zisk, naopak, záporná hodnota indikuje stratu.

**Obrázok č. 1:** Grafická interpretácia  $VaR_{1-q}$  v súvislosti s distribučnou funkciou  $f_{\Delta p_t}(x)$



Zdroj: Vlastné spracovanie.

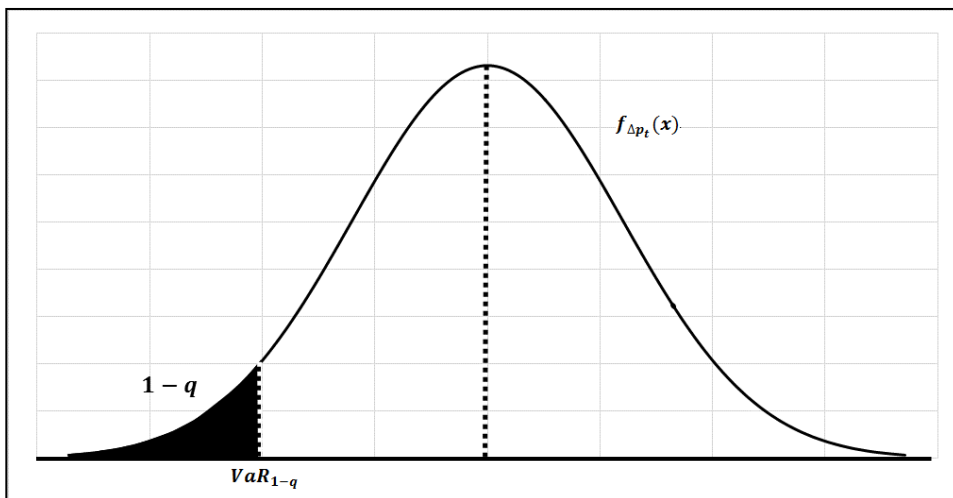
<sup>2</sup> JORION, P. 2006. *Value at Risk: The New Benchmark for Managing Financial Risk*. McGraw-Hill Education, 2006. s. 22. ISBN 978-0071464956

Predpokladáme, že cena aktíva sa vyvíja stacionárne, náhodná premenná  $\Delta p_{s,t}$  má pravdepodobnostné rozdelenie závislé len na časovom intervale, v ktorom je počítaná, s celkovou dobou trvania  $(t - s)$ . Interval  $[s, t]$  môžeme teda nahradiť intervalom  $[0, t - s]$  a dolný index premennej  $\Delta p$  nahradíme dobou trvania intervalu. Zmena ceny aktíva je potom definovaná ako  $\Delta p_t = p_t - p_0$ . VaR jedného aktíva vzhľadom na dobu trvania  $t$  a pravdepodobnosť  $q$  je definovaná ako také množstvo, že zmena  $\Delta p_t$  pozorovaná pre toto aktívum počas intervalu  $[0, t]$  bude menšia ako VaR s pravdepodobnosťou  $(1 - q)$

$$P(\Delta p_t \leq VaR_{1-q}) = 1 - q. \quad (1)$$

Ekvivalentný vzťah so vzťahom (1) je  $P(\Delta p_t > VaR_{1-q}) = q$ . Vyjadrením distribučnej funkcie  $F_{\Delta p_t}(x)$  a funkcie hustoty  $f_{\Delta p_t}(x)$  náhodnej premennej  $\Delta p_t$  dostaneme grafickú interpretáciu VaR znázornenú na obrázku č.1 a č.2.

**Obrázok č. 2:** Grafická interpretácia  $VaR_{1-q}$  pre funkciu hustoty.



Zdroj: Vlastné spracovanie.

Do definície VaR vstupujú dva parametre: čas  $t$  a pravdepodobnosť  $q$ . Ako už bolo naznačené v úvode, v praxi sa uvažuje s časovým intervalom napr. jeden deň či jeden týždeň. VaR bude potom vypočítaná ako funkcia  $q$ , ktorú označíme  $VaR_{1-q}$ . Presná definícia VaR je

$$VaR_{1-q} = \min\{V: P(\Delta p_t \leq V) \geq 1 - q\}. \quad (2)$$



Definícií VaR je niekoľko. Napríklad pri definovaní VaR môžeme brať do úvahy nielen zmenu v hodnote aktíva (absolútna hodnota v riziku), ale aj rozdiel medzi touto zmenou a očakávanou zmenou hodnoty aktíva. Ak je očakávaná zmena vyjadrená ako  $E(\Delta p_t)$ , dostávame definíciu pre relatívnu hodnotu v riziku, ktorú označíme  $VaR^*_{1-q}$

$$P(\Delta p_t - E(\Delta p_t) \leq VaR^*_{1-q}) = 1 - q.$$

Alternatívne

$$P(\Delta p_t > VaR^*_q + E(\Delta p_t)) = q.$$

Je zrejmé, že platí vzťah

$$VaR_{1-q} = VaR^*_{1-q} + E(\Delta p_t). \quad (3)$$

V špecifickom prípade, keď má náhodná premenná  $\Delta p_t$  normálne rozdelenie so strednou hodnotou  $E(\Delta p_t)$  a smerodajnou odchýlkou  $\sigma(\Delta p_t)$ , vzťah (1) môže prepísať do tvaru

$$P\left(\frac{\Delta p_t - E(\Delta p_t)}{\sigma(\Delta p_t)} \leq \frac{VaR_{1-q} - E(\Delta p_t)}{\sigma(\Delta p_t)}\right) = 1 - q.$$

Výraz  $\frac{VaR_{1-q} - E(\Delta p_t)}{\sigma(\Delta p_t)}$  predstavuje kvantil normálneho normovaného rozdelenia, ktorý označíme  $z_{1-q}$ .<sup>3</sup> Keďže pre kvantily normálneho normovaného rozdelenia platí  $z_{1-q} = -z_q$ ,  $VaR_{1-q}$  môžeme vyjadriť pomocou strednej hodnoty a smerodajnej odchýlky

$$VaR_{1-q} = E(\Delta p_t) - z_q \cdot \sigma(\Delta p_t). \quad (4)$$

Pre  $VaR^*$  analogicky platí vzťah za predpokladu normálneho rozdelenia

$$VaR^*_{1-q} = -z_q \cdot \sigma(\Delta p_t). \quad (5)$$

Ak potrebujeme vypočítať týždenné VaR na základe denných pozorovaní zmeny ceny (5 pracovných dní), náhodná premenná  $\Delta p^w$  (týždenná zmena ceny) bude vypočítané zo vzťahu

$$\Delta p^w = \Delta p_1^d + \Delta p_2^d + \Delta p_3^d + \Delta p_4^d + \Delta p_5^d \quad (6)$$

s charakteristikami

<sup>3</sup> Hodnoty  $z_{1-q}$  resp.  $z_q$  sa nachádzajú v tabuľkách, dostupné na internete: <http://www.fhi.sk/files/katedry/ks/tabulky.pdf>

$$E(\Delta p^w) = E(\Delta p_1^d) + E(\Delta p_2^d) + E(\Delta p_3^d) + E(\Delta p_4^d) + E(\Delta p_5^d),$$

$$\text{var}(\Delta p^w) = \text{var}(\Delta p_1^d) + \text{var}(\Delta p_2^d) + \text{var}(\Delta p_3^d) + \text{var}(\Delta p_4^d) + \text{var}(\Delta p_5^d).$$

V praxi sa niekedy používa jednoduchá konverzia hodnôt v riziku pre rôzne časové horizonty a spoľahlivosti.<sup>4</sup> Nech  $VaR^A$  označuje hodnotu v riziku odhadnutú pre časový horizont  $t_A$  a spoľahlivosť  $q_A$ . Hodnotu v riziku  $VaR^B$  pre časový horizont  $t_B$  a spoľahlivosť  $q_B$  je možné získať prepočítaním hodnoty  $VaR^A$  (tzv. konverzia, ktorá je exaktná len za predpokladu normality a nezávislosti jednotlivých časových horizontov, inak je len aproximatívna) pomocou vzťahu

$$VaR^B = \frac{z_{q_B}}{z_{q_A}} \cdot \sqrt{\frac{t_B}{t_A}} \cdot VaR^A.$$

Value at Risk predstavuje jeden z nástrojov, ktoré môže finančný manažér využiť pri prijímaní rozhodnutí v prostredí poznačenom určitou mierou rizika. Vypovedacia schopnosť VaR, teda poskytnúť informáciu o maximálnej novej strate, ktorá nebude prekročená pri určitej pravdepodobnosti, je do istej miery závislá od kvantity a kvality historických dát a prípadne taktiež od dodržania istej formy rozdelenia pravdepodobnosti.

## 2 CVaR – PODMIENENÁ HODNOTA V RIZIKU

Hodnota v riziku je síce užitočná miera rizika, ale neposkytuje informácie o výškach strát, ktoré prekročia vypočítané VaR. O podmienenej hodnote v riziku (ozn. CVaR) sa preto často uvažuje ako o alternatíve ku hodnote v riziku. Iné názvy pre CVaR sú expected shortfall, mean shortfall alebo tail VaR.<sup>5</sup> CVaR poskytuje dodatočnú informáciu o stratách na chvoste rozdelenia náhodnej premennej, ktoré prekročili VaR. Matematicky je CVaR definovaná ako

$$CVaR_{1-q} = E(X | X \leq VaR_{1-q}), \quad (7)$$

alebo ekvivalentne pre spojitý prípad

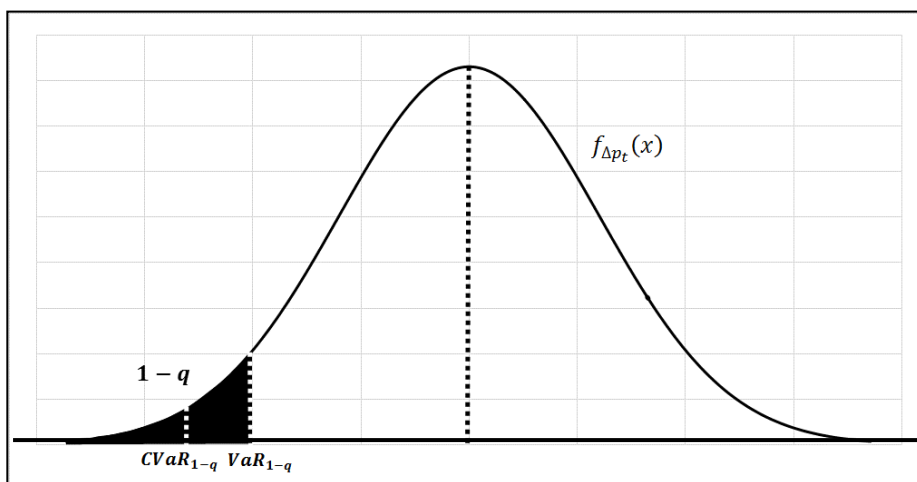
<sup>4</sup> CIPRA, T. 2015. *Riziko ve financích a pojišťovnictví: Basel III a Solvency II*. Praha : Ekopress, 2015. s. 209. ISBN 978-80- 87865-24-8

<sup>5</sup> LETMARK, M. 2010. *Robustness of Conditional Value-at-Risk (CVaR) when measuring market risk across different asset classes* : master's thesis. [online]. Stockholm : KTH, 2010. s. 12. [cit. 1.4.2016]. Dostupné na internete:

<<http://www.math.kth.se/matstat/seminarier/reports/M-exjobb10/100308a.pdf>>

$$CVaR_{1-q} = \frac{1}{1-q} \int_{-\infty}^{VaR_{1-q}} x f(x) dx.$$

**Obrázok č. 3:**  $CVaR_{1-q}$  – grafická interpretácia



Zdroj: Vlastné spracovanie.

Z definície je jasné, že podmienená hodnota v riziku je menšia (výnimočne rovná) ako samotná hodnota v riziku (menšia v tomto prípade znamená, že opisuje väčšie straty ako  $VaR_{1-q}$ ). Hlavným rozdielom medzi  $VaR_{1-q}$  a  $CVaR_{1-q}$  je hlavne fakt, že  $CVaR_{1-q}$  je koherentná miera, a teda spĺňa vlastnosť subaditivity, ktorá v špecifických prípadoch neplatí pre VaR.

### 3. APLIKÁCIA VaR A CVaR NA AKCIOVÝ INDEX DAX

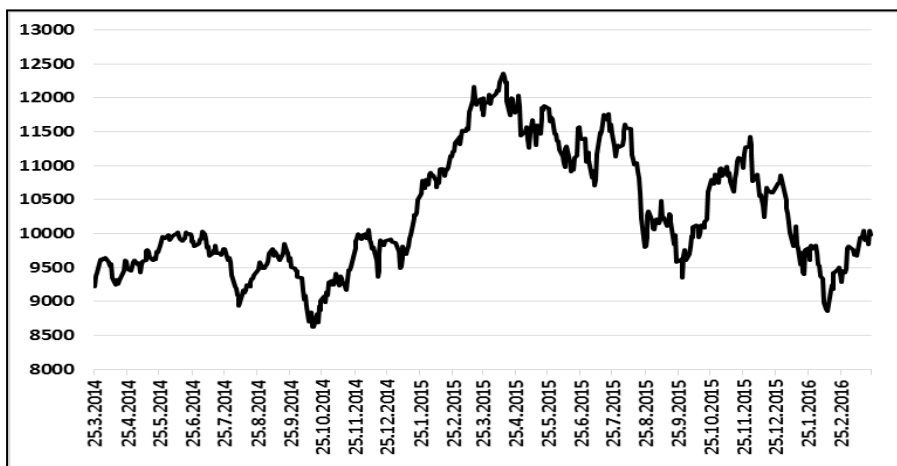
Pre výpočet použijeme historické údaje cien akciového indexu DAX<sup>6</sup> z obdobia 23.3.2014 až 23.3.2016, čo predstavuje 506 údajov. Jednotlivé hodnoty indexu sú zobrazené na obrázku č. 4. DAX index (Deutscher Aktien IndeX) tvorí 30 najvýznamnejších firiem (napríklad Adidas, SAP či Siemens) obchodovaných na frankfurtskej burze zo segmentu blue chip<sup>7</sup>. Index sa počíta od 30. decembra 1987 a jeho počiatočná hodnota bola stanovená na 1000 bodov. Späťne boli prepočítané historické

<sup>6</sup> Dostupné na internete: <<http://finance.yahoo.com>>

<sup>7</sup> Blue chips sú prvotriedne, "spoľahlivé" cenné papiere (najmä akcie); s ktorých kúpou sa spája menšie riziko. Konkrétne môže ísť buď o akcie podnikov s (dlhodobou) vysokým obratom a vysokou trhovou kapitalizáciou, alebo o akcie veľkých, medzinárodne uznávaných podnikov.

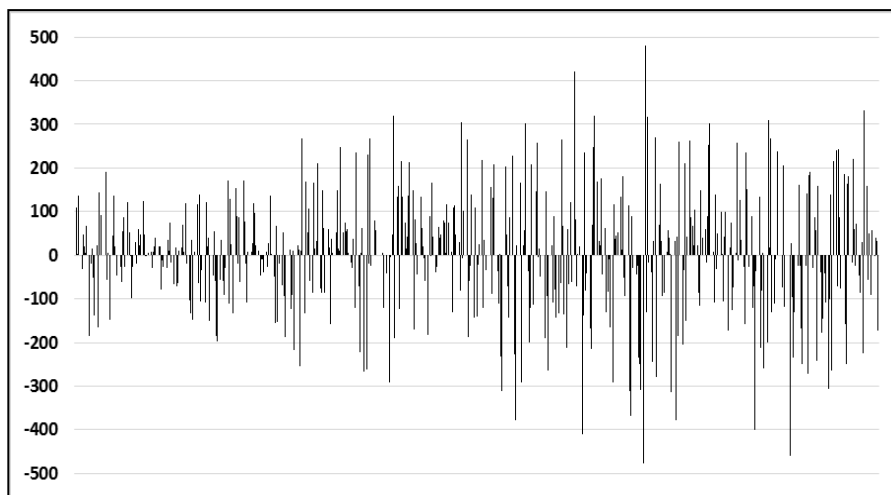
dáta až do roku 1959. VaR budeme počítať pre rôznu hladinu spoľahlivosti a taktiež pre rôzne časové horizonty. Pre výpočet VaR sme najprv vypočítali zmenu hodnoty indexu, ktorá je zobrazená na obrázku č. 5.

**Obrázok č. 4:** Vývoj hodnoty akciového indexu DAX



Zdroj: Vlastné spracovanie.

**Obrázok č. 5:** Výška dennej zmeny hodnoty akciového indexu DAX



Zdroj: Vlastné spracovanie.

VaR budeme počítat pre 3 hladiny spoľahlivosti (95 %, 97,5 % a 99 %) a pre 4 časové intervaly (1 deň, 5 dní, 10 dní a 20 dní<sup>8</sup>). Pre použitie vzťahov (2), resp. (3) potrebujeme overiť normalitu vypočítaných zmien hodnôt indexu prezentované na obrázku č. 7. Na testovanie hypotézy o normálnom rozdelení použijeme testy dobrej zhody dostupné v softvéri Statgraphics Plus. Hypotézu o normálnom rozdelení náhodnej premennej  $\Delta p$  (zmena hodnoty indexu) na základe vykonanej analýzy v StatgraphicsPlus zamietame s 99% istotou. Analýza v StatgraphicsPlus obsahovala chi-kvadrát test dobrej zhody, ktorý porovnáva empirické početnosti náhodnej premennej s teoretickými početnosťami, a Kolmogorovov-Smirnovov test, ktorý sleduje odchýlky medzi empirickým a teoretickým (v tomto prípade normálnym) rozdelením. Na základe nízkej  $p$ -hodnoty pri vykonaných testoch zamietame hypotézu o normálnom rozdelení náhodnej premennej. Pre výpočet VaR použijeme vzťah (1), a teda pomocou Microsoft Excel nájdeme príslušné percentily pre zadané hladiny spoľahlivosti (historická simulácia – neparametrický prístup). Na výpočet denného VaR sme použili denné zmeny hodnoty akciového indexu DAX zobrazené na obrázku č. 7 a výsledky sme zhrnuli v tabuľke č. 1.

**Tabuľka č.1:** Denné hodnoty  $VaR_{1-q}$  indexu DAX pre hladiny spoľahlivosti  $q$

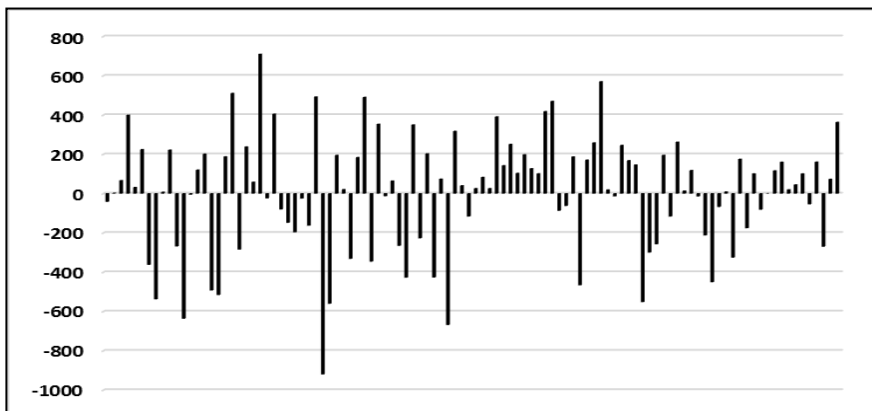
$q$	95%	97.5%	99%
1 deň			
$VaR_{1-q}$	-247.922	-291.810	-377.497
$VaR_{1-q}^*$	-248.938	-292.826	-378.513

Zdroj: Vlastné spracovanie.

Pri výpočtoch týždenných VaR sme vychádzali priamo z týždenných zmien hodnôt DAX indexu ako aj z denných zmien prerátaných pomocou vzťahu (6) na týždenné zmeny. Výsledky boli v oboch prístupoch identické.

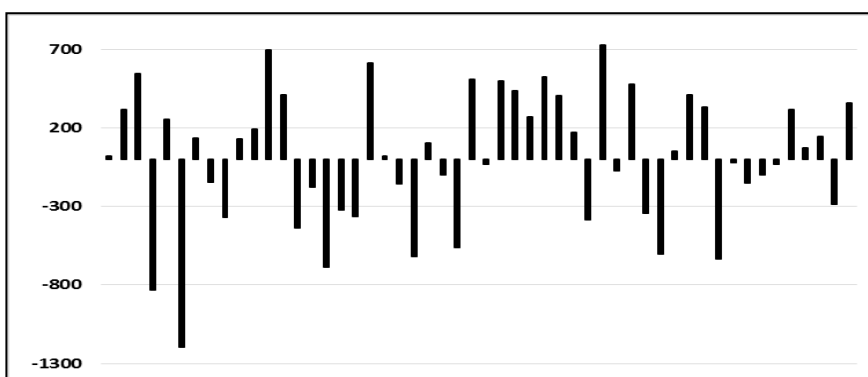
<sup>8</sup> Dané časové intervaly berú do úvahy len pracovné dni, vypočítané hodnoty VaR reprezentujú dennú, 7 dňovú, 14 dňovú a mesačnú hodnotu.

**Obrázok č. 6:** Zobrazenie týždenných zmien hodnoty akciového indexu DAX



Zdroj: Vlastné spracovanie.

**Obrázok č. 7:** Zobrazenie dvojtýždňových zmien hodnoty akciového indexu DAX



Zdroj: Vlastné spracovanie.

Výsledky týždňového aj dvojtýždňového VaR sme zhrnuli v tabuľke č. 2 a č. 3.

**Tabuľka č.2:** Týždenné hodnoty  $VaR_{1-q}$  indexu DAX pre hladiny spoľahlivosti  $q$

$q$	95%	97,5%	99%
1 týždeň			
VaR	-503,695	-603,017	-855,382
VaR*	-508,628	-607,950	-860,315

Zdroj: Vlastné spracovanie.

**Tabuľka č.3:** Dvojtyždňové hodnoty  $VaR_{1-q}$  indexu DAX pre hladiny spoľahlivosti  $q$

<b>2 týždne</b> \ $q$	<b>95%</b>	<b>97,5%</b>	<b>99%</b>
<b>VaR</b>	-658,053	-791,003	-1010,499
<b>VaR*</b>	-667,918	-800,867	-1020,363

Zdroj: Vlastné spracovanie.

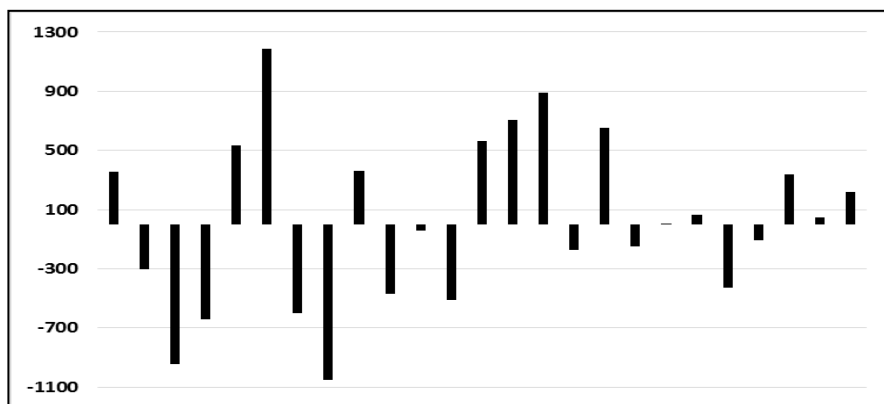
Pri výpočte mesačného VaR sme opäť vychádzali z mesačných zmien hodnoty indexového indexu DAX, ktoré sú zobrazené na obrázku č. 8. Výsledky výpočtu mesačného VaR sme taktiež zhrnuli pre prehľadnosť do tabuľky č. 4.

**Tabuľka č.4:** Mesačné hodnoty  $VaR_{1-q}$  indexu DAX pre hladiny spoľahlivosti  $q$

<b>1 mesiac</b> \ $q$	<b>95%</b>	<b>97,5%</b>	<b>99%</b>
<b>VaR</b>	-883,764	-986,752	-1024,419
<b>VaR*</b>	-904,282	-1007,270	-1044,937

Zdroj: Vlastné spracovanie.

**Obrázok č. 8:** Zobrazenie mesačných zmien hodnoty akciového indexu DAX



Zdroj: Vlastné spracovanie.

Na základe výpočtov uvedených v tabuľkách vidíme, že Value at Risk rastie súhlasne s hladinou významnosti ako aj s časovým horizontom. Toto je samozrejme očividné už

zo samotnej definície VaR. Pri výpočte CVaR sme vychádzali z matematickej definície (7). Výsledky sme zhrnuli do tabuľky č. 5.

**Tabuľka č. 5:** Hodnoty  $CVaR_{1-q}$  akciového indexu DAX pre hladiny spoľahlivosti  $q$

$q$ CVaR	95%	97,5%	99%
<b>1 deň</b>	-314,023	-362,532	-417,076
<b>1 týždeň</b>	-666,592	-813,44	-877,145
<b>2 týždne</b>	-904,983	-1014,17	-1197,74
<b>Mesiac</b>	-997,215	-1049,53	-1049,53

Zdroj: Vlastné spracovanie.

Za predpokladu rovnakého vývoja indexu DAX, ako bol v minulosti, vypočítaná denná hodnota v riziku predstavuje stratu, ktorá môže nastať v nasledujúcich 24 hodinách pre dané hladiny spoľahlivosti. Rovnako vypočítaná týždenná (resp. dvojtýždňová a mesačná) hodnota v riziku predstavuje stratu, ktorá môže nastať v priebehu nasledujúceho týždňa (resp. nasledujúcich dvoch týždňov a mesiaca). Podmienená hodnota v riziku nesie informáciu o priemernej výške straty vypočítanej z hodnôt náhodnej premennej, ktoré sú rovné alebo menšie ako VaR.

## ZÁVER

VaR predstavuje všeobecne používaný nástroj na meranie rizika ako vo finančných tak aj nefinančných inštitúciách. Nástroj má svoje výhody ako aj limitácie. Každý kto používa tento nástroj, by si mal byť toho vedomý. Preferencia CVaR pred VaR vychádza z nevýhod miery VaR. CVaR je koherentná miera a spĺňa teda podmienku subaditivitu, ktorú VaR nemusí spĺňať. Pri diverzifikácii portfólia je CVaR výbornou alternatívou namiesto VaR v prípade, ak ide o portfólio, pri ktorom subaditivita VaR zlyhala. Pri historickej simulácii nevýhoda CVaR spočíva v nedostatočnom počte údajov popisujúce ich chvost rozdelenia. V takomto prípade môže byť CVaR zavádzajúce.

Oba nástroje VaR a CVaR sme aplikovali na vývoj akciového indexu DAX. Môžu užitočne slúžiť v situácii, kedy správca portfólia má za úlohu zaistiť spravované akciové portfólio proti poklesu jeho hodnoty k danému času. Ak si vyberie za nástroj zaistenia futuritné kontrakty na akciový index, v tomto prípade akciový index DAX, prípadne predajné opcie na index DAX, tak nutnou podmienkou úspešného zaistenia je súhlasné správanie hodnoty držaného portfólia s hodnotou akciového indexu. K potvrdeniu tejto skutočnosti, okrem iných zaužívaných postupov, môže byť súhlasnosť vypočítaných hodnôt VaR a CVaR držaného portfólia a akciového indexu dôležitým ukazovateľom k potvrdeniu, alebo zamietnutiu tejto dôležitej vlastnosti.



## **Kľúčové slová**

Hodnota v riziku, podmienená hodnota v riziku, kvantil, normálne normované rozdelenie, akciový index

## **Klasifikácia JEL**

G22

## **LITERATÚRA**

- [1] CIPRA, T. (2013). *Matematika cenných papíru*. Praha : Professional Publishing, 2013. 288 s. ISBN 978-80-7431-079-9
- [2] CIPRA, T. (2015). *Riziko ve financích a pojišťovnictví: Basel III a Solvency II*. Praha : Ekopress, 2015. 515 s. ISBN 978-80- 87865-24-8
- [3] DANIELSSON, J. - DE VRIES, C. - B.J.G.S. - MANDIRA, S. (2005). *Subadditivity Re–Examined: the Case for Value–at–Risk\**. Dostupné na internete: <<http://www.riskresearch.org/>>
- [4] ESCH, L. – KIEFFER, R. – LOPEZ, T. (2005). *Assets and Risk Management*. Chichester : John Willey & Sons Ltd, 2005. 416 s. ISBN 2-8041-3309-5
- [5] HULL, J. C. (2011). *Options, Futures, and Other Derivatives*. 8. vydanie. USA : Pearson, 2011. 863 s. ISBN 0-13-216494-9
- [6] JORION, P. (2006). *Value at Risk: The New Benchmark for Managing Financial Risk*. McGraw-Hill Education, 2006. 600 s. ISBN 978-0071464956
- [7] LETMARK, M. (2010). *Robustness of Conditional Value-at-Risk (CVaR) when measuring market risk across different asset classes* : master's thesis. [online]. Stockholm : KTH, 2010. 41 s. [cit. 1.4.2016]. Dostupné na internete:<<http://www.math.kth.se/matstat/seminarier/reports/M-exjobb10/100308a.pdf>>
- [8] ZMEŠKAL, Z. - DLUHOŠOVÁ, D. - TICHÝ, T. (2013). *Finanční modely: Koncepty, metody, aplikace*. Praha : Ekopress, 2013. 270 s. ISBN 978-80-86929-91-0

## **RESUMÉ**

Z dôvodu rastu a nestálosti obchodovaných portfólií obchodných spoločností investičných bánk, vznikla potreba zavedenia sofistikovanejších opatrení na kontrolu a meranie rizík. Pre jednoduchosť výpočtu a variabilnosť použitia sa zaviedla hodnota v riziku známa ako VaR, ktorá sa začala akceptovať aj v nefinančných službách. Článok prezentuje výpočet VaR pre finančné aktívum s aplikáciou na akciový index DAX pre rôzne hladiny spoľahlivosti a rôzne časové intervaly. Nevýhodou VaR je, že neposkytuje žiadne informácie výškach strát, ktoré prekročia vypočítané VaR. Túto dodatočnú informáciu o stratách na chvoste rozdelenia náhodnej premennej poskytuje CVaR, ktorá

je tiež definovaná a aplikovaná na akciový index DAX a porovnaná s VaR pre tie isté hladiny spoľahlivosti a časové intervaly.

## **SUMMARY**

In argument to growing and volatility trading portfolio company investment banks created the need for establishing more sophisticated measures for controlling and measuring risks. For ease of calculation and variability introduced using value at risk known as VaR, which began accepting in non-financial services too. The paper presents the calculation of VaR for a financial asset with the application on the stock index DAX for different confidence levels and different time intervals. The drawback of VaR is that it provides no details of the losses that exceed the calculated VaR. This additional information on losses on the tail of the distribution of the random variable provides CVaR, which is also defined and applied to the DAX and compared with VaR for the same confidence levels and time intervals.

## **Kontakt**

Ing. Eva Iglarčíková, študentka študijného programu Aktuárstvo, Katedra matematiky a aktuárstva, Fakulta hospodárskej informatiky, Ekonomická univerzita v Bratislave, Dolnozemska cesta 1/b, 852 35 Bratislava, tel: +421 2/672 95 813, e-mail: [eva.iglarcikova@gmail.com](mailto:eva.iglarcikova@gmail.com)

prof. RNDr. Ľudovít Pinda, CSc., Katedra matematiky a aktuárstva, Fakulta hospodárskej informatiky, Ekonomická univerzita v Bratislave, Dolnozemska cesta 1/b, 852 35 Bratislava, tel: +421 2/672 95 813, e-mail: [ludovit.pinda@euba.sk](mailto:ludovit.pinda@euba.sk)

---

*Pavol Jurík*

## ROZVÍJAJÚCE SA TRENDY A BUDÚCNOSŤ E-LEARNINGU

### Úvod

Prudký rozvoj informačných technológií a informatizácia spoločnosti na konci 20. storočia ovplyvnili do značnej miery aj sféru vzdelávania. Vzniká čoraz viac elektronických kurzov, ktoré ponúkajú záujemcom informácie z najrôznejších vedných odborov. Pojem *e-learning* je v súčasnej dobe veľmi populárny a často používaný.

Podľa [1] *e-learning* chápeme ako „*multimediálnu podporu vzdelávacieho procesu s použitím moderných informačných prostriedkov a komunikačných technológií, ktorá je spravidla realizovaná prostredníctvom počítačových sietí. Jeho základnou úlohou je slobodný prístup k vzdelávaniu v čase a priestore.*“ V [2] je elektronické vzdelávanie charakterizované ako „*system, ktorý využíva na poskytovanie obsahu, riešenie úloh, komunikáciu, administráciu a riadenie vzdelávania elektronické metódy spracovania, prenosu a uskladňovania informácií.*“ Na základe [3] *technologicky orientované definície e-learningu hovoria spravidla o učení sprostredkovanom interaktívnymi elektronickými technológiami, či už sú prevádzkované v režime off-line alebo on-line.* Vzdelávací kurz realizovaný na báze *e-learningu* potom môžeme označiť pojmom *e-kurz*.

Z rôznorodosti vyššie uvedených definícií vyplýva, že *e-learning* nie je jednoznačne a deterministicky chápaný pojem. Všetky tieto definície síce naznačujú, že ide o vzdelávanie na báze elektronických, resp. digitálnych technológií, no ďalšie charakteristické znaky sa pomerne líšia. V definícii podľa [1] sú zdôrazňované pojmy „*multimediálna podpora*“ a „*počítačové siete*“. V definícii podľa [2] sa tieto pojmy nevyskytujú, no sú tu spomenuté „*elektronické metódy spracovania, prenosu a ukladania informácií*“. Posledná definícia [3] ako jediná zdôrazňuje pojmy „*interaktivita*“ a „*on-line, resp. off-line režim*“, čiže pripúšťa, že môže ísť aj o vzdelávacie kurzy nainštalované ako desktopové aplikácie na osobnom počítači, ktoré sú dostupné v režime *off-line*. Vzájomné rozdiely v týchto definíciách naznačujú, že predstavy o *e-learningu* nie sú celkom ustálené. Je to spôsobené aj tým, že ide o relatívne novú oblasť, ktorá sa postupne vyvíja a mení svoju podobu. Zatiaľ čo kedysi bolo akceptovateľné považovať za *e-learning* aj jednoduché webové stránky obsahujúce viac menej len informácie získané prevodom tlačených informácií do digitálnej podoby (či už na báze mechanického prepisu, naskenovania či metód OCR - *Optical character recognition*), dnes už toto ako *e-learning* v pravom slova zmysle nemožno chápať. Moderné elektronické vzdelávacie kurzy by totiž mali svojim účastníkom (študentom, pracovníkom firiem či vo všeobecnosti záujemcom o určitú problematiku) poskytovať aj inú (a omnoho vyššiu) pridanú hodnotu, než len digitálne vyjadrenie tých istých informácií, ktoré sú dostupné aj v knižnej, resp. tlačenej podobe. Okrem dostatočnej podpory multimediálneho obsahu, spätnej väzby, prítlačlivého dizajnu, komunikácie medzi účastníkmi kurzu a lektorom, ako aj medzi účastníkmi navzájom, sa do popredia tvorby elektronických vzdelávacích kurzov dostáva pojem *interaktivita*. Ide o možnosť individuálneho zasahovania do priebehu kurzu zo strany jeho jednotlivých účastníkov, ktorí si v kurze môžu zvoliť svoju vlastnú cestu. *Interaktivita* je základným nástrojom pre individualizáciu kurzu, ktorý tak môže byť viac prispôbený aktuálnym potrebám a požiadavkám jednotlivca. Čím väčšie možnosti má účastník z hľadiska

zasahovania do kurzu, tým viac môže jeho štúdium prebiehať na základe jeho predstáv. Interaktivita teda odráža istú dynamiku, ktorá do určitej miery absentuje u informácií prezentovaných tlačenou formou v podobe lineárne radených sekvencií myšlienok, viet či kapitol. Samozrejme, že študent si môže otvoriť učebnicu, ktorú má k dispozícii v knižnej podobe, aj v strede a nemusí ju nevyhnutne čítať lineárne od začiatku až po koniec, resp. sa v nej môže pohybovať podľa obsahu, no aj tak môže byť jeho orientácia a stanovovanie vlastnej cesty vo veľkom kvante textu pomerne problematické. Pri vhodne vytvorenom e-kurze môžeme rozseparovaním učiva do väčšieho množstva myšlienkových celkov menšieho rozsahu a ich vhodným prepojením prostredníctvom vzájomných väzieb (odkazov, resp. hyperlinkov) účastníkovi kurzu výraznou mierou napomôcť v hľadaní svojej vlastnej cesty kurzom.

Cieľom tohto článku je priblížiť súčasné trendy v oblasti e-learningu a načrtnúť jeho ďalšie smerovanie v nasledujúcich rokoch. Ide o pomerne dynamickú oblasť, ktorá sa neustále vyvíja, a preto je dôležité, aby z hľadiska konkurenčného boja tvorcovia elektronických vzdelávacích kurzov sledovali aktuálne trendy, pričom ich úsilím by malo byť priniesť čo najvyššiu pridanú hodnotu pre účastníkov týchto kurzov.

## 1 Súčasné vývojové trendy v oblasti e-learningu

V oblasti e-learningu je možné v súčasnom období vypožorovať viacero trendov. Tieto trendy si charakterizujeme v nasledujúcich podkapitolách.

### 1.1 Mobilný e-learning

Jedným z nich je **mobilný e-learning**, ktorý súvisí so skutočnosťou, že naša spoločnosť čoraz väčšmi akceptuje a vyhľadáva mobilné informačno-komunikačné zariadenia, akými sú napr. notebooky, tablety, mobilné telefóny, smartfóny, iPody a pod. Tieto zariadenia ich majiteľom, resp. používateľom umožňujú neustále spojenie s okolitým svetom, napr. prostredníctvom telefonického spojenia, e-mailu, sociálnych sietí, on-line diskusií v reálnom čase, diskusných fór, videokonferenčného spojenia, prístupu do rôznych portálov a pod. Ide teda o prostriedky, ktoré znižujú izolovanosť jednotlivcov a podporujú fenomén zosieťovanosti okolitého sveta. Pozitívnym aspektom tohto javu je zvýšený pocit začlenenosti jednotlivca do spoločnosti (nielen v smere od jednotlivca voči svetu, ale aj naopak), negatívnym aspektom je neustále sa zvyšujúca závislosť od informačných a komunikačných technológií.

Trend masového používania mobilných informačno-komunikačných prostriedkov si nemohli nevšimnúť ani tvorcovia e-learningových kurzov. Ide napr. o firmy Brightwave, Epic, City & Guilds Kineo, Myknowledgemap, Atlas, Desq, Tribal, Paradiso Solutions, Blackboard Inc, Qustn Technologies Inc a iné, ktoré sa popri tradičných formách e-learningu začali zameriavať aj na mobilné vzdelávacie aplikácie. [4] a [5] Využívanie mobilných technológií pri vzdelávaní prináša študujúcim nový rozmer komfortu, pretože už nie sú viazaní na presný čas a miesto, na ktorom prebieha fyzická výučba a rovnako nie sú viazaní ani na miesto, na ktorom sa nachádza desktopový počítač. Môžu sa teda vzdelávať takmer z akéhokoľvek miesta, pokiaľ im vydrží batéria a nachádzajú sa v oblasti s dostatočným pokrytím signálu, resp. pripojením na internet. V princípe môže mobilný e-learning poskytovať všetko to, čo desktopový e-learning a k tomu prináša výhodu mobility. Problémom pri vytváraní mobilných

e-learningových kurzov môže byť najmä kompatibilita s rôznymi zariadeniami, veľkosť ich obrazovky, ako aj výkonové parametre mobilných zariadení, ktoré bývajú zvyčajne v porovnaní s desktopovými počítačmi o čosi nižšie.

## 1.2 Tvorba multiplatformových webových aplikácií

V posledných rokoch rozširovanie mobilných vzdelávacích aplikácií, ako aj e-learningových kurzov vo všeobecnosti napomáha najmä trend postupného poklesu cien za nákup informačno-komunikačných zariadení, ako aj pokles cien poplatkov za ich používanie, najmä poplatkov za pripojenie do internetu. Vyššia dostupnosť týchto technológií pre široké vrstvy obyvateľstva je výborným predpokladom pre ich aktívne používanie a otvára dvere mobilnému e-learningu. Okrem toho sme svedkami postupného znižovania používania flashových aplikácií a ich nahrádzania jazykom HTML5, ktorý je dostupný na všetkých platformách, zariadeniach a webových prehliadačoch. Aplikácie postavené na Flashi spôsobujú na mobilných zariadeniach často problémy, zatiaľ čo HTML5 je všestrannejší, rýchlejší a odolnejší voči chybám (väčšia robustnosť). Vývojári už nemusia vytvárať natívne aplikácie v závislosti od konkrétneho operačného systému, ale stačí im iba vyvinúť jednu **multiplatformovú aplikáciu dostupnú prostredníctvom webu**. Vytváranie aplikácií teda nemusí byť viazané na konkrétny operačný systém, pričom takéto riešenie môže vývojárom ušetriť čas aj peniaze. Okrem toho pri aplikáciách v HTML5 nie je potrebné sťahovať žiadny plug-in (teda doplnok do webového prehliadača), keďže je tento jazyk už teraz plne podporovaný viacerými webovými prehliadačmi, ako napr. Microsoft Internet Explorer, Google Chrome, Mozilla Firefox či Apple Safari. Pre spúšťanie flashových aplikácií na webe je naopak potrebné si stiahnuť plug-in a občas ho aktualizovať. Kvôli týmto výhodám môžeme teda v najbližších rokoch v súvislosti s tvorbou mobilných e-learningových kurzov očakávať postupné znižovanie používania flashových aplikácií a ich nahrádzanie aplikáciami v jazyku HTML5. [9] a [10]

## 1.3 Prispôsobivý dizajn

V spojitosti s mobilným e-learningom sa v súčasnej dobe často používa pojem **prispôsobivý dizajn** (responsive design). Elektronický vzdelávací kurz, ktorý je postavený na princípe prispôsobivého dizajnu, dokáže automaticky prispôbovať veľkosť okna, v ktorom je spustený, veľkosti obrazovky daného zariadenia (napr. notebook, tablet, smartfón,...) a nastavenému rozlíšeniu. Systém dokáže automaticky vykonať zmenu umiestnenia obrázkov, textov a jednotlivých vrstiev (layout) tak, aby zobrazenie e-kurzu na danom zariadení a pri daných nastaveniach bolo systematické a prehľadné. Na základe toho si môžu všetci účastníci plnohodnotne zobrazovať obsah kurzu bez ohľadu na to, či pri tom používajú mobilné alebo statické zariadenie. Nevhodné rozmiestnenie obrázkov a grafických bannerov by totiž mohlo spôsobiť určitú „rozsypanosť“ blokov textu, ktorá by na niektorých používateľov mobilných zariadení mohla pôsobiť demotivačne. Cieľom prispôsobivého dizajnu je teda do určitej miery vyrovnávať rozdiely medzi mobilným a statickým e-learningom. [9]

## 1.4 Gamifikácia e-learningu

Ďalším trendom je využívanie počítačových hier, teda tzv. **gamifikácia e-learningu**. Počítačové hry sú v súčasnosti veľmi populárne, a to nielen u mladých ľudí. Okrem iného sa o to zaslúžili aj sociálne siete, predovšetkým Facebook, ktoré poskytujú svojim členom množstvo hier dostupných on-line. Medzi výhody on-line hier na sociálnych sieťach patrí najmä to, že sú obvykle k dispozícii zadarmo, nevyžadujú inštaláciu na klientskom zariadení a sú spustiteľné on-line. Počítačové hry vo všeobecnosti predstavujú pre hráčov určitý prostriedok na ich odreagovanie sa, odpútanie sa od každodenných starostí a relaxáciu a práve z týchto dôvodov môže byť ich spojenie s oblasťou vzdelávania veľmi efektívne. Množstvo ľudí má voči štúdiu určitý odpor, resp. nechut', pretože si to vyžaduje pevnú vôľu a schopnosť efektívneho riadenia svojho vlastného času (time management) a práve preto môže byť spojenie štúdia a zábavy účinným prostriedkom na to, aby sa pohľad týchto ľudí na vzdelávanie zmenil. Pochopiteľne, učenie sa hrou nie je žiadna novinka, keďže ho zdôrazňoval už Ján Ámos Komenský v 17. stor., podľa ktorého by učenie malo predstavovať zábavu a nie drinu. Gamifikácia e-learningu však dodáva jeho myšlienkam nový rozmer, keďže spája vzdelávanie, hru a svet informačných a komunikačných technológií, ktoré sa v súčasnosti tešia veľkej popularite.

Vzdelávacie počítačové hry sa môžu vyskytovať najmä vo forme rôznych interaktívnych testov, pomocou ktorých si študujúci môžu otestovať svoje znalosti o čosi zábavnejšou formou, než v prípade klasických papierových testov, ale aj v podobe slovných puzzle (pre rozvíjanie slovnej zásoby z určitej doménovej oblasti), krížoviek, osemsmereviiek a simulácií. *Počítačové simulácie* je možné využiť v mnohých oblastiach, ako napr. v poľnohospodárstve, vojenstve, logistike, letectve, meteorológii, zdravotníctve, prírodných vedách, doprave a pod. V praxi e-learningových kurzov môžeme rozlíšiť najmä tieto typy simulácií:

- *simulácie konkrétnych pracovných činností* – ide zvyčajne o graficky náročnejšie a prepracovanejšie simulácie zameriavajúce sa na interaktívne precvičovanie konkrétneho druhu činnosti, napr. simulátory chirurgických zákrokov, letecké simulátory, simulátory prác v jadrovej elektrárni, simulátory chemických pokusov a pod. Ich cieľom je predovšetkým bezpečným spôsobom naučiť študentov reagovať na rôzne situácie, ktoré môžu v praxi nastať;
- *simulácie fyzických predmetov* – pracujú s virtuálnym ekvivalentom (modelom) určitého fyzického zariadenia. Študent si tak môže prostredníctvom nich vyskúšať rôzne nastavenia, resp. konfigurácie daného zariadenia, pričom s ním reálne nemusí prísť vôbec do styku;
- *procedurálne simulácie* – ich cieľom je naučiť študentov logickú postupnosť a nadväznosť istej množiny krokov, ktoré sú spoločne súčasťou určitého procesu. Na základe výsledkov simulácie študenti vidia, či nimi zvolená postupnosť krokov bola správna a viedla k očakávaným záverom;
- *simulácie prostredia* – môže ísť napr. o životné prostredie, kedy študenti môžu experimentovať s rôznymi faktormi, ktoré sa spolupodieľajú na stave životného prostredia, pričom môžu pozorovať ich vzájomnú prepojenosť a synergický efekt. Popri tom môže ísť aj o simulácie finančného prostredia určitej firmy, napr. simulácie zisku a dôsledkov rozhodnutí o nakladaní s finančnými prostriedkami a pod.

Hlavnou výhodou používania simulácií vo vzdelávacom procese je to, že potenciálna chyba, resp. nesprávne rozhodnutie študenta vo virtuálnom prostredí nevyvolá žiadne dôsledky v reálnom živote. Študent si teda v priebehu simulácie takpovediac môže dovoliť chybu, zatiaľ čo napr. vykonanie chyby v reálnej prevádzke jadrovej elektrárne by mohlo mať fatálne následky. Základnou nevýhodou používania simulácií je predovšetkým otáznosť toho, do akej miery simulácia skutočne zodpovedá realite a do akej miery ide len o určitú abstrakciu nejakého predmetu, prostredia či javu. Zodpovednosť za vierohodnosť simulácie nesú predovšetkým jej tvorcovia, ktorí do jej algoritmov zachytávajú určité zákonitosti, resp. pravidlá fungovania okolitého sveta. Čím viac je simulácia iba zjednodušením reality, teda prebieha za tzv. laboratórnych podmienok a nepostihuje všetky súvisiace javy alebo ich aspekty, tým viac sa jej výsledky môžu odchyľovať od výsledkov, ktoré by vznikli v reálnom prostredí. Simulácia je bezpochyby výborným prostriedkom na nácvik, resp. naštudovanie si určitých znalostí alebo zručností, no pri obzvlášť zložitých a komplexných javoch by jej výsledky nemali byť považované za neomylné.

Tvorcovia vzdelávacích počítačových hier by sa mali usilovať o to, aby ich hry boli schopné odovzdať študentom potrebné informácie zábavnou a jednoduchou formou. Na aspekt zábavy by sa však pritom nemal klásť väčší dôraz ako na samotný aspekt vzdelávania. Najmä u mobilných zariadení môže okrem toho nastať v súvislosti so vzdelávacími hrami problém s ich výkonnosťnými nárokmi, ktorý sa môže prejavovať tým, že hru buď nie je možné na danom zariadení hrať plynulo, alebo ju nie je možné vôbec spustiť. Hry pre mobilné zariadenia by teda mali byť graficky menej náročné ako hry určené pre osobné počítače, čo však môže mať vplyv na ich subjektívne vnímanú „príťažlivosť“ zo strany študentov, resp. účastníkov kurzu.

## 1.5 Tvorba personalizovaných e-learningových kurzov

Iným trendom súvisiacim s tvorbou elektronických výučbových kurzov je **personalizácia, resp. individualizácia vzdelávania**. Tento trend úzko súvisí s pojmom interaktivita, ktorý sme rozoberali v úvodnej časti tohto článku. V zmysle personalizácie je potrebné kurz vytvoriť tak, aby čo najviac vyhovoval individuálnym potrebám a požiadavkám jeho účastníkov. Kurz by mal samozrejme garantovať istú úroveň a obsahovú náplň vedomostí, resp. zručností po jeho absolvovaní, no popri tom by účastníkom malo byť umožnené ovplyvňovať poradie a hĺbku preberaných učív, spôsob výučby (napr. dynamická prezentácia, interaktívny test, audiovizuálny súbor, počítačová hra, simulácia,...), ako aj tempo prechodu kurzom. Priebeh kurzu by teda nemal byť záväzne stanovený pre všetkých účastníkov vopred, ale mali by byť ponechané určité mantinely, v rámci ktorých sa účastníci môžu pohybovať a prispôsobovať si tak štúdium svojim individuálnym preferenciám.

Napriek tomu sa však medzi účastníkmi kurzu môžu vyskytnúť aj ľudia, ktorí „sú radi, ak sú vedení“, teda oceňujú, ak im lektori, resp. tvorcovia kurzu ponúkajú istú osvedčenú alebo odporúčanú šablónu prechodu kurzom, pretože si nie sú istí, ktoré typy zručností, resp. vedomostí sú dôležitejšie a ktoré sú skôr okrajové, prípadne nevedia odkiaľ začať. Pre takýchto účastníkov je vhodné stanoviť určitý návrh prechodu kurzom, aby sa v ňom necítili stratení. Tento návrh by mal zohľadňovať logickú nadväznosť a súvisťnosť preberaných celkov a mal by byť zostavený na základe empirických skúseností pri výučbe z danej študijnej oblasti.

Vysoký stupeň personalizácie elektronických vzdelávacích kurzov môže pre mnohých predstavovať motivačný faktor pri rozhodovaní sa o takejto forme štúdia, no jeho vedľajším dôsledkom by nemala byť neprehľadnosť kurzu a vytváranie dojmu „chaosu“. Nástrojom na zvyšovanie personalizácie kurzu je podpora interaktivity tak, aby účastníci kurzu mohli aktívne zasahovať do jeho priebehu a neboli viazaní príliš striktnými pravidlami.

### 1.6 Rozvoj a zdokonaľovanie LMS aplikácií

Okrem tvorby špecializovaných elektronických kurzov zameraných na jednu konkrétnu oblasť dochádza aj k **rozvoju LMS** (*Learning Management System*) aplikácií, teda softvérových nástrojov určených pre automatizovanú tvorbu jednoduchých vzdelávacích kurzov, do ktorých je potrebné už len dodať požadované znalosti. E-learningové kurzy môžu pomocou LMS nástrojov vytvárať aj samotní lektori a nie je pri tom potrebná asistancia zo strany IT špecialistov. To umožňuje rýchlu tvorbu nekomerčných kurzov ako doplnkových študijných pomôcok pri klasickej prezenčnej forme štúdia. Nedostatkom takéhoto prístupu je to, že LMS aplikácie sa spravidla hodia len pre tvorbu jednoduchších kurzov s nízkym stupňom interaktivity, pozostávajúcich predovšetkým zo statických textov, obrázkov, audiovizuálnych súborov a testových aplikácií. Pre tvorbu graficky a softvérovo náročnejších kurzov je vhodnejšie sa obrátiť na špecialistov z oblasti IT. Cieľom tvorcov súčasných LMS aplikácií je snaha o dosiahnutie čo najvyššej miery automatizovanosti tvorby e-kurzov a teda o čo najvyššiu použiteľnosť týchto technológií zo strany lektorov a minimalizáciu ich námahy pri ich vytváraní. Automatizovaná tvorba vzdelávacích počítačových hier bez účasti IT odborníkov je však zatiaľ len hudba budúcnosti, no potenciálne môžeme očakávať vývoj aj v tejto oblasti.

### 1.7 Video-based learning

Rozvoj internetu a postupné zvyšovanie prenosových rýchlostí a spoľahlivosti pripojenia úzko súvisí aj s rozvojom videokonferencií a webkonferencií. Pri ich spojení s oblasťou vzdelávania potom môžeme hovoriť o tzv. **video-based learningu** (vzdelávaní založenom na videu). Videokonferencie predstavujú formu audio-vizuálnej komunikácie určitého počtu osôb v rôznych geograficky vzdialených miestach prostredníctvom využívania informačných a komunikačných technológií. V závislosti od použitej technológie sa môže používať špeciálny hardvér a softvér. Softvér si vyžaduje inštaláciu vo forme klienta, čiže predpokladá sa kompatibilita operačných systémov. Webkonferencie môžu byť buď moderované alebo nemoderované. Nemoderované webkonferencie označujeme obvykle ako webináre čiže semináre na webe. Pri webinároch má kontrolu v rukách lektor a účastníci, študenti sa pripájajú k webináru buď na základe povolenia alebo voľne, keď je daný webinár otvorený. Moderované webkonferencie bývajú koordinované moderátorom, ktorý dohliada na ich priebeh a celkovú kvalitu. Webkonferencie využívajú štandardné technológie internetu, pričom zvyčajne postačuje kamera, reproduktor notebooku a webový prehliadač. Táto nenáročnosť na strane používateľa zvyšuje ich atraktivnosť aj v iných oblastiach, než len v klasickej škole (predovšetkým v oblasti firemných školení a rozvoja zamestnancov). Všetko je však podmienené kvalitou pripojenia do internetu a ďalšími faktormi (ako napr. vyťaženosť procesora na zariadeniach pripojených do webkonferencie), keďže nároky na plynulý prenos audio a video streamov sú vysoké. S nárastom kvality internetových



technológií môžeme v budúcnosti očakávať aj zvýšenie záujmu o využívanie webkonferencií vo vzdelávaní.[8]

Okrem toho môžu byť videá veľmi efektívnou študijnou pomôckou zvyšujúcou názornosť preberanej látky. Popri ich uplatnení v rámci videokonferencií a webkonferencií môžu byť začlenené aj do klasických e-learningových kurzov ako doplnok k textovým a grafickým informáciám. Vhodne premyslené a zrealizované video môže účastníkovi kurzu v kratšom čase substituovať množstvo textu, pričom podľa výskumov informácie odovzdané formou videa väčšine ľudí skôr utkvajú v pamäti, než informácie odovzdané prostredníctvom textu. Podľa Hubu, Žákovej a Bistáka si človek v priemere zapamätá 10% informácií, ktoré číta; 30% informácií, ktoré vidí (video, grafika) a 50% informácií, ktoré vidí a súčasne počuje (audiovizuálny vnem). Zvýšená názornosť preto z videozáznamov a videoprenosov činí silný nástroj na podporu vzdelávania. [2] Dôkazom je napr. YouTube, ktorý predstavuje v súčasnosti najväčší videoportál na internete. Podľa oficiálnych štatistík má vyše miliardu používateľov, čo predstavuje takmer tretinu z celkového počtu používateľov internetu. Počet hodín, ktoré ľudia strávili pozeraním videí na YouTube v roku 2015 medziročne stúpol o 60%. Počet hodín, ktoré ľudia strávili na YouTube prostredníctvom mobilných zariadení v roku 2015 medziročne vzrástol až o 100%. Tieto štatistiky dokazujú, že popularita videí v súčasnosti prudko narastá a tento trend sa týka aj používania mobilných zariadení. [11]

## Záver

Celkovo sme v tomto článku identifikovali 7 hlavných trendov v oblasti tvorby e-learningových kurzov. Medzi tieto trendy patria:

1. *Tvorba e-learningových kurzov pre mobilné zariadenia*
2. *Tvorba multiplatformových webových aplikácií pomocou jazyka HTML5*
3. *Prispôsobivý dizajn*
4. *Gamifikácia e-learningových kurzov (vývoj vzdelávacích počítačových hier)*
5. *Personalizácia e-learningu*
6. *Rozvoj a zdokonaľovanie LMS aplikácií*
7. *Video-based learning*

Vzhľadom k vysokej popularite mobilných informačno-komunikačných zariadení, počítačových hier a videí na internete, môžeme očakávať, že tieto trendy budú v nadchádzajúcich rokoch silnieť. V záujme zvyšovania kvality e-kurzov v prospech zákazníka, resp. študenta môžeme očakávať aj väčší dôraz kladený na prispôsobivý dizajn, personalizáciu e-learningu a prechod k aplikáciám v jazyku HTML5. Tvorba a zdokonaľovanie LMS aplikácií je nástrojom, ktorého cieľom je priblížiť tvorbu elektronických vzdelávacích kurzov aj neprogramátorom, teda priamo učiteľom alebo lektorom e-kurzov bez potrebných znalostí z oblasti IT.

Prehľbovanie týchto trendov a rozvoj e-learningu ako takého by však nemali znamenať zánik klasickej prezenčnej formy vzdelávania, ktorá má stále veľmi silné postavenie a ponúka oproti elektronickým formám vzdelávania množstvo nesporných výhod (sociálny kontakt, osobnosť pedagóga, priama interakcia medzi všetkými účastníkmi vzdelávacieho procesu,...). Správnou cestou je pravdepodobne snaha o dosiahnutie synergie medzi oboma formami

vzdelávania tak, aby bolo možné získať výhody oboch prístupov a aby to záujemcom o štúdium prinieslo čo najvyššiu pridanú hodnotu.

### **Kľúčové slová**

E-learning, vzdelávacie kurzy, mobile-learning, gamifikácia, interaktivita, HTML5

### **Klasifikácia JEL**

I20, I21

### **LITERATÚRA**

- [1] Černák, I. – Mašek, E. *Základy elektronického vzdelávania*. Ružomberok: Edičné stredisko Pedagogickej fakulty Katolíckej univerzity. 2007. 343 s. ISBN 978-80-8084-1713.
- [2] Huba, M. – Žáková, K. – Bisták, P. *WWW a vzdelávanie*. Bratislava: Vydavateľstvo STU. 2003. 141 s. ISBN 80-227-1999-4.
- [3] Švejda, G. *Vybrané kapitoly z tvorby e-learningových kurzov*. Nitra: Pedagogická fakulta Univerzity Konštantína Filozofa v Nitre. 2006. 136 s. ISBN 80-8050-989-1.
- [4] *E-learning companies in the USA*. 2015. [online]. In: Learninglight.com [cit. 20. 1. 2016]. Dostupné na internete: <<http://www.learninglight.com/elearning-companies-usa/>>.
- [5] *E-learning companies in the UK*. 2015. [online]. In: Learninglight.com. [cit. 20. 1. 2016] Dostupné na internete: <<http://www.learninglight.com/elearning-companies-uk/>>.
- [6] Jurík, P. *Kľúčové aspekty efektívneho e-learningového kurzu*. 2012. In: EDAMBA 2012 [elektronický zdroj] : proceedings of the [15th] international scientific conference for doctoral students and young researchers : 22nd november 2012, Bratislava, Slovak Republic / editors Martina Machová, Andrea Petianová. - Bratislava: Publishing House EKONÓM, 2012. - ISBN 978-80-225-3549-6. - S. 474-481.
- [7] Sak, P. a kol. 2007. *Člověk a vzdělání v informační společnosti: vzdělávání a život v komputerizovaném světě*. Praha: Portál, 2007. 296 s. ISBN 978-80-7367-230-0.
- [8] Schmidt, P. - Jurík, P. *Network-based education*. In Trends and innovations e-business, education and security. International scientific videoconference of scientists and PhD. students or candidates. Trends and innovations e-business, education and security : [reviewed] proceedings : fifth international scientific videoconference of scientists and PhD. students or candidates : november 18, 2015, [Bratislava, Slovak Republic] [elektronický zdroj]. - [Bratislava : Department of Applied Informatics Faculty of Economic Informatics, 2015]. ISBN 978-80-225-4191-6, s. 87-93 CD-ROM.
- [9] Pappas. Ch. 6 *Mobile Learning Trends for 2016*. 2016. [online]. In: Elearningindustry.com. [cit. 3. 2. 2016]. Dostupné na internete: <<http://elearningindustry.com/6-mobile-learning-trends-for-2016>>.

- [10] *6 Benefits of Using HTML5 in eLearning*. 2015. [online]. In: Elearningindustry.com. [cit. 3.2.2016]. Dostupné na internete: <<http://elearningindustry.com/6-benefits-of-using-html5-in-elearning>>.
- [11] *Štatistika*. 2016. [online]. In: YouTube.com. [cit. 3.2.2016]. Dostupné na internete: <<https://www.youtube.com/yt/press/sk/statistics.html>>.

## RESUMÉ

E-learning predstavuje dynamicky sa rozvíjajúcu oblasť, ktorá úzko súvisí s technologickým pokrokom spoločnosti. Od jeho vzniku sme boli v tejto oblasti svedkami mnohých zmien. Cieľom tohto článku je pokúsiť sa identifikovať a opísať hlavné trendy v oblasti tvorby elektronických vzdelávacích kurzov a súčasne odhadnúť aj smerovanie e-learningu v najbližších rokoch. V tomto zmysle sme v článku opísali 7 hlavných trendov.

## SUMMARY

E-learning is a dynamically developing area that is closely linked to technological progress of society. Since its inception, we have been witnesses of many changes in this area. The aim of this article is to try to identify and describe the main trends in the field of e-learning courses creation and also to estimate the possible directions of e-learning in the coming years. In this sense we have described 7 key trends in this article.

## Kontakt

Ing. Pavol Jurík, PhD. Katedra aplikovanej informatiky, Fakulta hospodárskej informatiky, Ekonomická univerzita v Bratislave, Dolnozemska cesta 1/b, 852 35 Bratislava, tel. č.:+4212/6729 5863, e-mail: pavol.jurik.euba@gmail.com.

---

Andrea Kaderová

## KONŠTRUKCIA SPOTOVÝCH A FORWARDOVÝCH VÝNOSOVÝCH KRIVIEK

### Úvod

Skutočnosť, že väčšina vzťahov na finančnom trhu je zameraná do budúcnosti, núti racionálne uvažujúcich účastníkov trhu k odhadu hodnoty ich aktív a pasív. Táto hodnota je ovplyvňovaná mnohými ekonomickými faktormi, ktoré účastníci trhu sledujú a úsudok o ich budúcom vývoji zapracovávajú do svojich investičných rozhodnutí. Ak uvažujeme finančné modelovanie týkajúce sa finančných nástrojov, kde sú dopredu známe časy príjmov a výdajov, ale nie vždy je známa aj výška týchto platieb, tak finančné toky a ceny týchto nástrojov sú závislé od vývoja úrokových sadziieb (výnosových kriviek). Vzhľadom k tomu, že základným rizikovým faktorom sú výnosové krivky, sa v príspevku budem zaoberať ich konštrukciou.

### 1 VÝNOSOVÁ KRIVKA AKO FINANČNÝ INDIKÁTOR

Investičné rozhodnutia ovplyvňujú hodnotu finančných nástrojov. Ceny na finančnom trhu podľa tejto argumentácie obsahujú agregované očakávania účastníkov trhu o budúcom vývoji ekonomiky a môžu preto slúžiť ako indikátory budúceho vývoja. Medzi najpopulárnejšie finančné indikátory patrí *časová štruktúra úrokových mier (výnosová krivka)*, ďalej rozpätie (*spread*) medzi výnosovosťou podnikových a štátnych dlhopisov, ceny opcií, akciové indexy, či swapové alebo forwardové sadzby.

Ak má daný indikátor spoľahlivo vyjadrovať očakávania účastníkov trhu, musí spĺňať predovšetkým dve základné podmienky. Musí podľa<sup>1</sup>

- byť determinovaný trhovými očakávaniami,
- umožňovať dobrú merateľnosť očakávaní.

**Prvá podmienka** súvisí hlavne s dostatočnou likviditou podkladových aktív. Pri nízkej likvidite môžu byť zmeny v cenách finančných nástrojov vyvolané aj faktormi, ktoré nijako nesúvisia so zmenou očakávaní.

**Druhá podmienka** je daná indikátormi, ktoré priamo merajú očakávania účastníkov trhu o vývoji určitej veličiny a tiež indikátormi, ktoré naopak neukazujú očakávania priamo, ale sú v nich obsiahnuté.

Dôležitou podmienkou na to, aby mohol daný indikátor úspešne plniť svoju funkciu je, že subjekty sa nesmú pri svojich očakávaniach dopúšťať systematických chýb. Tých sa

---

<sup>1</sup> MIŠTEK, I. 2004. *Výnosová krivka ako indikátor ekonomickej aktivity a inflácie*. Hospodárske noviny. [www.hnonline.sk](http://www.hnonline.sk).

dopúšťame, ak rozdiel medzi skutočnou a očakávanou hodnotou je korelovaný s informáciami, ktoré boli v čase tvorby očakávaní k dispozícii. Dôvodom vzniku systematických chýb môže byť neracionálne správanie sa niektorých účastníkov trhu, ktorí nereagujú na všetky dostupné informácie, alebo reagujú na "falošné" signály.

Medzi finančnými indikátormi má významné postavenie práve **výnosová krivka**, ktorá vyjadruje graficky vzťah medzi výnosom aktíva (os  $y$ ) a časom do jeho splatnosti (os  $x$ ). Rozdiel medzi dlhodobou a krátkodobou sadzbou (*spread*), na ktorý je časová štruktúra obvykle zúžená, obsahuje cenné informácie o budúcom vývoji úrokových sadzieb, o reálnej ekonomickej aktivite, aj o vývoji inflácie. Výnosová krivka býva obvykle zostavovaná pre aktíva s podobnými charakteristikami, predovšetkým s rovnakou mierou rizika, porovnateľnou likviditou a rovnakým zdanením. Najčastejšie býva konštruovaná z výnosnosti štátnych dlhopisov alebo úrokových sadzieb na peňažnom trhu.

**Tvar výnosovej krivky** môžeme skúmať z pohľadu úrovne, sklonu a zakrivenia. *Úroveň* výnosovej krivky je definovaná ako bod, v ktorom začína krátky koniec výnosovej krivky<sup>2</sup>. Tento bod je pod silným vplyvom centrálnej banky. *Sklon* výnosovej krivky sa zvyčajne popisuje rozdielom medzi dlhodobými (od 10 rokov) a krátkodobými (3 mesiace – max. 2 roky) sadzbami. Tento rozdiel označujeme ako termínový *spread* (dlhý vs. krátky koniec). Zásadný vplyv na sklon výnosovej krivky má menová politika centrálnej banky (tá ovplyvňuje hlavne krátky koniec) a očakávanie subjektov týkajúce sa výšky budúcich sadzieb. *Zakrivenie* odráža nelinearitu medzi časom do splatnosti a výnosom.

Pod **pohybom výnosovej krivky** rozumieme aj zmenu jej sklonu alebo aj zmenu jej zakrivenia a tiež celý jej posun nahor alebo nadol. Dominantný konkávny tvar výnosovej krivky vychádza z tvrdenia, že s predlžujúcim sa časom do splatnosti rastie výnos, ale pri stále menších prírastkoch. V praxi sa samozrejme stretávame aj s inými tvarmi výnosových kriviek, napríklad za konvexným tvarom stoja klesajúce výnosy s predlžujúcim sa časom do splatnosti a ak sú výnosy v čase takmer rovnaké, tak hovoríme o plochej výnosovej krivke. Pohyby krivky sú spôsobené kolísaním výnosov. Ak hľadáme odpoveď na otázku, čím sú sklon, zakrivenie a pohyb výnosovej krivky určené, treba najprv odpovedať na otázku, čím je určený výnos.

Vzťah medzi úrokovými sadzbami investičných nástrojov s rôznym obdobím splatnosti je vysvetľovaný niekoľkými teóriami<sup>3</sup>.

Najpoužívanejšou je **teória očakávaní** (expectations theory), ktorá hovorí, že výnos z vlastníctva dlhopisu do doby splatnosti je zhodný s výnosom, ktorý by investor realizoval pri opakovaných investíciách do série krátkodobých dlhopisov v období do splatnosti dlhodobého dlhopisu. Teória očakávaní vychádza z predpokladu, že dlhopisy s rôznymi dobami do splatnosti sú navzájom dokonalými substitútami, t.j. špeciálne dlhodobé výnosy sú (geometrickým) priemerom zodpovedajúcich krátkodobých výnosov. Z matematického hľadiska to napr. znamená, že forwardový výnos, zodpovedajúci určitému budúcemu

<sup>2</sup> Výnosovú krivku môžeme pomyselne rozdeliť na dve časti: krátky koniec je tvorený dlhopismi s kratšou maturitou a dlhý koniec je tvorený dlhopismi s maturitou nad 5 rokov.

<sup>3</sup> CHOUDHRY, M. 2004. *Analysing and interpreting the yield curve*. 1. vydanie. New York: John While & Sons. 300 s. ISBN: 978-0-470-82125-1.

obdobiu je najlepším odhadom budúceho aktuálneho (spotového) výnosu pre toto obdobie (forwardový výnos je rovný očakávanému budúcemu spotovému výnosu).

**Teória preferencie likvidity** (likvidity preference theory). Síce pripúšťa možnosť vzájomnej substitúcie dlhopisov s rôznymi dobami do splatnosti, ale zároveň rešpektuje určité preferencie investorov a emitentov: kým investori preferujú (vzhľadom k riziku) požíčať kapitál na kratšie obdobie, emitenti preferujú požíčať si dlhodobejšie finančné zdroje. Aby investor bol ochotný požíčať dlhodobo, musí dostať navyše určitú prémie za riziko, o ktorú sú potom dlhodobé výnosy vyššie než priemer zodpovedajúcich si krátkodobých výnosov. Táto teória je konzistentná s empirickým zistením, že rastúci tvar výnosových kriviek prevláda nad klesajúcim.

**Segmentačná teória** (teória oddelených trhov, segmentation theory) popiera možnosť vzájomnej substitúcie dlhopisov s rozdielnymi dobami do splatnosti: podľa nej je kapitálový trh dlhopisov rozdelený podľa doby do splatnosti na jednotlivé segmenty, ktoré sú viac menej striktne oddelené z hľadiska ponuky a dopytu (napríklad obchodné banky z dôvodu riadenia likvidity vyhľadávajú predovšetkým krátkodobé dlhopisy, kým penzijné fondy s dlhodobými záväzkami sa vyhľadávajú na dlhodobé dlhopisy).

## 2 ZADANIE ÚLOHY A JEJ MATEMATICKÁ FORMULÁCIA

### 2.1 Spotový a forwardový výnos a jeho výpočet

Všeobecne výnos označujeme  ${}_a y_{bc}$ <sup>4</sup>, kde  $a$  je čas rozhodovania,  $b$  je začiatok a  $c$  je koniec časového intervalu, ku ktorému sa daný výnos viaže. Výnos do splatnosti je určený ako vnútorné výnosové percento ( $y$ ) z finančných tokov ( $FT$ ) nástroja s pevnými príjmami ( $TC$  je tržová cena)

$$TC = \sum_t FT_t \cdot (1 + {}_0 y_{0,t})^{-t} \quad (1)$$

Ak platba (napríklad výplata kupónu) prebehne  $m$ -krát ročne, potom môžeme písať

$$TC = \sum_t FT_t \cdot \left(1 + \frac{{}_0 y_{0,t}}{m}\right)^{-t \cdot m} \quad (2)$$

Obvykle sa *spotová výnosová krivka* konštruje využitím bezkupónových dlhopisov s rôznymi časmi splatnosti, ale s porovnateľnými ďalšími charakteristikami. Ak nie je k dispozícii dostatok bezkupónových dlhopisov, je možné samozrejme spotový výnos určiť aj využitím kupónových dlhopisov a vzťahu (1).

*Forwardovú výnosovú krivku* je možné odvodiť zo spotovej výnosovej krivky za predpokladu vylúčenia možnosti arbitráže, zanedbania transakčných nákladov a predpokladu existencie rovnakej sadzby pre vklady a pôžičky. Platí

<sup>4</sup> ZMEŠKAL, Z. a kol. 2013. Finanční modely. 3. vydanie. EKOPRESS. 270 s. ISBN: 978-80-86929-91-0

$$(1 + {}_0 y_{0,t})^t = (1 + {}_0 y_{0,k})^k \cdot (1 + {}_0 y_{k,t})^{t-k}, \quad (3)$$

kde  $(t - k)$  je časový interval pre forwardovú sadzbu. Takže

$${}_0 y_{k,t} = \frac{(1 + {}_0 y_{0,t})^{\frac{t}{k}}}{(1 + {}_0 y_{0,k})^{\frac{t-k}{k}}} - 1. \quad (4)$$

Pri výpočtoch budeme vychádzať zo vzťahu (1), kde pre bezkupónový dlhopis prebehne len jedna platba počas jeho životnosti a teda vzťah (1) sa upraví

$$TC = FT_t \cdot (1 + y_t)^{-t}. \quad (5)$$

## 2.2 Konštrukcia výnosových kriviek z bezkupónových dlhopisov

Vypočítame potrebné výnosy a graficky znázorníme spotovú a ročnú forwardovú výnosovú krivku. Krivky vytvoríme z imaginárnych bezkupónových dlhopisov s názvom FATRA, s nominálnou hodnotou 100 € na 5 rokov. Nákup dlhopisov sa predpokladá na začiatku roka a výplata vždy na koniec roka. Trhové ceny dlhopisov FATRA pre rôzne časy do splatnosti sú uvedené v Tab. 1.

**Tabuľka 1** Charakteristiky bezkupónových dlhopisov FATRA

splatnosť (v rokoch)	trhová cena TC (€)
2	95,79
3	92,62
4	89,54
5	86,24

Konštrukcia spotovej i forwardovej výnosovej krivky v prípade, že je k dispozícii dostatok bezkupónových dlhopisov a teda s každým dlhopisom je spojený jediný finančný tok, a to na konci životnosti dlhopisu, je bezproblémová. Spotové úrokové sadzby vypočítame podľa (5) a následne podľa (4) vypočítame aj forwardové sadzby. Pre urýchlenie výpočtov využijeme vhodný softvér, napr. MS Excel. Spotovú úrokovú sadzbu vypočítame použitím funkcie RATE (;).

Spotová a úroková sadzba v prvom roku sa rovnajú. Do excelovskej funkcie RATE vstupujú štyri hodnoty, ktoré sú uvedené v Tab. 2: a to:

- počet periód – v našom prípade počet rokov (a teda aj výsledná sadzba je ročná),
- kupónová platba,
- $-TC = PV$  (present value),
- $NH = FV$  (future value).

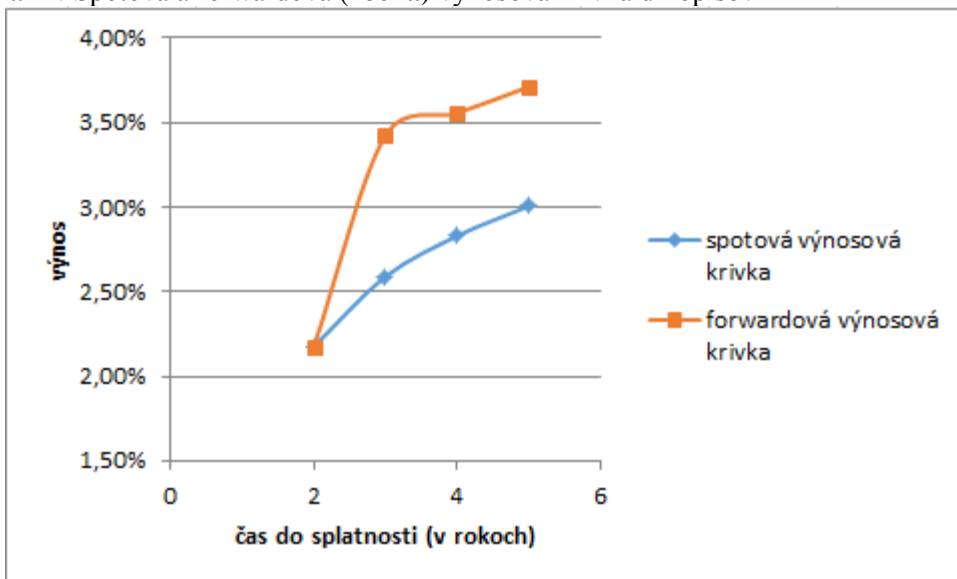
Predposledné dva neoznačené stĺpce v Tab. 2 sú len čiastkové výpočty potrebné k finálnemu určeniu forwardovej úrokovej sadzby v Exceli.

**Tabuľka 2** Výpočet spotových a forwardových sadziieb (výnosov) dlhopisov FATRA

splatnosť (v rokoch)	kupón	PV	FV	spotová úr. sadzba			forwardová úr. sadzba
2	0	-95,79	100	2,17%	1,04395		2,17%
3	0	-92,62	100	2,59%	1,07968	1,034226	3,42%
4	0	-89,44	100	2,83%	1,118068	1,035555	3,56%
5	0	-86,24	100	3,00%	1,159555	1,037106	3,71%

Na základe vypočítaných hodnôt môžeme krivky graficky znázorniť.

**Graf 1:** Spotová a forwardová (ročná) výnosová krivka dlhopisov FATRA



### 2.3 Konštrukcia kriviek z kupónových dlhopisov

V prípade, že máme k dispozícii iba kupónové dlhopisy, resp. bezkupónové dlhopisy nedostatočne pokrývajú riešený časový horizont, príslušné spotové sadzby budeme počítať metódou bootstrap, ktorú jednoducho demonštrujeme na nasledujúcom príklade. K dispozícii máme tri kupónové dlhopisy, s nominálnou hodnotou 10.000 €, ktoré vyplácajú ročné kupóny. Trhové ceny dlhopisov, splatnosť a kupónové sadzby sú uvedené v Tab. 3.



**Tabuľka 3** Charakteristiky kupónových dlhopisov.

dlhopis	splatnosť (v rokoch)	kupónová sadzba	trhová cena (€)
A	1	5,8%	9980
B	2	7,2%	9960
C	3	8,9%	9920

Odhadneme zodpovedajúce hodnoty výnosovej krivky bezkupónových dlhopisov metódou bootstrap<sup>5</sup>.

Výnos do splatnosti dlhopisu A vypočítame jednoduchým diskontovaním

$$9980 = \frac{580 + 10000}{1 + i}, \text{ a teda } i = 6,01 = i_{0,1}.$$

Ročný výnos do splatnosti dlhopisu B, a teda hodnotu  $i_{0,2}$  môžeme metódou bootstrap odhadnúť riešením nasledujúcej rovnice

$$9960 = \frac{720}{1 + 0,0601} + \frac{720 + 10000}{(1 + i_{0,2})^2}, \quad i_{0,2} = 7,47\%.$$

Podobne vypočítame aj hodnotu  $i_{0,3}$ .

$$9920 = \frac{890}{1 + 0,0601} + \frac{890}{(1 + 0,0747)^2} + \frac{890 + 10000}{(1 + i_{0,3})^3}, \quad i_{0,3} = 9,43\%.$$

Ako v podkapitole 2.2, aj teraz vypočítame príslušné výnosy a graficky znázorníme spotovú a ročnú forwardovú výnosovú krivku. Krivky vytvoríme z imaginárnych kupónových dlhopisov s názvom TATRY, s nominálnou hodnotou 100 € na 5 rokov. Nákup dlhopisov sa predpokladá na začiatku roka a výplata vždy na koniec roka. Trhové ceny dlhopisov TATRY pre rôzne časy do splatnosti sú uvedené v Tab. 4. a opäť využijeme MS Excel.

<sup>5</sup> MELICHERČÍK, I., OLŠAROVÁ, L., ÚRADNÍČEK, V. 2005. Kapitoly z finančnej matematiky. EPS. ISBN: 80-8057-651-3

**Tabuľka 4** Charakteristiky dlhopisov TATRY

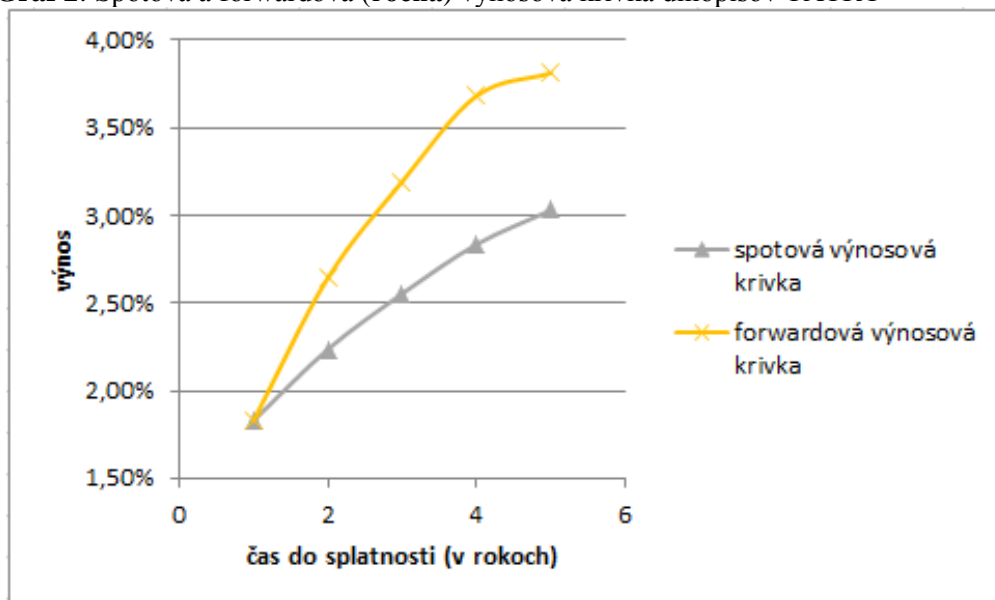
splatnosť (v rokoch)	trhová cena TC (€)	kupónová sadzba c
1	100,66	0,025
2	101,49	0,03
3	102,17	0,033
4	102,81	0,035
5	103,01	0,036

**Tabuľka 5** Finančné toky z kupónových dlhopis TATRY

dlhopisy	roky				
TATRY	1	2	3	4	5
T1	2,5+100	0	0	0	0
T2	3	3+100	0	0	0
T3	3,3	3,3	3,3+100	0	0
T4	3,5	3,5	3,5	3,5+100	0
T5	3,60	3,60	3,60	3,60	3,6+100

**Tabuľka 6** Vypočítané spotové a forwardové úr. sadzby z kup. dlhopisov TATRY

spotová úr. sadzba			forward. úr. sadzba	dlhopisy TATRY
1,83%	1,0183		1,83%	T1
2,24%	1,045219	1,026436	2,64%	T2
2,55%	1,078594	1,03193	3,19%	T3
2,83%	1,118301	1,036814	3,68%	T4
3,03%	1,16093	1,038119	3,81%	T5

**Graf 2:** Spotová a forwardová (ročná) výnosová krivka dlhopisov TATRY

### 3 VÝNOSOVÁ KRIVKA A REÁLNA EKONOMICKÁ AKTIVITA

Rast rozdielu medzi dlhodobou a krátkodobou sadzbou (spread) je spájaný s budúcim rastom ekonomiky. Naopak, pokles spreadu indikuje recesiu. Dôvodom je interakcia menovej politiky a trhových očakávaní. Pri reštriktívnej menovej politike dochádza obvykle k rastu úrokových sadzieb. Rast sa týka predovšetkým sadzieb na krátkom konci výnosovej krivky (ten zodpovedá časom do splatnosti 3, 6, 9 mesiacov). Dlhý koniec je oveľa viac ovplyvňovaný zmenami v očakávanej inflácii a zmenami reálnej očakávanej dlhodobej sadzby. Výnosová krivka sa teda "narovnáva". Ak vyššie sadzby vedú k nižším investíciám a nižšiemu rastu v budúcnosti, potom je tiež zrejmé, že pokles spreadu môže indikovať pokles ekonomickej aktivity. Prípad, ak sa krátkodobé sadzby nemenia a spread klesá v dôsledku poklesu sadzieb na dlhom konci výnosového spektra, signalizuje podľa teórie racionálnych očakávaní pokles dlhodobých sadzieb a očakávanie poklesu krátkodobých sadzieb niekedy v budúcnosti. História ukazuje, že v recesii skutočne dochádza k poklesu krátkodobých sadzieb. Dôvodom môže byť expanzívna menová politika v snahe motivovať ekonomiku k rastu, pokles transakčného dopytu po peniazoch, ale aj pokles reálneho výnosu obvyklého pri recesii. Súčasný pokles dlhodobých sadzieb, ktorý sa prejaví v klesajúcej výnosovej krivke, teda indikuje budúce ekonomické spomalenie alebo recesiu.<sup>6</sup>

<sup>6</sup> MIŠTEK, I. 2004. *Výnosová krivka ako indikátor ekonomickej aktivity a inflácie*. Hospodárske noviny. [www.hnonline.sk](http://www.hnonline.sk).

Celú situáciu možno analyzovať aj z *pohľadu účastníkov trhu s dlhopismi*. Pozitívne budúce očakávanie (rast ekonomiky) vedie k očakávaniu vyšších budúcich príjmov a motivuje súčasné investície typicky dlhodobého charakteru. Investori si na pokrytie týchto investícií požičiavajú prostriedky emisiou dlhodobých dlhopisov. Zvýšenie ponuky takýchto dlhopisov vedie k poklesu ich ceny a teda k rastu ich výnosnosti relatívne voči dlhopisom krátkodobým. Dochádza k rastu dlhého konca výnosovej krivky a rastu spreadu, ktorý indikuje očakávané zvýšenie ekonomickej aktivity.

Podobné vysvetlenie je možné aj z *pohľadu investora do dlhopisov*. Ak účastníci trhu s dlhopismi očakávajú rast reálnych výnosov v budúcnosti, môže sa toto očakávanie prejaviť v poklese dopytu po dlhodobých dlhopisoch. Pokles dopytu znamená potom pokles ceny týchto dlhopisov a teda rast ich výnosnosti.

## Záver

Záverom treba podotknúť, že nemá zmysel v tomto prípade hodnotiť alebo interpretovať výsledné krivky, keďže vstupné dáta sú vymyslené a hlavným cieľom príspevku bolo ukázať spôsob konštrukcie výnosových kriviek.

Ak by sme všeobecne chceli hodnotiť výnosové krivky a veľkosť rozdielu medzi dlhodobou a krátkodobou sadzbou (spread), tak je možné takéto hodnotenie zhrnúť do nasledovných tvrdení:

- výnosová krivka je štatisticky aj ekonomicky významným predikčným nástrojom ekonomickej aktivity,
- rast výšky spreadu medzi dlhodobou a krátkodobou sadzbou je nasledovaný reálnym rastom ekonomiky (s oneskorením približne štyroch a viacerých kvartálov),
- čím väčší je súčasný spread, tým väčšie je budúce zvýšenie ekonomickej aktivity.

## Kľúčové slová

výnosová krivka, spotová úroková sadzba, forwardová úroková sadzba, kupónový dlhopis

## Klasifikácia JEL

G17

## LITERATÚRA

- [1] CHOUDHRY, M. 2004. *Analysing and interpreting the yield curve*. 1. vydanie. New York: John While & Sons. 300 s. ISBN: 978-0-470-82125-1.
- [2] MELICHERČÍK, I., OLŠAROVÁ, L., ÚRADNÍČEK, V. 2005. Kapitoly z finančnej matematiky. EPS. ISBN: 80-8057-651-3.
- [3] MIŠTEK, I. 2004. *Výnosová krivka ako indikátor ekonomickej aktivity a inflácie*. Hospodárske noviny. www.hnonline.sk.
- [4] POLÁČEK, Štefan - PÁLEŠ, Michal. 2012 *Risk management interest rate changes and duration in insurance companies*. In *Managing and modelling of*

*financial risks : 6th international scientific conference : proceedings : 10th - 11th September 2012, Ostrava. Vysoká škola báňská - Technická univerzita Ostrava. ISBN 978-80-248-2835-0.*

- [5] ZMEŠKAL, Z. a kol. 2013. Finanční modely. 3. vydanie. EKOPRESS. 270 s. ISBN: 978-80-86929-91-0.

## RESUMÉ

Cieľom príspevku bolo ukázať spôsob konštrukcie spotových a forwardových výnosových kriviek, ktoré sú významným finančným indikátorom. Výnosová krivka vyjadruje graficky vzťah medzi výnosom aktíva a časom do jeho splatnosti. Rozdiel medzi dlhodobou a krátkodobou sadzbou (spread), na ktorý je časová štruktúra úrokových mier obvykle zúžená, obsahuje cenné informácie o budúcom vývoji úrokových sadzieb, o reálnej ekonomickej aktivite, aj o vývoji inflácie. Výnosová krivka býva obvykle zostavovaná pre aktíva s podobnými charakteristikami, predovšetkým s rovnakou mierou rizika, porovnateľnou likviditou a rovnakým zdanením. Najčastejšie býva konštruovaná z výnosnosti štátnych dlhopisov alebo úrokových sadzieb na peňažnom trhu. V príspevku som vychádzala z imaginárnych údajov, ktoré mi ponúkli dostatočný priestor na vysvetlenie konštrukcie výnosových kriviek. Pri ich konštrukcie sa využívajú iba základné poznatky z finančnej matematiky a to hlavne jednoduché, prípadne zložené diskontovanie. Vzhľadom na množstvo výpočtov, ktoré vedú k nájdeniu správnej úrokovej miery, je potrebné využiť možnosti softvérovej podpory. V príspevku som využila MS Excel, ktorý síce hlavne pri konštrukcii výnosovej krivky z kupónových dlhopisov neponúka priamo funkciu vedúcu k výpočtu príslušných výnosov, ale aj tak výrazne zjednoduší a hlavne urýchli proces počítania. A v konečnom dôsledku v Exceli ľahko zostrojíme aj samotné grafy. Výnosová krivka je štatisticky aj ekonomicky významným predikčným nástrojom ekonomickej aktivity, rast výšky spreadu medzi dlhodobou a krátkodobou sadzbou je nasledovaný reálnym rastom ekonomiky.

## SUMMARY

The aim of the article is to explain methods of construction of spot and forward yield curves, that are important financial indicator. The yield curve graphically expresses the relationship between bond yields and maturity. The difference between long-term and short-term rates (spread) to which the term structure of interest rates generally narrowed, contains information about future developments in interest rates on real economic activity, and on inflation. The yield curve is usually compiled for assets with similar characteristics, especially with the same level of risk comparable liquidity and equal taxation. It is most frequently constructed of government bonds yield or interest rates on the financial market. The article was based on imaginary data that offered enough space to explain the construction of yield curves. During their construction, we use only elementary financial mathematics and especially simple or compound discounting. Given the amount of calculations that lead to finding the right interest rate, it is necessary to use the software support. In this article, we use MS Excel. Although mainly in the construction of the yield curve of coupon bonds doesn't exist direct function leading to the calculation of the

relevant income, as well as significantly simplify and speed up the curve constructing process. The yield curve is statistically and economically significant prediction tool of economic activity, increase the height of the spread between long-term and short-term rates is followed by the real growth of the economy.

### **Kontakt**

Mgr. Andrea Kaderová, PhD., Katedra matematiky, Fakulta hospodárskej informatiky, Ekonomická univerzita v Bratislave, Dolnozemska cesta 1/b, 852 35 Bratislava, tel.: +421 2/67295 816, e-mail: kaderova.euba@gmail.com

---

*Ladislav Kareš*

## **BUDÚCNOSŤ AUDÍTORSKÝCH SLUŽIEB V KONTEXTE POŽIADAVIEK VEREJNÉHO ZÁUJMU**

### **Úvod**

V dnešnej dobe sme svedkami neustále sa meniacich skutočností v rôznych oblastiach spoločenského, politického a ekonomického života. Permanentne sa meniace okolie nášho záujmu postihlo aj oblasť auditu. V poslednom období došlo k významným zmenám v právnej úprave auditu. Prijatie *harmonizovanej Smernice Európskeho Parlamentu a Rady 2006/43/ES o štatutárnom audite ročných účtovných závierok a konsolidovaných účtovných závierok v znení neskorších úprav (Smernica európskeho parlamentu a rady 2013/34/EÚ z 26. júna 2013 o ročných účtovných závierkach, konsolidovaných účtovných závierkach a súvisiacich správach určitých druhov podnikov, ako aj Smernica európskeho parlamentu a rady 2014/56/EÚ zo 16. apríla 2014, ktorou sa mení smernica 2006/43/ES o štatutárnom audite ročných účtovných závierok a konsolidovaných účtovných závierok)*, ako aj prijatie *zákona č. 540/2007 Z.z. o audítoroch, audite a dohľade nad výkonom auditu (zákona č.423/2015 Z.z. o štatutárnom audite s účinnosťou od 1.1.2016 resp. 17.6.2016)* viedlo k tomu, že v audítorských a uisťovacích službách sme sa dostali do bodu, keď môžeme ignorovať výzvy volajúce po zmene a môžeme sa snažiť im vzdorovať, môžeme si prestať všímať potreby rozličných zainteresovaných skupín a skôr či neskôr budeme čeliť riziku, že pre ne už nebudeme natoľko významní, alebo môžeme uvítať zmenu, prijať inovatívnejší – niekedy aj sebakritickejší – prístup a sami začať ponúkať nové myšlienky.

### **1 AUDIT – CIEĽ, PREDMET A FUNKCIE AUDITU**

Cieľom účtovníctva a auditu je dosiahnuť účinnejšie, transparentnejšie a dôveryhodnejšie finančné vykazovanie, ktoré umožní prijímať informovanejšie rozhodnutia. Aby sme kráčali správnym smerom, ktorý nás privedie k naplneniu uvedeného cieľa mali by sme sa usilovať o nasledovné ciele:

- zvyšovať nielen kvalitu audítorských a uisťovacích služieb, ale aj dôveryhodnosť a spoľahlivosť audítorských služieb,
- skvalitňovať rozličné formy komunikácie audítorov,
- prehľbiť úlohu audítorov a služieb, ktoré poskytujú, aby mohli lepšie reagovať na potreby zainteresovaných osôb.

([https://www.surveymonkey.com/s/discussion\\_future\\_of\\_audit\\_and\\_assuran;](https://www.surveymonkey.com/s/discussion_future_of_audit_and_assuran;))

Audítorská profesia sa vždy snažila o maximálnu kvalitu auditu. Udalosti posledných rokov ukázali, že je rovnako dôležitá pre tých, ktorí vypracúvajú účtovné závierky a výročné správy, investorov ako aj pre regulátorov.

Slovo **audit** je latinského pôvodu. Odvodzuje sa z latinského slova „audire“, ktorého pôvodný význam je počúvanie, no v súčasnosti sa používa vo význame nezávislého overovania. Takéto úzke chápanie slova audit však nezahŕňa všetky jeho aspekty, ale sústreďuje sa iba na časť nazývanú audit finančných výkazov (účtovnej závierky). Audit v širšom slova zmysle však predstavuje systematický proces objektívneho získavania a vyhodnocovania dôkazov, týkajúcich sa informácií o rôznych (nielen ekonomických) činnostiach a udalostiach, s cieľom zistiť mieru súladu medzi týmito informáciami a stanovenými kritériami a oznámiť výsledky zainteresovaným stranám.

Účelom auditu finančných výkazov (účtovnej závierky) je umožniť audítorovi vyjadriť názor, či sú finančné výkazy (je účtovná závierka) zostavené(á) vo všetkých významných súvislostiach v súlade so stanoveným rámcom finančného vykazovania. Audítor uskutočňuje audit v súlade s Medzinárodnými audítorskými štandardmi – ISA. Rozsah auditu predstavuje uplatnenie audítorských postupov nevyhnutných na dosiahnutie **cieľa auditu**. Postupy, ktoré sú potrebné na uskutočnenie auditu v súlade s medzinárodnými audítorskými štandardmi, si určí audítor vzhľadom na požiadavky platných štandardov, príslušných profesijných organizácií, legislatívy a kde je to vhodné, podľa podmienok prijatej zákazky a pravidiel finančného výkazníctva (príslušného rámca finančného vykazovania).

Všeobecne možno **audítorstvo** charakterizovať ako samostatnú účelovú profesiu, orientovanú na mnohostranné skúmanie a ucelené, kvalifikované hodnotenie podniku ako dynamického objektu, s jednoznačným záverom z hľadiska účelu, pre ktorý sa objednáva. Tento účel formuluje objednávateľ a audítor sa zaväzuje poskytnúť mu kvalifikované (profesionálne) závery pre rozhodovanie. (Laučík, Z.: Úvod k prekladu Leffson V. – Audítorstvo. Bratislava. Elán. 1993)

Na základe uvedenej definície môžeme konštatovať, že **základným cieľom auditu** je zvýšenie vierohodnosti účtovných informácií tých spoločností, ktoré povinne zverejňujú finančné výkazy (účtovné závierky) a výročné správy, a ktoré majú povinnosť overenia finančných výkazov (účtovnej závierky) audítorom. **Druhotným** (odvodeným) **cieľom auditu** je jeho morálne a preventívne pôsobenie proti vzniku chýb a podvodov.

Ciele a funkcie auditu je však treba chápať i v kontexte širších súvislostí s účtovným, ekonomickým ale aj sociálnym okolím. Je všeobecne známe, že audit vznikol z objektívnej potreby odstránenia, alebo zníženia informačnej asymetrie vyvolanej oddelením výkonu vlastníckych práv a výkonu bežného riadenia spoločnosti. Jeho



---

**primárnou** funkciou je teda zvyšovanie vierohodnosti ekonomických a predovšetkým účtovných informácií, ktoré sú prezentované vlastníkom spoločnosti. Výročné správy, individuálne a konsolidované účtovné závierky (finančné výkazy) sú zrejme hlavnými príkladmi informačných tokov, ktoré predkladá spoločnosť nielen vlastníkom, ale aj ostatným používateľom týchto informácií. Zníženie ich entropie dodaním požadovaných informácií v podobe správy audítora je teda základnou funkciou auditu.

Audítor je jedným prvkom celého ekosystému finančných a nefinančných výkazov v rámci širšieho prostredia zameraného na spravovanie spoločnosti. Hodnota auditu spočíva vo zvýšení dôvery v účtovné závierky. Na účtovné závierky však výrazne vplývajú záležitosti, ktoré audítor nemôže ovplyvniť. Takže, ak je rámec finančného vykazovania nedostatočný a spravovanie spoločnosti, posúdenie rizík a kontrolné opatrenia prijaté manažmentom sú neadekvátne, nemožno očakávať, že audit – spĺňajúci hoci i tie najvyššie kvalitatívne kritériá – podstatne zvýši dôveryhodnosť a spoľahlivosť auditovaných účtovných závierok a výročných správ.

Jedným z najdôležitejších faktorov pre budúcnosť audítorských a uist'ovacích služieb je maximálne efektívne využívanie informačných technológií (IT) pri výkone auditu. Informačné technológie v audítorskej profesii pravdepodobne spôsobia prevrat technológie na spracovanie veľkých objemov dát (Big Data). V budúcnosti sa bude čoraz častejšie využívať automatizácia na odsúhlasovanie údajov, na výbery aj testovanie vzoriek, na zložité prepočty a iné podobné úkony. Vzhľadom na čoraz väčšie požiadavky na transparentnosť a rastúce očakávania treba zlepšiť informatívnu hodnotu audítorskej správy. Projekt zameraný na oblasť správy audítora ako projekt najvyššej priority navrhuje nové požiadavky vrátane nových reportingových oblastí v audítorskej správe z auditu verejného sektora, ako napríklad špeciálne časti o najdôležitejších záležitostiach auditu, vhodnosti účtovania na základe predpokladu nepretržitého pokračovania v činnosti spoločnosti, nezávislosti audítora a zodpovednosti audítora. Návrhy nových správ možno považovať za experiment, a čas ukáže, či sa týmto spôsobom dajú naplniť očakávania používateľov. Navrhli sa aj ďalšie možnosti, vďaka ktorým by boli audítorské správy v budúcnosti ešte inovatívnejšie. Profesia by mala pouvažovať o niektorých návrhoch:

- zavedenie hodnotiaceho alebo bodovacieho systému ?
- častejšie predkladanie správ ?
- iné spôsoby komunikácie ?

([https://www.surveymonkey.com/s/discussion\\_future\\_of\\_audit\\_and\\_assuran;](https://www.surveymonkey.com/s/discussion_future_of_audit_and_assuran;))

Zrejme je čosi pravdy na tvrdení, že sa profesia príliš zameriava na štatutárny audit, ktorý sa vykonáva v medziach náročného rámca regulačných predpisov a zodpovednosti, čo môže brániť inovácii. Musíme využiť svoje odborné skúsenosti a jedinečné zručnosti a

---

vypracovať iné riešenia, ktoré lepšie naplnia potreby zainteresovaných osôb. Audítor tak môže poskytnúť pridanú hodnotu v rôznych oblastiach netýkajúcich sa len audítorských služieb v užšom slova zmysle.

Zo strany používateľov finančných výkazov (účtovných závierok) sa zvyšuje dopyt po istom druhu uistenia k prvej časti výročnej správy (front half of the annual report). Aj vývoj v oblasti správ týkajúcich sa podnikovej a spoločenskej zodpovednosti (Corporate and Social Responsibility – CSR), životného prostredia a riadenia spoločnosti (Environmental, Social Governance – ESG) a integrované správy (Integrated Reporting – IR) môže viesť k istej forme uistenia, ak si ho budú zainteresované osoby alebo trh želať. K zvýšeniu dôveryhodnosti by určite prispelo uistenie o týchto rôznych súčastiach správ.

## **2 AUDÍTORSKÉ ŠTANDARDY AKO ZÁKLAD PRE UISŤOVACIE SLUŽBY**

Účtovní odborníci a audítori sa v súčasnosti pri poskytovaní svojich služieb do veľkej miery spoliehajú na používanie (globálnych) štandardov. (Napríklad Medzinárodné audítorské štandardy (International Standards on Auditing - ISAs), Medzinárodné štandardy pre zákazky na uisťovacie služby (International Standards on Assurance - ISAEs) a Medzinárodné štandardy pre zákazky na preverenie (International Standards on Review Engagements - ISREs), Medzinárodné štandardy na súvisiace služby (International Standards on Related Services - ISRSs), Medzinárodné štandardy na kontrolu kvality (International Standards on Quality Control - ISQCs), Medzinárodný etický kódex (International Code of Ethics), Medzinárodné štandardy finančného výkazníctva (International Financial Reporting Standards - IFRS), IFRS pre malé a stredne veľké podniky (SME), Medzinárodné účtovné štandardy pre verejný sektor (International Public Sector Accounting Standards - IPSAS) a všetky platné medzinárodné, vnútroštátne alebo lokálne ekvivalenty.) Používanie takýchto kvalitných štandardov bolo a je hlavným charakteristickým prvkom profesie, ktorý je na nesmierne konkurenčnom trhu aj naďalej relevantný. Subjekty určujúce štandardy musia zabezpečiť ich neustálu aktualizáciu, aby nebránili inovácii a vývoju, ku ktorému dochádza v praxi.

Medzinárodná federácia účtovníkov („IFAC“) slúži verejnému záujmu tým, že prispieva k zvýšeniu transparentnosti, zodpovednosti a porovnateľnosti finančného výkazníctva (účtovných závierok), prispieva k rozvoju účtovníckej a audítorskej profesie. IFAC v rámci svojho mandátu v oblasti verejného záujmu prispieva k tvorbe, prijímaniu a uplatňovaniu kvalitných medzinárodných audítorských a uisťovacích štandardov, predovšetkým prostredníctvom podpory Rady pre medzinárodné štandardy pre audit a uisťovacie služby („IAASB“). IFAC poskytuje tejto nezávislej rade vytvárajúcej štandardy ľudské zdroje, zariadenia, komunikačnú podporu a financovanie a zabezpečuje nominácie a výberové konanie členov rady.

---

Cieľom IAASB je vypracovať súbor medzinárodných štandardov a iných usmernení, ktoré sa budú uznávať na celom svete. Usmerneniami IAASB sa riadia zákazky na audit, preverenie, iné uisťovacie a súvisiace služby vykonávané v súlade s medzinárodnými štandardmi. Nie sú nadradené miestnym zákonom ani predpisom, ktoré v konkrétnom štáte upravujú audit historickej účtovnej závierky alebo zákazky na uistenie týkajúce sa iných informácií, ktoré treba dodržiavať v súlade s vnútroštátnymi normami. Záväznosť medzinárodných štandardov vydaných Radou pre medzinárodné štandardy pre audit a uisťovacie služby IAASB sa zameriava na:

- *Medzinárodné audítorské štandardy (International Standards on Auditing - ISA)*, ktoré sa uplatňujú pri audite historických finančných informácií.
- *Medzinárodné štandardy pre zákazky na preverenie (International Standards on Review Engagements - ISRE)*, ktoré sa uplatňujú pri preverení historických finančných informácií.
- *Medzinárodné štandardy pre zákazky na uisťovacie služby (International Standards on Assurance Engagements - ISAE)*, ktoré sa uplatňujú pri zákazkách na uisťovacie služby iné ako audit alebo preverenie historických finančných informácií.
- *Medzinárodné štandardy na súvisiace služby (International Standards on Related Engagements - ISRS)*, ktoré sa uplatňujú pri zákazkách na zostavenie, zákazkách na uplatnenie dohodnutých postupov na informácie a zákazkách na iné súvisiace služby podľa špecifikácií IAASB.

Štandardy ISA, ISRE, ISAE a ISRS sa spoločne označujú ako **Štandardy IAASB pre zákazky**.

- *Medzinárodné štandardy na kontrolu kvality (International Standards on Quality Control - ISQC)*, ktoré sa uplatňujú na všetky služby, na ktoré sa vzťahujú Štandardy IAASB pre zákazky.

Štandardy ISA sa vzťahujú na audit finančných výkazov (účtovnej závierky) vykonávaný nezávislým audítorom. Pri ich uplatnení na audit iných historických finančných informácií ich treba upraviť podľa okolností. Záväznosť štandardov ISA je uvedená v štandarde ISA 200. Základné princípy a nevyhnutné postupy štandardu sa uplatňujú vždy, keď sú pre okolností zákazky relevantné. Za mimoriadnych okolností však môže audítor považovať za potrebné odkloniť sa od relevantného nevyhnutného postupu, aby dosiahol jeho účel. Keď takáto situácia nastane, audítor je povinný zdokumentovať, ako sa vykonaním alternatívnych postupov dosiahol účel postupu a, ak to nie je inak zrejmé, aj dôvody odklonu od postupu. Predpokladá sa, že audítor bude považovať za potrebné odkloniť sa od relevantného nevyhnutného postupu iba za špecifických okolností zákazky, keď by bol daný postup neúčinný. Rozsah pôsobnosti, dátum nadobudnutia účinnosti a všetky osobitné obmedzenia aplikovateľnosti konkrétneho medzinárodného štandardu sú uvedené v danom štandarde.

---

V januári 2015 Medzinárodná federácia účtovníkov (IFAC) vydala a zverejnila **záverečné znenie štandardov** ohľadom vylepšení týkajúcich sa správy nezávislého audítora. Zmeny sa týkajú týchto štandardov:

*ISA 700 (revidovaný) Formovanie stanoviska k finančným výkazom a správa nezávislého audítora (Forming an Opinion and Reporting on Financial Statements.)* Tento štandard sa zaoberá zodpovednosťou audítora za sformovanie stanoviska k finančným výkazom. Takisto sa zaoberá formou a obsahom audítorskej správy vydanéj ako výsledok auditu finančných výkazov.

*Nový ISA 701 Uvádzanie kľúčových záležitostí auditu v správe nezávislého audítora (Zatiaľ ide len o neoficiálny slovenský preklad názvu štandardu) anglická verzia znie: Communicating Key Audit Matters in the Independent Auditor's Report*

*ISA 705 (revidovaný) Modifikácie stanoviska v správe nezávislého audítora (Modifications to the Opinion in the Independent Auditor's Report).* Cieľom štandardu je stanoviť, kedy musí byť správa audítora modifikovaná, a formu a obsah týchto modifikácií.

*ISA 706 (revidovaný) Odseky so zdôraznením skutočnosti a odseky o iných skutočnostiach v správe nezávislého audítora (Emphasis of Matter Paragraphs and Other Matter Paragraphs in the Independent Auditor's Report).* Cieľom tohto štandardu je poskytnúť audítovi návod v otázkach doplňujúcich informácií v audítorskej správe, keď audítor považuje za potrebné upozorniť používateľov na skutočnosti prezentované alebo zverejnené vo finančných výkazoch, ktoré sú natoľko dôležité, že sú zásadné na pochopenie finančných výkazov používateľmi, alebo na skutočnosti, ktoré sú relevantné na pochopenie auditu, zodpovednosti audítora alebo audítorskej správy zo strany používateľov.

*ISA 570 (revidovaný) Nepretržité pokračovanie v činnosti (Going Concern).* Cieľom tohto štandardu je poskytnúť návod na zodpovednosť audítora pri audite finančných výkazov vzhľadom na predpoklad nepretržitého pokračovania v činnosti, ktorý sa uplatňuje pri zostavení finančných výkazov.

*ISA 260 (revidovaný) Komunikácia s osobami poverenými spravovaním (Communication with Those Charged with Governance).* Cieľom tohto štandardu je poskytnúť návod na komunikáciu medzi audítorom a osobami poverenými spravovaním účtovnej jednotky o otázkach auditu, ktoré vyplynuli z auditu finančných výkazov.

V apríli 2015 Medzinárodná federácia účtovníkov (IFAC) vydala a zverejnila *ISA 720 (revidovaný) Zodpovednosť audítora vo vzťahu k iným informáciám (The Auditor's Responsibilities Relating to Other Information in Documents Containing Audited Financial Statements).* Cieľom tohto štandardu je poskytnúť návod na posudzovanie ostatných informácií, o ktorých audítor nemá povinnosť vypracovať správu, a ktoré sú uvedené v dokumentoch, ktoré obsahujú auditované finančné výkazy.

### 3 SMERNICE EURÓPSKEHO PARLAMENTU AKO INICIÁTOR ZMIEN V AUDÍTORSKÝCH SLUŽBÁCH

V roku 2013 bola prijatá Smernica európskeho parlamentu a rady 2013/34/EÚ z 26. júna 2013 o ročných účtovných závierkach, konsolidovaných účtovných závierkach a súvisiacich správach určitých druhov podnikov, ktorou sa mení smernica Európskeho parlamentu a Rady 2006/43/ES a zrušujú smernice Rady 78/660/EHS a 83/349/EHS. V tejto smernici v kapitole 7 a predovšetkým v kapitole 8 – Audit je deklarovaná požiadavka aby členské štáty EU zabezpečili, aby audit účtovných závierok subjektov verejného záujmu, stredne veľkých a veľkých podnikov vykonal jeden alebo viac štatutárnych audítorov alebo audítorských spoločností schválených členskými štátmi na vykonávanie štatutárnych auditov na základe smernice 2006/43/ES.

Štatutárni audítori alebo audítorské spoločnosti taktiež vyjadria svoj názor na to či je správa o hospodárení v súlade s účtovnou závierkou za rovnaký účtovný rok a či sa správa o hospodárení vypracovala v súlade s uplatniteľnými právnymi požiadavkami, uvedú, či na základe poznania a porozumenia podniku a jeho prostredia získaných počas auditu, audítor alebo audítorská spoločnosť zistili významné nesprávnosti v správe o hospodárení, pričom uvedú charakter každej takejto nesprávnosti. (NEWSLETTER FOR THE EUROPEAN UNION. 2014. Smernice 2013/34/EU o ročných a konsolidovaných účtovných výkazov a súvisiacich správach. [online]. [cit. 8. 11. 2015]. Dostupné na internete: <http://www.newslettereuropean.eu/directive-201334eu-annual-consolidated-financial-statements-related-reports/>)

*Zmena smernice 2006/43/ES, pokiaľ ide o správu audítora je nasledovná:*

Správa audítora obsahuje úvod, ktorý obsahuje aspoň označenie účtovnej závierky, ktorá je predmetom štatutárneho auditu, spolu s popisom rámca finančného výkazníctva použitého pri zostavovaní účtovnej závierky, vymedzenie rozsahu štatutárneho auditu, v ktorom sa aspoň identifikujú audítorské štandardy, podľa ktorých sa štatutárny audit vykonal, názor audítora, ktorý je buď nepodmienенý, podmienený alebo záporný a v ktorom sa jasne uvádza názor štatutárneho audítora na to či ročná účtovná závierka poskytuje pravdivý a verný obraz v súlade s príslušným rámcom finančného výkazníctva, a ak je to vhodné, či je ročná účtovná závierka v súlade so štatutárnymi požiadavkami. Ak nie je možné, aby štatutárny audítor vyjadril názor, správa musí obsahovať odmietnutie vyjadrenia názoru. Ďalej správa obsahuje odkaz na akékoľvek záležitosti, ktoré štatutárny audítor zdôraznil, bez toho, aby vyjadril podmienený názor.

V roku 2014 bola prijatá Smernica európskeho parlamentu a rady 2014/56/EÚ zo 16. apríla 2014, ktorou sa mení smernica 2006/43/ES o štatutárnom audite ročných účtovných závierok a konsolidovaných účtovných závierok. Dôvodom prijatia tejto novely bolo, že Smernicou Európskeho parlamentu a Rady 2006/43/ES sa ustanovujú podmienky schvaľovania a registrácie osôb vykonávajúcich štatutárny audit, pravidlá o nezávislosti, objektívnosti a profesijnej etike, ktoré sa uplatňujú na uvedené osoby, ako aj rámec pre

---

verejný dohľad nad nimi. Je však potrebné ďalej harmonizovať uvedené pravidlá na úrovni Únie, aby sa umožnila väčšia transparentnosť a predvídateľnosť požiadaviek, ktoré na také osoby uplatňujú, a aby sa zlepšila ich nezávislosť a nestrannosť vo vykonávaní ich úloh. Rovnako je dôležité zvýšiť minimálnu úroveň zblíženia, pokiaľ ide o audítorské štandardy, na základe ktorých sa vykonávajú štatutárne audity. Okrem toho, v snahe posilniť ochranu investora je dôležité posilniť verejný dohľad nad štatutárnymi audítormi a audítorskými spoločnosťami tým, že sa posilní nezávislosť orgánov verejného dohľadu Únie a delegujú sa na ne primerané právomoci vrátane prešetrovacích právomocí a právomoci ukladať sankcie s cieľom odhaľovať porušenia platných predpisov, odrádzať od nich, ako aj predchádzať takýmto porušeniam v súvislosti s poskytovaním audítorských služieb štatutárnymi audítormi a audítorskými spoločnosťami.

## **Záver**

Vzhľadom na podstatný verejný význam subjektov verejného záujmu, ktorý vyplýva z rozsahu a zložitosti ich činnosti alebo z povahy ich činnosti, je potrebné posilniť dôveryhodnosť auditovaných účtovných závierok subjektov verejného záujmu. Z toho dôvodu sú osobitné ustanovenia o štatutárnom audite subjektov verejného záujmu uvedené v smernici 2006/43/ES ďalej rozvinuté v nariadení Európskeho parlamentu a Rady (EÚ) č. 537/2014. Ustanovenia o štatutárnych auditoch subjektov verejného záujmu stanovené v tejto smernici by sa mali vzťahovať na štatutárnych audítorov a audítorské spoločnosti, len pokiaľ vykonávajú štatutárne audity takýchto subjektov.

Obzvlášť dôležité je posilniť nezávislosť ako základný prvok pri vykonávaní štatutárnych auditov. S cieľom posilniť nezávislosť štatutárnych audítorov a audítorských spoločností od auditovaného subjektu pri výkone štatutárneho auditu by štatutárny audítor alebo audítorská spoločnosť a každá fyzická osoba, ktorá môže priamo alebo nepriamo ovplyvniť výsledok štatutárneho auditu, mali byť nezávislí od auditovaného subjektu a nemali by byť zapojení do procesu rozhodovania v auditovanom subjekte.

Výsledkom štatutárneho auditu je vyjadrenie názoru, že účtovné závierky (finančné výkazy) poskytujú pravdivý a verný obraz o auditovaných subjektoch v súlade s príslušným rámcom finančného výkazníctva. Zainteresované strany si však nemusia byť vedomé obmedzení auditu, pokiaľ ide napríklad o významnosť, postupy výberu vzoriek, úlohu audítora v zisťovaní podvodu a zodpovednosť manažérov, ktoré môžu viesť k rozdielu medzi očakávaniami a výsledkom. S cieľom zmenšiť uvedený rozdiel je dôležité jasnejšie vymedziť rozsah štatutárneho auditu.

Je dôležité zabezpečiť vysokú kvalitu štatutárnych auditov v rámci Únie. Všetky štatutárne audity by sa preto mali vykonávať na základe medzinárodných audítorských štandardov, ktoré prijala Komisia. Keďže medzinárodné audítorské štandardy sú navrhnuté tak, aby boli využiteľné pre subjekty všetkých veľkostí, všetkých typov a vo všetkých jurisdikciách, príslušné orgány členských štátov by mali pri posudzovaní rozsahu

---

uplatňovania medzinárodných audítorských štandardov brať do úvahy rozsah a zložitosť podnikania malých podnikov. Akékoľvek ustanovenie alebo opatrenie prijaté v tejto súvislosti členským štátom by nemalo mať za následok, že štatutárni audítori alebo audítorské spoločnosti nebudú schopní vykonávať štatutárny audit v súlade s medzinárodnými audítorskými štandardmi.

*Hlavné zásady a priority* prijaté v tejto novele smernice 2006/43/ES by mali členské štáty implementovať do svojej legislatívy do roku 2016.

Zmeny sa týkajú predovšetkým oblastí:

- rozsah subjektov verejného záujmu,
- rozšírenie povinností vyplývajúcich zo zákona aj na subjekty verejného záujmu,
- zloženie a kompetencie výboru pre audit,
- zvýšenie nezávislosti a zabezpečenia systému vnútornej kvality audítorov a audítorských spoločností,
- vnútorná organizácia audítorov a audítorských spoločností,
- zavedenie účinných mechanizmov na podporu ohlasovania porušení smernice alebo nariadenia,
- presun niektorých kompetencií zo Slovenskej komory audítorov na Úrad pre dohľad nad výkonom auditu (ďalej len „úrad“),
- zavedenie nových kompetencií pre úrad,

zavedenie nových registračných poplatkov pre audítorov a audítorské spoločnosti, ktoré vykonávajú audit v subjektoch verejného záujmu. (Zákon 423/2015 Z.z. o štatutárnom audite a o zmene a doplnení zákona č. 431/2002 Z.z o účtovníctve v znení neskorších predpisov. Zbierka zákonov s. 4644 č.113/2016).

### **Kľúčové slová**

audit, audítorské služby, verejný záujem, budúcnosť auditu.

### **Klasifikácia JEL**

M4, M42

### **LITERATÚRA**

- [1] KAREŠ, L. 2015. *Teória auditu*. Bratislava: Wolters Kluwer, 2015. 135 s. ISBN 978-80-8168-149-3
- [2] KAREŠ, L., KRIŠKOVÁ, P. 2015. *Audítorské štandardy*. Bratislava. Wolters Kluwer, 2015. 154 s. ISBN 978-80-8168-244-5
- [3] KAREŠ, L. 2015. *Audítorské postupy*. Bratislava: Wolters Kluwer, 2014. 142 s. ISBN 978-80-8168-061-8

- 
- [4] KAREŠ, L., KRIŠKOVÁ, P., KŇAŽKOVÁ, V. 2014. *Audítorská dokumentácia*. Bratislava. Wolters Kluwer, 2014. 264 s. ISBN 978-80-8168-145-5
- [5] KAREŠ, L., KRIŠKOVÁ, P. 2013. *Správa audítora*. Bratislava. Súvaha, 2013. 161 s. ISBN 978-80-89265-23-7
- [6] Laučík, Z. 1993. *Úvod k prekladu Leffson V. – Audítorstvo*. Bratislava. Elán. 1993. 255 s. ISBN 80-85331-10-1
- [7] Smernica Európskeho parlamentu a Rady 2014/56/EU ktorou sa mení smernica 2006/43/ES o štatutárnom audite ročných účtovných závierok a konsolidovaných účtovných závierok. Vestník EU L 158/96
- [8] Smernica Európskeho parlamentu a Rady 2013/34/EU o ročných účtovných závierkách a konsolidovaných účtovných závierkách a súvisiacich správach určitých druhov podnikov. Vestník EU L 182/19
- [9] Zákon 423/2015 Z.z. o štatutárnom audite a o zmene a doplnení zákona č. 431/2002 Z.z o účtovníctve v znení neskorších predpisov. Zbierka zákonov s. 4644 č.113/2016

## RESUMÉ

Cieľom auditu je dosiahnuť účinnejšie, transparentnejšie a dôveryhodnejšie finančné vykazovanie, ktoré umožní prijímať informovanejšie rozhodnutia. Aby sme kráčali správnym smerom (my audítori), ktorý nás privedie k naplneniu uvedeného cieľa mali by sme sa usilovať nielen o zvyšovanie kvality audítorských a uisťovacích služieb, ale aj dôveryhodnosť a spoľahlivosť audítorských služieb, o skvalitňovanie rozličných foriem komunikácie audítorov, o prehĺbenie úlohy audítorov a audítorských služieb, ktoré poskytujú, aby mohli lepšie reagovať na potreby zainteresovaných strán. Audítorská profesia sa vždy snažila o maximálnu kvalitu auditu. Udalosti posledných rokov ukázali, že je rovnako dôležitá pre tých, ktorí vypracúvajú účtovné závierky a výročné správy, investorov ako aj pre regulátorov. Cieľom tohto príspevku je poukázať práve na tieto skutočnosti a iniciovať verejnú a predovšetkým odbornú diskusiu na túto aktuálnu tému.

## SUMMARY

The aim of audit is to reach more effective, more transparent and more confidential financial statements, which are important by express of more inform decision. To achieve the presented aim must auditors develop effort by improvement quality of audit and reassurance services, but also confidentiality and reliability audit services, to better quality of different form auditors communication, to deepen meaning of auditors and audit services, which are providing, by better reaction to needs of all participants. An



auditor profession has always made an effort about maximal quality of audit. The events of last years refer, that an auditor profession is the same important by those who prepare the financial statements and annual reports, investors and regulators, too. The aim of this contribution is point out at these facts and to make initiation public discussion and above all professional discussion on this actual topic.

### **Kontakt**

doc. Ing. Ladislav Kareš, PhD., Katedra účtovníctva a audítorstva, Fakulta hospodárskej informatiky, Ekonomická univerzita v Bratislave. Tel.: 02/6729 5776,  
e-mail.: kares@euba.sk

Daniela Katriková

## PODNIKOVÁ KOMBINÁCIA AKO FAKTOR OPTIMALIZÁCIE VPLYVU FINANČNEJ INŠTITÚCIE NA JEJ KAPITÁLOVÚ PRIMERANOSŤ

### Úvod

Súčasnú štruktúru mnohých podnikateľských subjektov vytvárajú rôzne majetkové prepojenia realizované prostredníctvom investícií. Tieto prepojenia medzi podnikateľskými subjektmi zväčša prekračujú územný rámec danej krajiny, v dôsledku čoho vznikajú ekonomicky prepojené medzinárodné subjekty, ktoré pôvodom kapitálu, štýlom podnikania, riadenia, obchodnou politikou, prípadne inými charakteristikami tvoria jednotný celok, ktorý sa v praxi označujeme pojmom „skupina podnikov“, resp. „skupina.“

Cieľom konsolidovanej účtovnej závierky je prezentovať finančnú situáciu a výsledok hospodárenia skupiny podnikov patriacich do konsolidovaného celku tak, akoby po ekonomickej stránke predstavovali jednu ekonomickú jednotku. Zostavovateľom konsolidovanej účtovnej závierky je materská účtovná jednotka, ktorá má v dcérskych, prípadne v pridružených alebo spoločných podnikoch väčšinový podiel na vlastnom imaní, resp. na ovládaní.

**Schéma č. 1:** Účel zostavovania konsolidovanej účtovnej závierky



**Zdroj:** spracované podľa FARKAŠ, R. 2001. *Konsolidovaná účtovná závierka*. 2. doplnené vyd. Bratislava: Iura Edition, 2001, s. 13. ISBN 80-89047-07-6.

Konsolidovaná účtovná závierka sa na rozdiel od individuálnej účtovnej závierky vyznačuje niektorými špecifikami, týkajúcimi sa najmä zásad a princípov, v súlade s ktorými sa konsolidovaná účtovná závierka zostavuje. Ďalej sa odlišuje použitými postupmi pri samotnom zostavení konsolidovanej účtovnej závierky s dôrazom na jednotlivé typy konsolidačných operácií, techniky konsolidácie a spôsoby prezentácie.

## 1 PODNIKOVÁ KOMBINÁCIA AKO ZÁKLAD POVINNOSTI ZOSTAVIŤ KÚZ

Konsolidovanou účtovnou závierkou sa rozumie účtovná závierka zostavená na báze individuálnych účtovných závierok kapitálovo prepojených spoločností, ktoré vytvárajú konsolidovaný celok.<sup>1</sup>

Konsolidovaná účtovná závierka predstavuje účtovnú závierku, ktorá je zostavená za predpokladu fikcie právnickej jednotky. Znamená to, že konsolidovaný celok je potrebné vnímať nielen ako ekonomický celok, ale aj ako tzv. právnickú osobu.<sup>2</sup> V skutočnosti však zostáva zachovaná právna suverenita jednotlivých účtovných jednotiek, ktoré vytvárajú konsolidovaný celok. Konsolidovaná účtovná závierka sa zostavuje „ex post“ na základe individuálnych účtovných závierok jednotlivých účtovných jednotiek a spätne tieto individuálne účtovné závierky neovplyvňuje.

Povinnosť zostaviť konsolidovanú účtovnú závierku a konsolidovanú výročnú správu má materská účtovná jednotka. „Materskou účtovnou jednotkou sa rozumie účtovná jednotka, ktorá je obchodnou spoločnosťou, štátnym podnikom, družstvom alebo účtovnou jednotkou verejnej správy, ktorá v inej účtovnej jednotke, ktorá je obchodnou spoločnosťou,

- má väčšinu hlasovacích práv v účtovnej jednotke alebo
- má právo vymenúvať alebo odvolávať väčšinu členov štatutárneho orgánu alebo dozorného orgánu účtovnej jednotky a súčasne je jej spoločníkom alebo jej akcionárom, alebo
- má právo ovládať účtovnú jednotku, ktorej je spoločníkom alebo akcionárom na základe dohody uzavretej s touto účtovnou jednotkou alebo na základe spoločenskej zmluvy alebo stanov tejto účtovnej jednotky, ak to umožňuje právo štátu, ktorým sa riadi táto účtovná jednotka, alebo
- je spoločníkom alebo akcionárom účtovnej jednotky a väčšina členov štatutárneho orgánu alebo dozorného orgánu účtovnej jednotky vykonávajúci svoju funkciu v priebehu účtovného obdobia a v bezprostredne predchádzajúcom účtovnom období až do zostavenia konsolidovanej účtovnej závierky bola vymenovaná výlučne

<sup>1</sup> Spracované podľa HVOŽDAROVÁ, J. – SAPARA, J. – UŽÍK, J. 2014. *Konsolidovaná účtovná závierka*. 2. prepracované a doplnené vyd. Bratislava: EKONÓM, 2014, s. 12. ISBN 978-80-225-3969-2.

<sup>2</sup> Výnimku z tejto zásady tvorí len konsolidácia metódou vlastného imania.

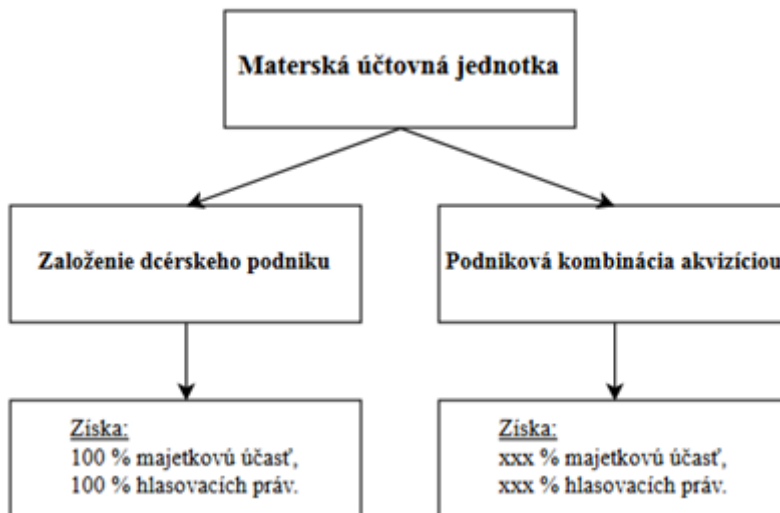
prostredníctvom výkonu hlasovacích práv spoločníka alebo akcionára , ktorý je materskou účtovnou jednotkou, alebo

- je spoločníkom alebo akcionárom a na základe dohody s inými jej spoločníkmi alebo akcionármi má väčšinu hlasovacích práv.<sup>43</sup>

Materská účtovná jednotka môže získať kontrolu v inej účtovnej jednotke (v dcérskej účtovnej jednotke) dvomi spôsobmi:

- založí dcérsku účtovnú jednotku,
- podnikovou kombináciou (akvizíciou).

**Schéma č. 2:** Spôsoby získania kontroly v inej účtovnej jednotke



**Zdroj:** spracované podľa HVOŽDAROVÁ, J. – SAPARA, J. – UŽÍK, J. 2014. *Konsolidovaná účtovná zvierka*. 2. prepracované a doplnené vyd. Bratislava: EKONÓM, 2014, s. 70. ISBN 978-80-225-3969-2.

Existujú viaceré spôsoby uskutočnenia akvizície, napríklad zlúčenie účtovných jednotiek, splynutie účtovných jednotiek alebo získanie podielov v inej účtovnej jednotke (nákupom, zmluvnou dohodou alebo inak). Práve posledná z uvedených možností predstavuje tú formu akvizície, pri ktorej má účtovná jednotka po splnení podmienok povinnosť zostaviť konsolidovanú účtovnú zvierku.

Problematikou podnikových kombinácií sa zaoberá medzinárodný štandard finančného vykazovania (ďalej len „štandard“) **IFRS 3 Podnikové kombinácie**, na ktorý nadväzujú aj ďalšie štandardy upravujúce zostavenie konsolidovanej účtovnej zvierky. Nedostatkom naďalej zostáva, že definícia akvizície sa nenachádza v žiadnom z platných štandardov.

Rada pre IAS (angl. *International Accounting Standards Board*) vydala v roku 2004 IFRS 3 Podnikové kombinácie, ktorý riešil zrušenie metódy združenia podielov

<sup>3</sup> Zákon o účtovníctve, § 22, ods. 3 v aktuálne platnom znení.

a taktiež bola preformulovaná definícia podnikovej kombinácie. Vzhľadom na neustály vývoj podnikových kombinácií vydala IASB v roku 2008 s účinnosťou od 1. januára 2009 nový IFRS 3 Podnikové kombinácie, ktorý mal za následok zrušenie pôvodne platného IFRS 3 Podnikové kombinácie z roku 2004. „IFRS 3 (2008) je doteraz najprepracovanejší pokiaľ ide o „uchopenie“ problematiky podnikových kombinácií najmä v nadväznosti na súvisiace IFRS.“<sup>4</sup>

**Tabuľka č. 1:** *Definícia podnikovej kombinácie podľa IFRS 3 (2004) a IFRS 3 (2008)*

IFRS 3 (2004)	IFRS 3 (2008)
<i>Podniková kombinácia</i>	
= spojenie samostatných účtovných jednotiek alebo podnikov do jednej vykazujúcej účtovnej jednotky.	= transakcia alebo iná udalosť, v rámci ktorej nadobúdateľ dosiahne ovládanie jedného alebo viacerých podnikov. Transakcia označované ako „verné fúzie“ alebo „fúzie rovnocenných“ sú tiež podnikovými kombináciami.

**Zdroj:** spracované podľa *IFRS 3 (2004)* a *IFRS 3 (2008)*.

V IFRS 3 Podnikové kombinácie (2004) bola ako jedinou metódou účtovania podnikovej kombinácie stanovená nákupná metóda, zatiaľ čo v IFRS 3 Podnikové kombinácie (2008) sa zaviedla akvizičná metóda, ktorá predstavuje zdokonalenie nákupnej metódy.

**Tabuľka č. 2:** *Identifikácia nákupnej a akvizičnej metódy podnikových kombinácií*

IFRS 3 (2004)	IFRS 3 (2008)
<i>NÁKUPNÁ METÓDA</i>	<i>AKVIZIČNÁ METÓDA</i>
<p><u>Pozostáva z:</u></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• identifikácia nadobúdateľa,</li> <li>• stanovenie obstarávacích nákladov podnikovej kombinácie,</li> <li>• alokácia obstarávacích nákladov podnikovej kombinácie na nadobudnuté aktíva a prevzaté záväzky a podmienené záväzky k dátumu akvizície.</li> </ul>	<p><u>Pozostáva z:</u></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• identifikácia nadobúdateľa,</li> <li>• určenie dátumu akvizície,</li> <li>• vykázanie a ocenenie identifikovateľného nadobudnutého majetku, prevzatých záväzkov a všetkých nekontrolujúcich podielov v nadobúdanom subjekte,</li> <li>• vykázanie a ocenenie goodwillu alebo zisku z výhodnej kúpy.</li> </ul>

**Zdroj:** spracované podľa HVOŽDAROVÁ, J. – SAPARA, J. – UŽÍK, J. 2014. *Konsolidovaná účtovná závierka. 2.* prepracované a doplnené vyd. Bratislava: EKONÓM, 2014, s. 72 - 78. ISBN 978-80-225-3969-2.

<sup>4</sup> HVOŽDAROVÁ, J. – SAPARA, J. – UŽÍK, J. 2014. *Konsolidovaná účtovná závierka. 2.* prepracované a doplnené vyd. Bratislava: EKONÓM, 2014, s. 75. ISBN 978-80-225-3969-2.

## 2 TEORETICKÉ KONCEPCIE KONSOLIDOVANEJ ÚČTOVNEJ ZÁVIERKY

Konsolidovaná účtovná závierka môže vychádzať z rôznych teoretických koncepcií a úvah, ktoré sa začali vyvíjať v 50. rokoch minulého storočia. V tomto období sa konsolidovaná účtovná závierka stala okrem nástroja praktického rozhodovania pri riadení kapitálovo prepojených účtovných jednotiek aj predmetom teoretického skúmania a zovšeobecňovania.

Vznikli dve protikladné teoretické koncepcie konsolidovanej účtovnej závierky:

- *teória ekonomickej jednotky,*
- *teória záujmov vlastníkov.*

Uvedené koncepcie konsolidovanej účtovnej závierky predstavujú extrémne prípady, ktoré sa v čistej forme vo svetovej praxi zostavovania konsolidovanej účtovnej závierky nevyskytujú. Vo všeobecnosti platí, že oveľa viac prvkov sa preberá z teórie ekonomickej jednotky, nakoľko teória záujmov predstavuje v podstate podielovú konsolidáciu, a tá sa v súčasnosti vyskytuje zriedkavo.

### 2.1 Teória ekonomickej jednotky

Podľa *teórie ekonomickej jednotky* (angl. *entity theory, entity-concept*) všetky podniky konsolidovaného celku treba chápať ako jeden ekonomický celok. Konsolidovaná účtovná závierka je považovaná za samostatnú účtovnú závierku fiktívnej právnickej jednotky. Základ tejto teórie spočíva v tom, že materský podnik disponuje celkovým majetkom dcérskych podnikov bez ohľadu na to, či vlastní 100 % alebo menej ako 100 % podielov na základnom imaní dcérskeho podniku. Dcérske podniky sú tak považované za nesamostatné vnútro podnikové prevádzky, resp. oddelenia.

Konsolidovaná účtovná závierka zostavená na základe teórie ekonomickej jednotky musí obsahovať všetky položky, aktív, pasív, nákladov a výnosov materského podniku a všetkých dcérskych podnikov v plnej výške. Znamená to, že tieto položky musia byť z individuálnych účtovných závierok uvedených podnikov prevzaté v celkovej hodnote. Predtým je však nutné eliminovať všetky vzájomné vzťahy, ktoré vznikli medzi materským podnikom a jeho dcérskymi podnikmi, nakoľko z hľadiska fiktívnej právnickej jednotky sú tieto vzťahy považované za vnútro skupinové vzťahy (vzťahy medzi fiktívne nesamostatnými vnútro podnikovými prevádzkami, resp. oddeleniami).

Teória ekonomickej jednotky hľadá napr. odpoveď na otázku:

„koľko majetku ovláda materský podnik, vzhľadom na to, že rozhoduje aj o tej časti majetku konsolidovaného celku, ktorú nevlastní.“<sup>5</sup>

Ak materský podnik vlastní všetkých 100 % vlastného imania dcérskeho podniku, potom sa z individuálnych účtovných závierok materského podniku a dcérskeho podniku prevezmú do konsolidovanej účtovnej závierky všetky položky aktív, pasív, nákladov a výnosov a eliminujú sa vnútrogrupinové vzťahy. V prípade, že materský podnik vlastní menej ako 100 % vlastného imania dcérskeho podniku, potom sa z individuálnych účtovných závierok materského a dcérskeho podniku síce prevezmú do konsolidovanej účtovnej závierky všetky položky aktív, pasív, nákladov a výnosov v plnej výške a eliminujú sa vnútrogrupinové vzťahy, ale zároveň sa musí samostatne vykázat' tá časť aktív, pasív, nákladov a výnosov, ktorá nepripadá na podiely materského podniku, ale na podiely, ktoré sú vo vlastníctve iných spoločníkov dcérskeho podniku. „Pretože teória ekonomickej jednotky považuje týchto iných spoločníkov za takých istých podnikateľov, akými sú spoločníci materského podniku a v tomto zmysle ich považuje za „spolupodnikateľov“, ktorých záujmy sú totožné so záujmami spoločníkov materského podniku, podiely iných spoločníkov sa v konsolidovanej účtovnej závierke nevykazujú ako súčasť cudzieho kapitálu, ale ako súčasť vlastného imania (vlastného kapitálu).“<sup>6</sup>

Postup pri zostavovaní konsolidovanej účtovnej závierky podľa teórie ekonomickej jednotky je nasledovný:

- a) do tzv. agregovanej (súctovej) účtovnej závierky sa spočítajú jednotlivé položky aktív, pasív, nákladov a výnosov z individuálnych účtovných závierok (t. z. individuálnych súvah a individuálnych výkazov ziskov a strát) materského podniku a dcérskeho podniku v plnej výške (bez ohľadu na výšku majetkovej účasti materského podniku). Následne sa eliminujú vnútrogrupinové vzťahy medzi materským podnikom a dcérskeho podnikom,
- b) v konsolidovanej súvahe sa osobitnou položkou pod názvom nekontrolujúce podiely vykazujú podiely iných spoločníkov, a v konsolidovanom výkaze ziskov a strát sa osobitnou podpoložkou vykazujú aj podiely na zisku, ktoré pripadajú na nekontrolujúce podiely.

<sup>5</sup> HVOŽDAROVÁ, J. – SAPARA, J. – UŽÍK, J. 2014. *Konsolidovaná účtovná závierka*. 2. prepracované a doplnené vyd. Bratislava: EKONÓM, 2014, s. 41. ISBN 978-80-225-3969-2.

<sup>6</sup> FARKAŠ, R. 2001. *Konsolidovaná účtovná závierka*. 2. doplnené vyd. Bratislava: Iura Edition, 2001, s. 13. ISBN 80-89047-07-6.

Konsolidovaná účtovná závierka zostavená na základe teórie ekonomickej jednotky býva často označovaná aj ako *úplná konsolidácia*.

## 2.2 Teória záujmov vlastníkov

*Teória záujmov vlastníkov* (angl. *property theory, property-concept*) dáva do popredia vyhodnotenie investície materského podniku do dcérskeho podniku. Vychádza z predpokladu, že konsolidovaná účtovná závierka je rozšírenou individuálnou závierkou materského podniku. Jej úlohou je ukázať akcionárom, resp. spoločníkom materského podniku, ktorí vlastnia podiely v iných spoločnostiach, aká časť aktív, pasív, nákladov a výnosov týchto iných spoločností im patrí, t. j. aká ich časť sa vzťahuje na podiely materského podniku.

Teória záujmov vlastníkov hľadá napr. odpoveď na otázku:

„aký podiel na zisku, ktorý vyprodukoval dcérsky podnik, prináleží materskému podniku vzhľadom na výšku jeho majetkovej účasti na dcérskom podniku alebo aký podiel majetku a záväzkov prípadne materskému podniku v prípade ukončenia činnosti dcérskeho podniku.“<sup>7</sup>

Konsolidovaná účtovná závierka vysvetľuje akcionárom, resp. spoločníkom, čo v súvahe materského podniku predstavuje položka finančných investícií nazývaná *„podiely v iných podnikoch.“*

V praxi sa môžu vyskytnúť dve situácie:

- ak materský podnik vlastní celých 100 % upísaného vlastného imania dcérskeho podniku, potom nie je žiadny rozdiel medzi konsolidovanou účtovnou závierkou zostavenou na základe teórie ekonomickej jednotky a konsolidovanou účtovnou závierkou zostavenou na základe teórie záujmov vlastníkov,
- ak materský podnik vlastní menej ako 100 % upísaného vlastného imania dcérskeho podniku, potom vznikajú rozdiely medzi konsolidovanou účtovnou závierkou zostavenou na základe teórie ekonomickej jednotky a konsolidovanou účtovnou závierkou zostavenou na základe teórie záujmov vlastníkov.

<sup>7</sup> HVOŽDAROVÁ, J. – SAPARA, J. – UŽÍK, J. 2014. *Konsolidovaná účtovná závierka*. 2. prepracované a doplnené vyd. Bratislava: EKONÓM, 2014, s. 41. ISBN 978-80-225-3969-2.



**Tabuľka č. 3:** *Komparácia teórie ekonomickej jednotky a teórie záujmov vlastníkov*

	<b>Teória ekonomickej jednotky</b>	<b>Teória záujmov vlastníkov</b>
<i>Materský podnik vlastní 100 % upísaného vlastného imania dcérskeho podniku</i>	<b>NEVZNIKAJÚ ROZDIELY</b> medzi konsolidovanými závierkami zostavenými v súlade s uvedenými teoretickými koncepciami.	
<i>Materský podnik vlastní menej ako 100 % upísaného vlastného imania dcérskeho podniku</i>	<b>VZNIKAJÚ ROZDIELY</b> medzi konsolidovanými účtovnými závierkami zostavenými v súlade s uvedenými teoretickými koncepciami. Tieto rozdiely sú spôsobené rozdielnym chápaním <i>podielov iných spoločníkov</i> .	

**Zdroj:** spracované podľa FARKAŠ, R. 1995. *Konsolidovaná účtovná závierka v Slovenskej republike, krajinách Európskej únie, USA, Japonsku a v štandardoch IASC*. 1. vyd. Bratislava: ELITA, 1995, s. 30. ISBN 80-85323-79-6.

**Tabuľka č. 4:** *Vymedzenie iných spoločníkov z pohľadu uvedených teórií*

	<b>Vymedzenie iných spoločníkov</b>
<i>Teória ekonomickej jednotky</i>	= istí podnikatelia, akými sú spoločníci materského podniku.
<i>Teória záujmov vlastníkov</i>	= veritelia, resp. osoby, ktoré poskytli skupine cudzí kapitál.

**Zdroj:** spracované na základe FARKAŠ, R. 2001. *Konsolidovaná účtovná závierka*. 2. doplnené vyd. Bratislava: Iura Edition, 2001, s. 13. ISBN 80-89047-07-6.

Pri aplikácii teórie záujmov vlastníkov sa z individuálnej účtovnej závierky dcérskeho podniku nepreberajú do konsolidovanej účtovnej závierky jednotlivé položky aktív, pasív, nákladov a výnosov v úplnej výške, ale len v pomernej výške zodpovedajúcej percentuálnemu podielu vlastného imania dcérskeho podniku, ktorý vlastní materský podnik. Z tohto dôvodu sa zostaveniu konsolidovanej účtovnej závierky na báze teórie záujmov vlastníkov hovorí aj *podielová (pomerná) konsolidácia* alebo *netto konsolidácia*. „Znamená to, že podiely iných spoločníkov (nekontrolujúce podiely) sa v konsolidovanej účtovnej závierke vôbec neuvádzajú, pretože sa z individuálnych účtovných závierok ani neprebrali.“<sup>8</sup>

### 2.3 Teória materského podniku

Teória ekonomickej jednotky a teória záujmov vlastníkov predstavujú teoretické koncepcie zostavovania konsolidovanej účtovnej závierky, ktoré sa v ich čistej podobe

<sup>8</sup> FARKAŠ, R. 2001. *Konsolidovaná účtovná závierka*. 2. doplnené vyd. Bratislava: Iura Edition, 2001, s. 15. ISBN 80-89047-07-6.

aplikujú zriedkavo. Spojením týchto dvoch koncepcií je tzv. **konceptia materského podniku** (angl. *theory of the parent enterprise, concept of the parent enterprise*).

Konsolidovaná účtovná závierka má byť zdrojom informácií, ktoré poskytujú jednotlivé koncepcie zostavovania účtovnej závierky. Má poskytovať komplexný pohľad:

- o celkovom majetku, ktorý ovláda materský podnik (konceptia ekonomickej jednotky),
- o majetku, ktorý zodpovedá príslušnej finančnej investícií (konceptia záujmov vlastníkov).

### 3 Kapitálová primeranosť finančných inštitúcií

„Kapitálová primeranosť predstavuje ohodnotenie bezproblémového fungovania finančnej inštitúcie v budúcnosti, t.j. je ukazovateľom finančnej sily a dôveryhodnosti finančnej inštitúcie.“<sup>9</sup>

Výška kapitálovej primeranosti finančných inštitúcií sa vypočíta ako podiel vlastného kapitálu a rizikovo vážených aktív. Primeranosť vlastných zdrojov predstavuje pre banky povinnosť udržiavať určitú minimálnu výšku regulačného kapitálu vzhľadom na objem a rizikovosť svojich aktív. Hodnota kapitálu finančných inštitúcií by mala pokryť ich budúce potenciálne straty zo súčasných rizík.

K hlavným úlohám regulátorov patrí chrániť záujmy vkladateľov a dbať o bezpečnosť zverených financií. Kým vlastný kapitál predstavuje súčasnú hodnotu subjektu, kapitálová primeranosť vyhodnocuje perspektívu finančnej inštitúcie v budúcnosti. Jej podstatou je zmeranie rizík (trhových, operačných) daného subjektu a stanovenie zodpovedajúcej úrovne kapitálu, ktorá následne spĺňa funkciu „vankúša“ pre prípad strát z týchto rizík. Všetky potenciálne budúce straty finančnej inštitúcie by mali byť pokryté jej vlastnými vnútornými zdrojmi, čiže kapitálom akcionárov, čo znamená, že tieto straty pociťujú vlastníci, nie klienti.

#### 3.1. Faktory ovplyvňujúce kapitálovú primeranosť finančných inštitúcií

Výška ukazovateľa kapitálovej primeranosti finančných inštitúcií je závislá priamo úmerne výške kapitálu a nepriamo úmerne výške rizikovo vážených aktív, úverových ekvivalentov podsúvahových položiek a trhového a operačného rizika.

K základným faktorom, ktoré ovplyvňujú kapitálovú primeranosť finančných inštitúcií zaradujeme:

---

<sup>9</sup> BELÁS, J. – DEMJAN, V. 2009. *Finančné riadenie komerčnej banky*. 1. vyd. Žilina: Georg Žilina, 2009, s. 122. ISBN 978-80-89401-06-02.

- **kapitál finančných inštitúcií, resp. jeho zvýšenie**

Keďže kapitál je zdrojom pre krytie strát, môže sa zdať, že optimálnou cestou na zvýšenie kapitálovej primeranosti je jeho zvýšenie. Na druhej strane je ale potrebné poznamenať, že kapitál je ale súčasne nákladným zdrojom, napríklad pri rednite akcií (podiel dividendových platieb na trhovej cene) býva vo väčšine prípadov vyšší ako úrokové a ďalšie náklady pri vkladoch alebo náklady na iné cudzie zdroje. S novou emisiou akcií môže byť spojené emisné ážio, ktorého výška závisí od ochoty príslušných subjektov zaplatiť za akcie pri ich emisii vyššiu cenu ako je nominálna hodnota. Zvýšenie rezervných fondov (nad zákonný rámec) alebo rezerv vyššími prídelmi zo zisku môžeme realizovať iba na úkor výplaty dividend či ďalšieho použitia zisku.

- **rizikovo vážené aktíva, resp. zníženie ich objemu**

Finančné inštitúcie môžu postupovať dvoma základnými spôsobmi pri znižovaní objemu rizikovo vážených aktív. Je potrebné uviesť, že tieto spôsoby môžu vyústiť do poklesu ich výnosov. Prvým je znižovať absolútnu výšku aktív, čo je spojené so stratou výnosov z týchto aktív a stratou z predaja za nižšiu než nominálnu hodnotu. Okrem iného sa zvyčajne predávajú len vysoko kvalitné aktíva, v dôsledku čoho môžu finančné inštitúcie prísť o najlepších klientov. Druhou možnosťou je postupný presun rizikovejších aktív do menej rizikových aktív (s nižšou váhou rizikovosti).

### *3.1.1 Podniková kombinácia ako ďalší možný faktor vplyvajúci na kapitálovú primeranosť finančných inštitúcií*

Okrem hlavných faktorov, teda kapitálu a rizikovo-vážených aktív môžu na kapitálovú primeranosť finančných inštitúcií vplyvať aj ďalšie faktory, ku ktorým zaraďujeme aj podnikové kombinácie. Ich vplyv si znázorníme prostredníctvom zjednodušených príkladov.

**Príklad č. 1:** Banka ABC, a. s. má vlastné imanie v celkovej výške 12 000 000 €, rizikovo-vážené aktíva v celkovej výške 3 500 000 €. <sup>10</sup>



$$\text{Kapitálová primeranosť} = (12\,000\,000 / 3\,500\,000) * 100 = \mathbf{343\%}$$

V roku 2015 kúpila banka ABC, a. s. (60 %) podiel na základnom imaní banky MNO, a. s., ktorým získala väčšinový podiel na jej hlasovacích právach.

---

<sup>10</sup> Pri výpočte kapitálovej primeranosti finančných inštitúcií abstrahujeme od požiadaviek na kapitálovú primeranosť uvedených v Bazilej III. Využívame zjednodušený spôsob výpočet kapitálovej primeranosti finančných inštitúcií, nakoľko našim zámerom je len poukázať na skutočnosť, že aj podniková kombináciu ju môže ovplyvňovať.

Vlastné imanie banky MNO	Rizikovo-vážené aktíva
6 000 000 €	450 000 €

*Vplyv podnikovej kombinácie na kapitálovú primeranosť banky na základe koncepcie ekonomickej jednotky:*

$$\text{Kapitálová primeranosť banky ABC, a. s.} = \frac{(12\,000\,000 + 6\,000\,000)}{(3\,500\,000 + 450\,000)} * 100 = \mathbf{456\%}$$

Získaním kontroly v banke MNO, a. s. pozitívne ovplyvnila banka ABC, a. s. svoju kapitálovú primeranosť. Kapitálová primeranosť banky ABC, a. s. bola vo výške 343 %, podnikovou kombináciou a skutočnosťou, že banka ABC, a. s. zostavuje svoju konsolidovanú účtovnú závierku na základe koncepcie ekonomickej jednotky sa zvýšila jej kapitálová primeranosť na 456 %.

*Vplyv podnikovej kombinácie na kapitálovú primeranosť banky na základe koncepcie záujmov vlastníkov:*

$$\text{Kapitálová primeranosť banky ABC, a. s.} = \frac{12\,000\,000 + (0,6 * 6\,000\,000)}{3\,500\,000 + (0,6 * 450\,000)} * 100 = \mathbf{414\%}$$

Získaním kontroly v banke MNO, a. s. pozitívne ovplyvnila banka ABC, a. s. svoju kapitálovú primeranosť. Kapitálová primeranosť banky ABC, a. s. bola vo výške 343 %, podnikovou kombináciou a skutočnosťou, že banka ABC, a. s. zostavuje svoju konsolidovanú účtovnú závierku na základe koncepcie záujmov vlastníkov sa zvýšila jej kapitálová primeranosť na 414 %.

V uvedenom príklade mala podniková kombinácia pozitívny vplyv na kapitálovú primeranosť banky, v obidvoch prípadoch, teda aj vtedy, ak banka zostavuje svoju konsolidovanú účtovnú závierku na základe koncepcie ekonomickej jednotky alebo koncepcie záujmov vlastníkov. Samozrejme, tak ako všetko má dve stránky, aj podniková kombinácie nemusí mať vždy pozitívny vplyv na kapitálovú primeranosť finančných inštitúcií, ale môžu sa vyskytnúť aj prípady, kedy je tento vplyv negatívny. Uvedenú situáciu si znázorníme v príklade č. 2, pričom vychádzame zo základných údajov banky ABC, a. s.

**Príklad č. 2:** Banka ABC, a. s. kúpila v roku 2015 (90 %) podiel na základnom imaní banky EFG, a. s., ktorým získala väčšinový podiel na jej hlasovacích právach.

Vlastné imanie banky EFG	Rizikovo-vážené aktíva
2 000 000 €	5 000 000 €

*Vplyv podnikovej kombinácie na kapitálovú primeranosť banky na základe koncepcie ekonomickej jednotky:*

$$\text{Kapitálová primeranosť banky ABC, a. s.} = \frac{(12\,000\,000 + 2\,000\,000)}{(3\,500\,000 + 5\,000\,000)} * 100 = \mathbf{165\%}$$

Získaním kontroly v banke EFG, a. s. negatívne ovplyvnila banka ABC, a. s. svoju kapitálovú primeranosť. Kapitálová primeranosť banky ABC, a. s. bola vo výške 343 %, podnikovou kombináciou a skutočnosťou, že banka ABC, a. s. zostavuje svoju konsolidovanú účtovnú závierku na základe koncepcie ekonomickej jednotky sa znížila jej kapitálová primeranosť na 165 %.

*Vplyv podnikovej kombinácie na kapitálovú primeranosť banky na základe koncepcie záujmov vlastníkov:*

$$\text{Kapitálová primeranosť banky ABC, a. s.} = \frac{12\,000\,000 + (0,9 * 2\,000\,000)}{3\,500\,000 + (0,9 * 5\,000\,000)} * 100 = \mathbf{173\%}$$

Získaním kontroly v banke EFG, a. s. negatívne ovplyvnila banka ABC, a. s. svoju kapitálovú primeranosť. Kapitálová primeranosť banky ABC, a. s. bola vo výške 343 %, podnikovou kombináciou a skutočnosťou, že banka ABC, a. s. zostavuje svoju konsolidovanú účtovnú závierku na základe koncepcie záujmov vlastníkov sa znížila jej kapitálová primeranosť na 173 %.

## Záver

Cieľom tohto príspevku bolo poukázať na skutočnosť, že aj podniková kombinácia môže vplyvať na kapitálovú primeranosť finančných inštitúcií. Zamerali sme sa najmä na banky, ktoré sú zaraďované k najvýznamnejším finančným inštitúciám. Prostredníctvom príkladov sme dokázali, že podniková kombinácia môže mať pozitívny, ale i negatívny dopad na kapitálovú primeranosť finančných inštitúcií. Podniková kombinácia bude mať pozitívny vplyv na kapitálovú primeranosť materského podniku banky len v tom prípade, ak jej dcérsky podnik bude udržiavať určitú hranicu kapitálu a nebude zvyšovať, prípadne presúvať rizikovo vážené aktíva do rizikovejších skupín.

Obdobie finančnej krízy poukázalo na mnohé nedostatky v oblasti kapitálovej primeranosti finančných inštitúcií. Krízou boli zasiahnuté finančné trhy na celom svete. Sektor bankovníctva pociťoval problémy nielen v oblasti likvidity ale aj kapitálovej primeranosti. Táto skutočnosť bolo zapríčinená tým, že banky boli nútené znižovať vlastný kapitál a riziko vážené aktíva im neúmerne rástli. V tomto prípade by sme mohli povedať, že ak by banka získala v období finančnej krízy kontrolu v inej finančnej inštitúcií, podniková kombinácia by negatívne pôsobila na jej kapitálovú primeranosť, a to z toho dôvodu, že by ju ešte viac znížila.

### **Kľúčové slová**

Konsolidovaná účtovná závierka, podniková kombinácia, materský podnik, dcérsky podnik, koncepcia ekonomickej jednotky, koncepcia záujmov vlastníkov, finančné inštitúcie, kapitálová primeranosť

### **Keywords**

Consolidated financial statements, business combination, parent company, subsidiari, entity-concept, property-concept, financial institutions, capital adequacy ratio

### **Klasifikácia JEL**

G21, G22, G29

### **LITERATÚRA**

- [1] BAČOVÁ, M. 2013. *Základy bankovníctva*. 1. vyd. Bratislava: EKONÓM, 2013. 164 s. ISBN 978-80-225-3586-1.
- [2] BELÁS, J. – DEMJAN, V. 2009. *Finančné riadenie komerčnej banky*. 1. vyd. Žilina: Georg Žilina, 2009. 155 s. ISBN 978-80-89401-06-02.
- [3] FARKAŠ, R. 1995. *Konsolidovaná účtovná závierka v Slovenskej republike, krajinách Európskej únie, USA, Japonsku a v štandardoch IASC*. 1. vyd. Bratislava: ELITA, 1995. 131 s. ISBN 80-85323-79-6.
- [4] FARKAŠ, R. 2001. *Konsolidovaná účtovná závierka*. 2. doplnené vyd. Bratislava: Iura Edition, 2001. 140 s. ISBN 80-89047-07-6.
- [5] FARKAŠ, R. 2013. *Konsolidovaná účtovná závierka v Slovenskej republike*. 1. vyd. Bratislava: Iura Edition, 2013. 308 s. ISBN 978-80-8078-572-7.
- [6] HORVÁTHOVÁ, E. 2009. *Bankovníctvo*. 1. vyd. Žilina: Georg Žilina, 2009. 318 s. ISBN 978-80-89401-03-1.
- [7] HVOŽDAROVÁ, J. – SAPARA, J. – UŽÍK, J. 2014. *Konsolidovaná účtovná závierka*. 2. prepracované a doplnené vyd. Bratislava: EKONÓM, 2014. 292 s. ISBN 978-80-225-3969-2.
- [8] Medzinárodný štandard finančného vykazovania IFRS 3 Podnikové kombinácia (2004).
- [9] Medzinárodný štandard finančného vykazovania IFRS 3 Podnikové kombinácia (2008).

- [10] NBS. 2013. Bazilejské dohody o kapitáli a kapitálová primeranosť bánk v SR. Dostupné na: [www.nbs.sk](http://www.nbs.sk), 18. 05. 2016.
- [11] Zákon č. 431/2002 Z. z. o účtovníctve v znení neskorších predpisov.

## RESUMÉ

Výška kapitálovej primeranosti finančných inštitúcií je dôležitá pri určovaní ich bezproblémového fungovania v budúcnosti. Na základe tejto definície môžeme povedať, že kapitálová primeranosť je ukazovateľom finančnej sily a dôveryhodnosti finančných inštitúcií. K hlavným ukazovateľom, ktoré ovplyvňujú kapitálovú primeranosť finančných inštitúcií, patrí vlastné imanie a rizikovo vážené aktíva. V príspevku sme dokázali, že uvedené faktory nie sú jedinými faktormi, ktoré dokážu ovplyvňovať kapitálovú primeranosť bánk. Jedným z nich je aj podniková kombinácia, ktorú IFRS 3 Podnikové kombinácie (2008) definuje ako transakciu, v rámci ktorej nadobúdateľ dosiahne ovládanie jedného alebo viacerých podnikov. Prostredníctvom zjednodušených praktických príkladov sme dokázali, že podniková kombinácia môže mať pozitívny, ale i negatívny dopad na kapitálovú primeranosť banky. Negatívne pôsobila podniková kombinácia v období finančnej krízy, kedy bol zasiahnutý sektor bankovníctva. Banky boli nútené znižovať svoj kapitál a riziko vážené aktíva sa im zvyšovali. Ak by finančné inštitúcie v tomto období získali kontrolu v inej finančnej inštitúcií, negatívne by to ovplyvnilo ich kapitálovú primeranosť, a to z toho dôvodu, že by ju ešte viac znížilo.

## SUMMARY

Determining the capital adequacy of financial institutions is important in determining the smooth functioning of these institutions in the future. Based on this definition, we can say that the capital ratio is an indicator of financial strength and credibility of financial institutions. The main indicator that affect the capital adequacy of financial institutions are capital and risk weighted assets. In this paper, we have shown that these factors are not the only factors that can affect the capital adequacy of banks and insurance companies. One of them is the business combination for which IFRS 3 Business Combinations (2008) is defined as a transaction in which an acquirer obtains control of one or more businesses. Through simplified practical examples we prove that a business combination may have positive as well as negative impact on the capital adequacy of financial institutions. This fact could have adversely affected the business combination especially during the financial crisis. Which heavily hit the banking sectors. Banks were in this time forced to reduce their capital and risk – which caused increase of weighted assets. In the case of gained control in another financial institution the capital adequacy would have been negatively affected and thanks to this, further capital decline would follow.

### **Kontakt**

Ing. Daniela Katriková, Katedra účtovníctva a audítorstva, Fakulta hospodárskej informatiky, Ekonomická univerzita v Bratislave, Dolnozemska cesta 1/b, 852 35 Bratislava, tel.: 0944 064 960, e-mail: [d.katrikova@gmail.com](mailto:d.katrikova@gmail.com)



*Jozef Kušnier*

## GEOMETRICKÁ INTERPRETÁCIA MANOVA MODELU

### Úvod

Analýza rozptylu (ANOVA) je základná štatistická analýza, ktorá zovšeobecňuje testy porovnania stredných hodnôt dvoch skupín na porovnanie stredných hodnôt viacerých skupín. Má uplatnenie v rôznych oblastiach ekonomického bádania. V behaviorálnej ekonómii sa často vykonávajú kontrolované experimenty s cieľom zistiť, ako nastaviť ekonomické prostredie tak, aby to viedlo k lepším ekonomickým výsledkom. Napríklad môžeme skúmať vplyv finančného odmeňovania a rôznych foriem nefinančných odmien na pracovné výsledky. V tomto prípade sú jednotlivé testované formy odmien úrovňami faktora, ktoré môžu ovplyvniť závislú premennú. Vplyvy iných potenciálnych faktorov sú ošetrené randomizáciou experimentu. Teda pri veľkých vzorkách očakávame približne rovnaké úrovne iných vysvetľujúcich faktorov a jednotlivé faktory nemusia byť ani známe. Podobné experimenty sú však v praxi často nemožné, napríklad vplyv pohlavia na výšku finančnej odmeny za prácu nemožno týmto spôsobom testovať, keďže pohlavie nemožno randomizovať a teda nedá sa náhodne priradiť subjektu v experimente. V iných oblastiach ekonómie sme preto odkázaní na observačné štúdie, pri ktorých sa pasívne sledujú jednotlivé premenné. Avšak aj v observačných štúdiách nachádza ANOVA model uplatnenie ako základný, východiskový model z ktorého sú odvodené zložitejšie modely, ktoré zohľadňujú aj vplyv iných premenných na závislú premennú, ako napríklad analýza kovariancie, lineárna regresia, zovšeobecnené lineárne modely.

Podobne je ANOVA dôležitá v teórii náhodných výberov. V praxi sme z finančných a časových dôvodov prakticky odkázaní na výberové šetrenia základných súborov. Pri práci s údajmi z výberu vzniká nevyhnutne tzv. výberová chyba z dôvodu neúplnosti údajov. Vhodným spôsobom navrhnutia realizácie výberu však vieme ovplyvňovať veľkosť tejto chyby. Stratifikácia výberu je základná technika, ktorá vedie k znižovaniu výberovej chyby a ktorá je založená na ANOVA analýze. Podobne zhľukovanie výberových jednotiek možno ilustrovať ANOVA modelom s náhodnými efektami.

Keďže ANOVA ma také centrálné postavenie v rôznych oblastiach štatistickej inferencie v ekonomickej praxi, ukážeme v tomto článku jej geometrickú interpretáciu v priestore pozorovaní. Ukážeme to však aj pre viacrozmernú analýzu rozptylu (MANOVA), pri ktorej sú použité vzorce ešte náročnejšie na pochopenie. Pri MANOVA navyše ukážeme aj geometrickú interpretáciu v priestore premenných. Tieto MANOVA geometrické predstavy vedú k lepšiemu porozumeniu vzorcov aj v zložitejších viacrovnícových modeloch v ekonometrii. Výpočet zrealizujeme na konkrétnom príklade bez použitia špeciálnych štatistických softvérov, jednoducho iba za pomoci MS Excelu.

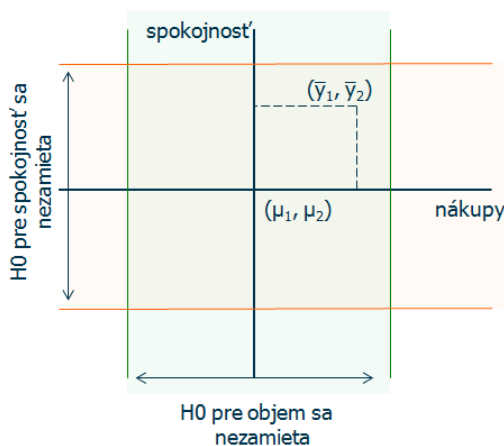
## 1 PRÍPADOVÁ ŠTÚDIA - OBCHODNÝ REŤAZEC

Obchodný reťazec chce zmerať výkonnosť jednotlivých predajní a identifikovať veľmi výkonné a málo výkonné predajne. Keďže podnikanie reťazca je motivované tvorbou zisku, tak ho prirodzene zaujíma veľkosť obratu v danej predajni. Ale reťazec myslí aj na budúcnosť a vie, že jednorázový vysoký obrat mu nemusí garantovať budúce vysoké obraty. Preto sa zaujíma aj o lojalitu zákazníkov, ich spokojnosť a aký imidž má vo verejnosti, teda svoju reputáciu. Urobí si preto prieskum spokojnosti na vzorke svojich zákazníkov. My sa pre jednoduchosť zameriame na dva ukazovatele: spokojnosť zákazníka s predajňou a objem jeho nákupov v danej predajni za sledovaný mesiac. Spokojnosť je číslo od 0 do 100, je to index spokojnosti vyrátaný z prieskumu spokojnosti. Objem nákupov je v eurách, je to suma nákupov zo zákaznickej karty. Naša závislá premenná je teda dvojrozmerná a zaujímajú nás rozdiely medzi predajňami. Budeme ich testovať pomocou MANOVA modelu.

### 1.1 Prečo viacrozmerný model?

Predstavme si, že by sme testovali veľkosť strednej hodnoty pre každú závislú premennú zvlášť. Množina akceptácie nulovej hypotézy je interval pre obe testovacie štatistiky. Preto je oblasť akceptácie obdĺžnik v grafe na obrázku 1. Na osi x máme objem nákupov, na osi y spokojnosť. Graf je vycentrovaný do bodu testovanej nulovej hypotézy  $(\mu_1, \mu_2)$ . Testovaná predajňa je zobrazená bodom so súradnicami rovnajúcimi sa výberovému priemeru objemu nákupov a spokojnosti  $(\bar{y}_1, \bar{y}_2)$ .

**Obrázok 1:** Obdĺžnik nezamietania nulovej hypotézy  
(Zdroj: vlastné spracovanie)

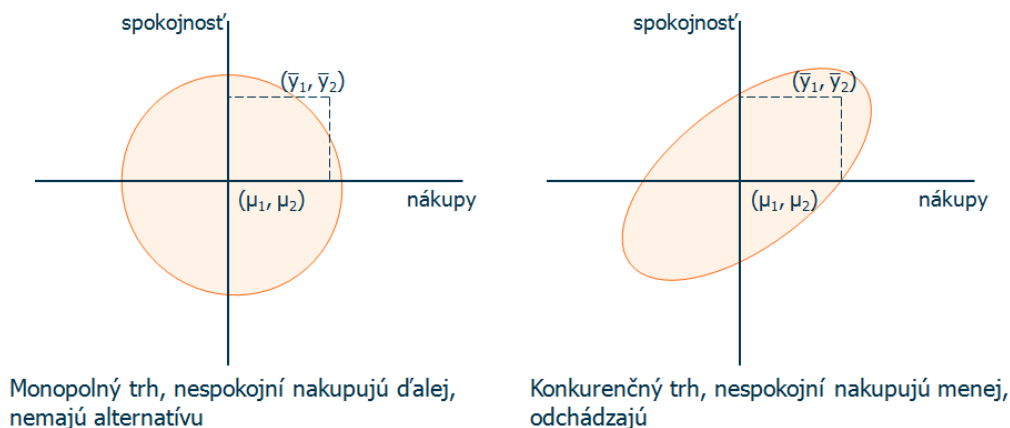


Ak označíme  $\alpha$  hladinu významnosti pre každý test, tak za platnosti nulovej hypotézy je bod reprezentujúci testovanú predajňu v oblasti akceptácie s pravdepodobnosťou  $(1-\alpha)(1-\alpha) \cong 1-2\alpha$ . Teda oblasť zamietania má pravdepodobnosť približne  $2\alpha$  a chyba prvého druhu je zvýšená. Toto zvýšenie chyby prvého druhu je tým

väčšie, čím väčšia je dimenzia závislej premennej, ktorá je ignorovaná jednorozmerným prístupom. Preto aj používanie viacerých jednorozmerných ANOVA testov namiesto jedného MANOVA testu vedie k zvýšeniu chyby prvého druhu.

Navyše používanie viacerých jednorozmerných ANOVA modelov ignoruje korelácie medzi závislými premennými a teda nemôže zodpovedať na otázky ohľadom vzťahu medzi lineárnymi kombináciami závislých premenných a vysvetľujúcimi faktormi. Korelácia medzi závislými premennými je modelovaná MANOVA modelom a ovplyvňuje výsledok testovania. Oblasť nezamietnutia nulovej hypotézy závisí od združenej distribúcie závislých premenných a teda tie isté marginálne empirické distribúcie môžu viesť k rozličným záverom ako vidno na obrázku 2.

**Obrázok 2:** Závislosť oblasti nezamietania  $H_0$  od korelačnej štruktúry  
(Zdroj: vlastné spracovanie)



## 2 PRIESTOR POZOROVANÍ

Budeme sa teraz venovať samotnej geometrickej interpretácii analýzy rozptylu. Začneme najskôr so základnými pojmami ako priemer, variácia a korelácia.

Nech  $y_1, y_2, \dots, y_n$  je realizácia náhodného výberu, kde  $n$  je počet pozorovaní. Označme stĺpcový vektor  $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T$ . Môžeme si ho predstaviť ako bod v  $n$ -rozmernom euklidovskom priestore. Na obrázku 3 je zobrazený príklad pre výber rozsahu 3, teda pre 3-rozmerný priestor pozorovaní.

Pre úplnosť, v euklidovskom priestore sú definované nasledovné funkcie:

skalárny súčin dvoch vektorov  $\mathbf{x}$  a  $\mathbf{y}$

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i = \mathbf{x}^T \mathbf{y},$$

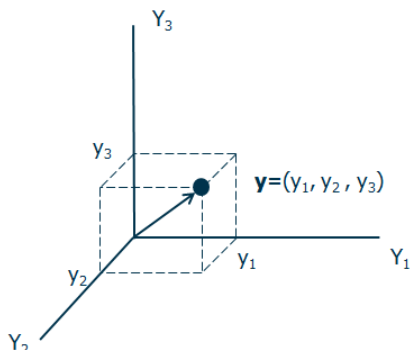
norma vektora  $\mathbf{x}$

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} = \sqrt{\mathbf{x}^T \mathbf{x}},$$

kosínus uhla medzi vektormi  $\mathbf{x}$  a  $\mathbf{y}$

$$\cos(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle / (\|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|).$$

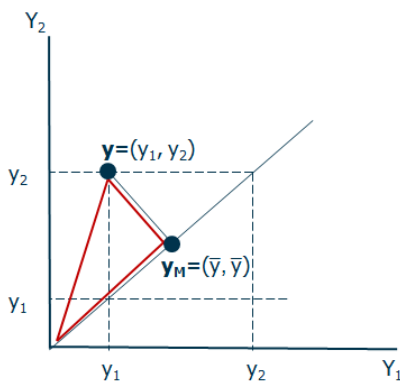
**Obrázok 3:** Náhodný výber v 3-rozmernom priestore pozorovaní  
(Zdroj: vlastné spracovanie)



## 2.1 Priemer ako súradnice ortogónálnej projekcie na diagonálu

Označme diagonálu, teda vektor pozostávajúci zo samých 1, ako  $\mathbf{1} = (1, 1, \dots, 1)^T$ . Označme ortogónálnu projekciu realizácie náhodného výberu  $\mathbf{y}$  na diagonálu  $\mathbf{1}$  ako  $\mathbf{y}_M$ . Pre 2-rozmerný prípad je to zobrazené na obrázku 4.

**Obrázok 4:** Ortogónálna projekcia na diagonálu  
(Zdroj: vlastné spracovanie)



Z definície ortogónálnej transformácie dostávame pravouhlý trojuholník s vrcholmi v bodoch  $(0,0)$ ,  $(y_1, y_2)$ ,  $\mathbf{y}_M$  a pravým uhlom pri vrchole  $\mathbf{y}_M$ . Súradnice ortogónálnej projekcie  $\mathbf{y}$  na diagonálu  $\mathbf{1}$ , teda  $\mathbf{y}_M$ , sú priemerom náhodného výberu  $\mathbf{y}$ . Môžeme to nasledovne zrátať:

$$\mathbf{y}_M = \frac{\langle \mathbf{y}, \mathbf{1} \rangle}{\langle \mathbf{1}, \mathbf{1} \rangle} \mathbf{1} = \bar{y} \mathbf{1} = (\bar{y}, \bar{y})^T$$

## 2.2 Smerodajná odchýlka ako dĺžka centrovaného vektora

Označme  $y_C$  reziduálnu zložku realizácie náhodného výberu po ortogonálnej transformácii na diagonálu, teda  $y_C = y - y_M$ . Z Pytagorovej vety dostávame

$$\|y\|^2 = \|y_M\|^2 + \|y_C\|^2$$

a keďže  $\|y\|^2 = \sum_i y_i^2$ ,  $\|y_M\|^2 = n\bar{y}^2$ ,  $\|y_C\|^2 = \sum_i (y_i - \bar{y})^2$ , tak dostávame

$$\sum_i y_i^2 = \sum_i (y_i - \bar{y})^2 + n\bar{y}^2$$

teda známy vzťah, ktorý sa odvádza algebraicky v základných kurzoch štatistiky:  
 $\text{var}(Y) = E(Y^2) - E^2(Y)$ .

Všimnime si, že dĺžka reziduálneho vektora  $y_C$  je úmerná výberovej smerodajnej odchýlke realizácie náhodného výberu  $y$ , teda

$$\|y_C\|^2 = \|y - \bar{y}\mathbf{1}\|^2 = \sum_i (y_i - \bar{y})^2 \approx \text{sample.var}(y)$$

V štatistike nás zaujíma premenlivosť, teda takéto odchýlky od ukazovateľa centrálnej tendencie, preto v analýzach vychádzame zo sumy štvorcov odchýlok od priemeru a nie zo samotných súm štvorcov. Ak by sme nepozorovali žiadnu premenlivosť, teda všetky naše namerané dáta by boli konštantné, tak štatistika nemá čo vysvetliť.

Avšak suma štvorcov a teda aj veľkosť vektorov rastie s dimenziou priestoru, v ktorom sa pohybujeme. Dokonca ak nepozorujeme žiadnu premenlivosť v dátach, teda máme konštantné pozorovania, tak pridaním ďalšieho konštantného pozorovania narastie suma štvorcov, teda dĺžka vektora. Možno si to ukázať na konštantnom  $n$ -rozmernom vektore  $I_n$ . Jeho suma štvorcov je  $n$ , dĺžka je  $n^{1/2}$ . Ak pridáme ďalšie pozorovanie a uvažujeme  $n+1$  rozmerný vektor  $I_{n+1}$ , tak suma štvorcov narastie na  $n+1$  a dĺžka na  $(n+1)^{1/2}$ . Preto je vhodné sumy štvorcov a teda dĺžky vektorov normalizovať na veľkosť dimenzie. Dostávame takzvané stredné sumy štvorcov, lebo ich normalizujeme dĺžkou konštantného jednotkového vektora v danom priestore.

Tieto úvahy vedú k zavedeniu počtu stupňov voľnosti ako počtu dimenzií, s ktorými pracujeme. Napríklad reziduálny vektor  $y_C$ , teda centrovaný pôvodný vektor  $y$ , vznikol po ortogonálnej projekcii na diagonálu. Teda z jeho definície je ortogonálny na diagonálu a teda sa vyskytuje v nadrovine s normálou diagonálou. Preto sa vyskytuje v priestore s dimenziou  $n-1$  a je vhodné ho normovať číslom  $n-1$  a nie číslom  $n$ . Potom však už rozklad štvorcov neplatí, ale takéto normovanie je vhodnejšie na testovanie hypotéz, keďže očisťuje testovacie štatistiky od efektu veľkosti dimenzie.

Podobne, ak je model zložitejší, ako uvidíme v prípade ANOVA, tak priestor stredných hodnôt modelovaných modelom má viac ako jednu dimenziu a preto reziduálna zložka leží v priestore s dimenziou zmenšenou o dimenziu modelu.

### 2.3 Korelácia ako kosínus centrovanej vektorov

Označme realizácie dvoch náhodných výberov ako  $\mathbf{x}=(x_1, x_2, \dots, x_n)^T$  a  $\mathbf{y}=(y_1, y_2, \dots, y_n)^T$ . Potom priamo z definície korelácie a kosínusu vyplýva nasledovná rovnosť:

$$\begin{aligned} \text{sample.corr}(x, y) &= \sum_i(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) / \sqrt{\sum_i(x_i - \bar{x})^2 \sum_i(y_i - \bar{y})^2} = \\ &= \langle \mathbf{x} - \bar{x}\mathbf{1}, \mathbf{y} - \bar{y}\mathbf{1} \rangle / \|\mathbf{x} - \bar{x}\mathbf{1}\| \|\mathbf{y} - \bar{y}\mathbf{1}\| = \text{cos}(\mathbf{x}_C, \mathbf{y}_C) \end{aligned}$$

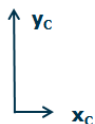
Teda hovoríme o ortogonálnych a kolineárných nahodných premenných tak, ako je to zobrazené na obrázku 5.

**Obrázok 5:** Korelácia ako kosínus  
(Zdroj: vlastné spracovanie)

**Nekorelované = ortogonálne**

$$\text{Corr}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = 0 \Leftrightarrow \text{Cos}(\mathbf{y}_C, \mathbf{x}_C) = 0$$

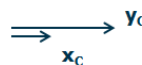
$$\text{Uhol} = \pi/2$$



**Perfektne korelované = kolineárne**

$$\text{Corr}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = 1 \Leftrightarrow \text{Cos}(\mathbf{y}_C, \mathbf{x}_C) = 1$$

$$\text{Uhol} = 0$$



$$\text{Corr}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = -1 \Leftrightarrow \text{Cos}(\mathbf{y}_C, \mathbf{x}_C) = -1$$

$$\text{Uhol} = \pi$$



### 2.4 ANOVA algebraicky

Pripomenieme si teraz ANOVA analýzu algebraicky. Model má tvar

$$Y_{ij} = \mu_j + \sigma \epsilon_{ij} \quad \text{kde } i=1, \dots, n_j \quad j=1, \dots, J \quad \epsilon_{ij} \sim N(0, 1) \text{ navzájom nezávislé.}$$

Teda pozorujeme náhodné premenné  $Y_{ij}$ , ktorých variabilitu chceme vysvetliť pomocou kategoriálnej premennej, faktora s  $J$  úrovňami. Index  $j$  označuje úroveň faktora alebo skupinu, z ktorej pochádza pozorovanie  $Y_{ij}$ . Index  $i$  označuje  $i$ -té pozorovanie vrámci  $j$ -tej skupiny. Zaujímá nás, či sú jednotlivé stredné hodnoty  $\mu_j$  rovnaké, teda konštantné pre každú skupinu, alebo nie a teda prispievajú k variabilite vysvetľovanej premennej.

Algebraická dekompozícia celkovej sumy štvorcov TSS pre konkrétnu realizáciu stratifikovaného náhodného výberu je nasledovná:

$$\begin{aligned} TSS &= \sum_j \sum_i (\mathbf{y}_{ij} - \bar{\mathbf{y}}_{..})^2 = \sum_j \sum_i ((\mathbf{y}_{ij} - \bar{\mathbf{y}}_j) - (\bar{\mathbf{y}}_j - \bar{\mathbf{y}}_{..}))^2 = \sum_j \sum_i (\mathbf{y}_{ij} - \bar{\mathbf{y}}_j)^2 + \\ &+ 2 \sum_j \sum_i (\mathbf{y}_{ij} - \bar{\mathbf{y}}_j) (\bar{\mathbf{y}}_j - \bar{\mathbf{y}}_{..}) + \sum_j \sum_i (\bar{\mathbf{y}}_j - \bar{\mathbf{y}}_{..})^2 = \mathbf{RSS} + \mathbf{0} + \mathbf{ESS} \end{aligned}$$

Teda  $TSS = RSS + ESS$ , kde

$RSS$  – reziduálna suma štvorcov – nevysvetlená – vnútri skupín,

$ESS$  – modelová suma štvorcov – vysvetlená – medzi skupinami.

Opäť nám to pripomína Pytagorovu vetu, keď sme využili vlastnosť priemeru, že suma odchýlok od priemeru je nulová, teda diagonála je kolmá na centrovany vektor. Ukážeme si to teraz geometricky.

## 2.5 ANOVA geometricky

Aby sme si vedeli vytvoriť geometrickú predstavu, budeme pracovať iba s dvomi úrovňami faktora, ktoré majú početnosti  $n_1$  a  $n_2$  pozorovaní. Budeme opäť indexovať iba jedným indexom, tak ako pri predošlých geometrických úvahach. Teda máme  $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T$  vektor realizácií, označme ďalej

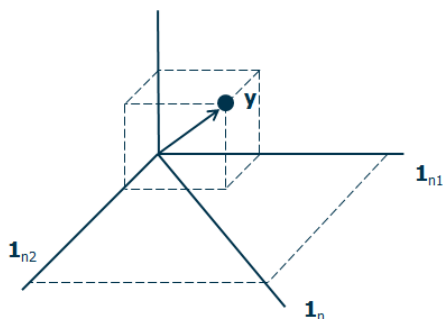
$\mathbf{I}_{n_1} = (1, \dots, 1, 0, \dots, 0)^T$  vektor  $n_1$  jednotiek zodpovedajúcich prvej úrovni faktora

$\mathbf{I}_{n_2} = (0, \dots, 0, 1, \dots, 1)^T$  vektor  $n_2$  jednotiek zodpovedajúcich druhej úrovni faktora.

Model má tvar:  $\mathbf{Y} = (\mathbf{I}_{n_1}, \mathbf{I}_{n_2}) \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$ , kde  $\boldsymbol{\beta} = (\mu_1, \mu_2)^T$  s obvyklými predpokladmi.

Na obrázku 6 sú zobrazené tieto 3 vektory v priestore pozorovaní.

**Obrázok 6:** ANOVA priestor pozorovaní  
(Zdroj: vlastné spracovanie)



Je zrejmé, že  $\mathbf{I}_{n_1}$  a  $\mathbf{I}_{n_2}$  sú navzájom kolmé, keďže  $\mathbf{I}_{n_1}^T \mathbf{I}_{n_2} = 0$ . Ďalej je zrejmé, že diagonála  $\mathbf{I}_n$  je súčtom  $\mathbf{I}_{n_1}$  a  $\mathbf{I}_{n_2}$ , teda  $\mathbf{I}_n = \mathbf{I}_{n_1} + \mathbf{I}_{n_2}$ .

### 2.5.1 Projekcia na model

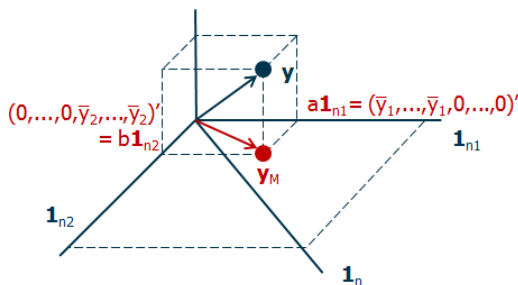
Označme opäť  $\mathbf{y}_M$  ortogonálnu projekciu  $\mathbf{y}$  na rovinu generovanú vektormi  $\mathbf{I}_{n_1}$  a  $\mathbf{I}_{n_2}$ , teda  $\mathbf{y}_M = a\mathbf{I}_{n_1} + b\mathbf{I}_{n_2}$ , kde  $a, b$  sú neznáme koeficienty. Ďalej označme reziduálny vektor  $\mathbf{y}_R = \mathbf{y} - \mathbf{y}_M$  a zobrazíme situáciu na obrázku 7.

Ukážeme, že  $a = \bar{y}_1$  a  $b = \bar{y}_2$ . Projekcia  $\mathbf{y}$  na  $\mathbf{I}_{n_1}$  je

$$\begin{aligned} \bar{y}_1 &= \langle \mathbf{y}, \mathbf{1}_{n_1} \rangle / \langle \mathbf{1}_{n_1}, \mathbf{1}_{n_1} \rangle = (\langle \mathbf{y}_R, \mathbf{1}_{n_1} \rangle + \langle \mathbf{y}_M, \mathbf{1}_{n_1} \rangle) / n_1 = \\ &= (\langle \mathbf{y}_R, \mathbf{1}_{n_1} \rangle + a \langle \mathbf{1}_{n_1}, \mathbf{1}_{n_1} \rangle + b \langle \mathbf{1}_{n_2}, \mathbf{1}_{n_1} \rangle) / n_1 = (0 + a n_1 + 0) / n_1 = a \end{aligned}$$

Podobne pre  $b = \bar{y}_2$  a preto  $\mathbf{y}_M = \bar{y}_1 \mathbf{I}_{n_1} + \bar{y}_2 \mathbf{I}_{n_2}$ .

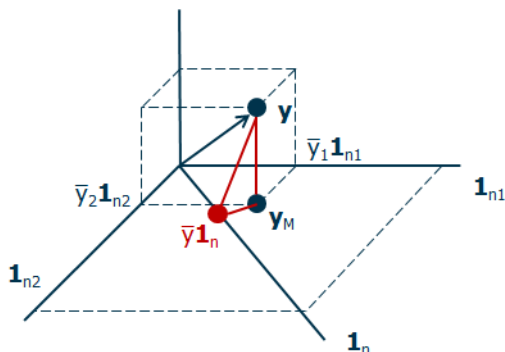
**Obrázok 7:** ANOVA projekcia na priestor stredných hodnôt  
(Zdroj: vlastné spracovanie)



### 2.5.2 ANOVA pravouhlý trojuholník

Opäť projekcia  $y$  na diagonálu je  $\bar{y}\mathbf{1}_n$ . Označme centrovateľný vektor  $y_C = y - \bar{y}\mathbf{1}_n$ . Zobrazíme to na obrázku 8.

**Obrázok 8:** ANOVA pravouhlý trojuholník  
(Zdroj: vlastné spracovanie)



Dostaneme pravouhlý trojuholník s preponou  $y_C = y - \bar{y}\mathbf{1}_n$  a odvesnami  $y_R = y - y_M$  a  $y_M - \bar{y}\mathbf{1}_n$ . Podľa Pytagora dostaneme:

$$\|y_C\|^2 = \|y_M - \bar{y}\mathbf{1}_n\|^2 + \|y_R\|^2$$

$$\text{Teda } \sum_j \sum_i (y_{ij} - \bar{y}_{..})^2 = \sum_j n_j (\bar{y}_j - \bar{y}_{..})^2 + \sum_j \sum_i (y_{ij} - \bar{y}_j)^2$$

### 2.5.3 ANOVA tabuľka ako zobrazenie Pytagorovej vety

Z geometrickej interpretácie vyplýva, že tzv. ANOVA tabuľka je spôsob zobrazenia Pytagorovej vety. ANOVA tabuľka udáva rozklad sumy štvorcov nasledovne:



*TSS*: celková *SS*, variabilita, ktorú chceme vysvetliť

Dimenzia/Stupne voľnosti:  $n-1$  (nadrovina s normálou diagonálou)

$$TSS = \|\mathbf{y}_C\|^2 = \sum_j \sum_i (\mathbf{y}_{ij} - \bar{\mathbf{y}}_{..})^2$$

*ESS*: *SS* vysvetlená modelom

Dimenzia/Stupne voľnosti:  $J-1$  (priestor vektorov v priestore modelu kolmých na diagonálu)

$$ESS = \|\mathbf{y}_M - \bar{\mathbf{y}}\mathbf{1}_n\|^2 = \sum_j n_j (\bar{\mathbf{y}}_j - \bar{\mathbf{y}}_{..})^2$$

*RSS*: nevysvetlená *SS*

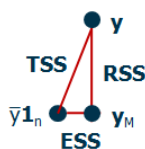
Dimenzia/Stupne voľnosti:  $n-J$  (priestor vektorov kolmých na priestor modelu)

$$RSS = \|\mathbf{y}_R\|^2 = \sum_j \sum_i (\mathbf{y}_{ij} - \bar{\mathbf{y}}_j)^2$$

#### 2.5.4 *F*-test a *t*-test ako tangens

Sumy štvorcov v ANOVA tabuľke majú  $\chi^2$  rozdelenie, preto aj jednotlivé členy Pytagorovej vety majú toto rozdelenie. Chceme testovať model, teda či model vysvetľuje variabilitu v závislej premennej, v našom prípade či sa stredné hodnoty líšia pre jednotlivé skupiny alebo nie. Nulová testovaná hypotéza je, že stredné hodnoty sú rovnaké medzi skupinami, teda že model nevysvetľuje variabilitu závislej premennej. Z geometrickej interpretácie je jasné, že v prípade rovnakých stredných hodnôt je vysvetlená suma štvorcov *ESS* relatívne malá vzhľadom k reziduálnej sume *RSS*. Je nenulová iba v dôsledku náhody v náhodnom výbere. Preto je aj pomer *ESS/RSS* malý, ako vidno z trojuholníka na obrázku 9.

**Obrázok 9:** ANOVA pravouhlý tojuholník detailne pre *F*-test  
(Zdroj: vlastné spracovanie)



Ak sumy štvorcov očistíme od vplyvu veľkosti dimenzií, v ktorých sa nachádzajú, tak dostávame tzv. *F*-rozdelenie. Teda v našom prípade s  $J=2$  skupinami je

$$F = (n-2) ESS/RSS \sim F(1, n-2) \sim t(n-2)^2.$$

Preto je *t*-štatistika úmerná tangensu uhla medzi vektormi  $\mathbf{y}_R$  a  $\mathbf{y}_C$ . Presne

$$t = (n-2)^{1/2} \tan(\mathbf{y}_R, \mathbf{y}_C).$$

Všeobecne  $H_0$  zamietame, ak  $F > F(J-1, n-J, \alpha)$ , kde  $\alpha$  je hranica významosti testu. Teda  $F$  si možno predstaviť ako štvorec tangensu uhla z pravouhlého trojuholníka vzniknutého z ortogonálnej projekcie na priestor stredných hodnôt z modelu.

### 3 MANOVA GEOMETRICKY

Ukážeme si teraz geometrickú interpretáciu viacrozmernej analýzy rozptylu. Okrem priestoru pozorovaní zobrazíme aj priestor premenných. Začne najskôr s formálnou definíciou modelu.

Uvažujme teda viac vysvetľovaných premenných, označme ich  $^1Y, ^2Y, \dots, ^pY$ . Každú modelujeme ANOVA modelom. Ale navyše uvažujeme aj o koreláciách medzi nimi. Teda pre každú úroveň faktora  $j$  modelujeme  $p$ -rozmerný náhodný vektor nasledovne:

$$(^1Y, ^2Y, \dots, ^pY) = (^1\mu, ^2\mu, \dots, ^p\mu) + \varepsilon^T, \text{ kde } \varepsilon \sim N_p(0, \Sigma) \text{ a } \Sigma \text{ nemusí byť diagonálna.}$$

Pre konkrétnu realizáciu vektorového náhodného výberu sú MANOVA odhady  $^k\hat{\mu}_j = ^k\bar{y}_j$ , teda tie isté ako pri ANOVA. Pri ANOVA boli získané minimalizáciou reziduálneho vektora, teda MNŠ metódou, ortogonálnou projekciou. Tu však máme viacero reziduálnych vektorov, ktoré môžu byť korelované. Teda namiesto reziduálnej sumy štvorcov máme tzv. reziduálnu maticu sumy štvorcov a sumy súčinov.

- Ukážeme, že pri použití ANOVA odhadov strednej hodnoty
- maticu sumy štvorcov a sumy súčinov možno dekomponovať na modelovú maticu a reziduálnu maticu
  - MANOVA reziduálna matica je “minimálna” v istom zmysle.

#### 3.1 MANOVA matice

Označme:

- $n \times p$  maticu realizácií  $Y$ , tj.  $Y = (^1y, ^2y, \dots, ^py)$ ,
- $n \times 1$  vektor pozorovaní zodpovedajúce  $j$ -tej úrovni faktora  $\mathbf{I}_{nj}$ ,
- $n \times J$  maticu  $X$  všetkých úrovní faktora, tj.  $X = (\mathbf{I}_{n1}, \mathbf{I}_{n2}, \dots, \mathbf{I}_{nJ})$ .

Potom model má tvar  $Y = XM + E$ , kde

- $M$  je  $J \times p$  matica neznámych stredných hodnôt,
- $E$  je  $n \times p$  matica realizácie nahodného výberu vektora  $\sim N_p(0, \Sigma)$ .

Ďalej označme:

- centrovanú maticu  $Y_C = Y - \mathbf{I}_n(^1\bar{y}, ^2\bar{y}, \dots, ^p\bar{y})$ ,
- modelovú maticu  $\mathbf{Y}_M = \mathbf{X}\hat{\mathbf{M}}$ , kde  $\hat{\mathbf{M}}$  je matica priemerov, tj. MNŠ odhadov stredných hodnôt,
- reziduálnu maticu  $Y_R = Y - Y_M$ .

Potom matice súčtov štvorcov a súčtov súčinov sú:

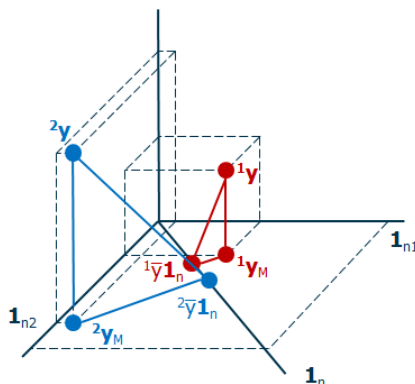
- $T$  matica  $p \times p$  celkového súčtu štvorcov a produktov, ktorú chceme modelom vysvetliť,  $T = Y_C^T Y_C = (Y - \mathbf{I}_n(\bar{y}^1, \bar{y}^2, \dots, \bar{y}^p))^T (Y - \mathbf{I}_n(\bar{y}^1, \bar{y}^2, \dots, \bar{y}^p))$
- $B$  matica  $p \times p$  súčtov štvorcov a produktov vysvetlených modelom, medzi skupinami matica  $B = (Y_M - \mathbf{I}_n(\bar{y}^1, \bar{y}^2, \dots, \bar{y}^p))^T (Y_M - \mathbf{I}_n(\bar{y}^1, \bar{y}^2, \dots, \bar{y}^p))$
- $W$  maticu  $p \times p$  reziduálnych súčtov štvorcov a produktov, vnútri skupín matica  $W = Y_R^T Y_R = (Y - Y_M)^T (Y - Y_M)$ .

Ukážeme, že obdoba Pytagorovej vety platí aj pre tieto matice, teda že  $T = W + B$ .

### 3.2 MANOVA rozklad matice súčtov štvorcov a súčtov súčinov

Majme teda viac závislých premenných. Pre jednoduchosť dve premenné a ich realizácie vo vektoroch  ${}^1y$  a  ${}^2y$ . Každá premenná izolovane má svoj ANOVA model, teda máme 2 pravouhlé trojuholníky s rozkladom sumy štvorcov. Zobrazené sú na obrázku 10.

**Obrázok 10:** MANOVA dva pravouhlé trojuholníky  
(Zdroj: vlastné spracovanie)



Rozložíme teraz aj sumu súčinov:

$$\begin{aligned}
 \langle {}^1y_C, {}^2y_C \rangle &= \langle {}^1y_R + {}^1y_M - {}^1\bar{y}\mathbf{1}_n, {}^2y_R + {}^2y_M - {}^2\bar{y}\mathbf{1}_n \rangle \\
 &= \langle {}^1y_R, {}^2y_R \rangle + \langle {}^1y_R, {}^2y_M - {}^2\bar{y}\mathbf{1}_n \rangle + \langle {}^2y_R, {}^1y_M - {}^1\bar{y}\mathbf{1}_n \rangle \\
 &\quad + \langle {}^1y_M - {}^1\bar{y}\mathbf{1}_n, {}^2y_M - {}^2\bar{y}\mathbf{1}_n \rangle \\
 &= \langle {}^1y_R, {}^2y_R \rangle + \mathbf{0} + \mathbf{0} + \langle {}^1y_M - {}^1\bar{y}\mathbf{1}_n, {}^2y_M - {}^2\bar{y}\mathbf{1}_n \rangle \\
 &= ({}^1y_R)^T ({}^2y_R) + ({}^1y_M - {}^1\bar{y}\mathbf{1}_n)^T ({}^2y_M - {}^2\bar{y}\mathbf{1}_n)
 \end{aligned}$$

Teda  $T = W + B$ , keďže

$$Y_C^T Y_C = Y_R^T Y_R + (Y_M - \mathbf{I}_n(\bar{y}^1, \bar{y}^2, \dots, \bar{y}^p))^T (Y_M - \mathbf{I}_n(\bar{y}^1, \bar{y}^2, \dots, \bar{y}^p)).$$

### 3.3 Minimálnosť MANOVA reziduálnej matice

Ukážeme si, že reziduálna matica  $W = Y_R^T Y_R$  je v istom zmysle minimálna. V jednorozmernom prípade je minimálna suma štvorcov reziduií. Vo viacrozmernom prípade budeme požadovať, aby akákoľvek lineárna kombinácia reziduálnych vektorov mala minimálnu varianciu.

Ľubovoľná lineárna kombinácia  $\mathbf{k}$  MANOVA reziduálnych vektorov je  $Y_R \mathbf{k}$ . Jej variancia je úmerná  $\mathbf{k}^T Y_R^T Y_R \mathbf{k}$ . Ukážeme, že pre maticu  $G$  ľubovoľných odhadov stredných hodnôt nie je variancia lineárnej kombinácie reziduií menšia ako pri MANOVA odhadoch, teda že

$$\mathbf{k}^T (\mathbf{Y} - \mathbf{XG})^T (\mathbf{Y} - \mathbf{XG}) \mathbf{k} \geq \mathbf{k}^T (\mathbf{Y} - \mathbf{Y}_M)^T (\mathbf{Y} - \mathbf{Y}_M) \mathbf{k} = \mathbf{k}^T \mathbf{W} \mathbf{k}$$

Úpravami postupne dostávame:

$$\begin{aligned} & \mathbf{k}^T (\mathbf{Y} - \mathbf{XG})^T (\mathbf{Y} - \mathbf{XG}) \mathbf{k} \\ &= \mathbf{k}^T ((\mathbf{Y} - \mathbf{Y}_M) + (\mathbf{Y}_M - \mathbf{XG}))^T ((\mathbf{Y} - \mathbf{Y}_M) + (\mathbf{Y}_M - \mathbf{XG})) \mathbf{k} \\ &= \mathbf{k}^T (\mathbf{Y} - \mathbf{Y}_M)^T (\mathbf{Y} - \mathbf{Y}_M) \mathbf{k} + 2\mathbf{k}^T (\mathbf{Y} - \mathbf{Y}_M)^T (\mathbf{Y}_M - \mathbf{XG}) \mathbf{k} \\ &+ \mathbf{k}^T (\mathbf{Y}_M - \mathbf{XG})^T (\mathbf{Y}_M - \mathbf{XG}) \mathbf{k} \end{aligned}$$

Keďže MANOVA reziduá sú kolmé na rovinu modelu tak

$$2\mathbf{k}^T (\mathbf{Y} - \mathbf{Y}_M)^T (\mathbf{Y}_M - \mathbf{XG}) \mathbf{k} = 0$$

Súčty štvorcov sú nezáporné, teda

$$\mathbf{k}^T (\mathbf{Y}_M - \mathbf{XG})^T (\mathbf{Y}_M - \mathbf{XG}) \mathbf{k} \geq 0$$

Preto dostávame

$$\mathbf{k}^T (\mathbf{Y} - \mathbf{XG})^T (\mathbf{Y} - \mathbf{XG}) \mathbf{k} \geq \mathbf{k}^T \mathbf{W} \mathbf{k}$$

### 3.4 MANOVA v priestore premenných

Na obrázku 10 sú reziduálne vektory kolineárne, teda perfektne korelované. Všeobecne sa reziduálne vektory nachádzajú v priestore s dimenziou  $n-2$ . To si však už nevieme predstaviť a na obrázku 10 sa nedajú zobrazit'. Preto sa sústredíme iba na priestor, v ktorom sa nachádzajú reziduá, aby sme mohli zobrazit' viac dimenzií. A aby sme obohatili geometrickú interpretáciu, prejdeme do priestoru premenných. V priestore premenných sú jednotlivé osi premenné a každé pozorovanie možno zakreslit' ako bod v tomto priestore so súradnicami zodpovedajúcimi realizáciám premenných na osiach.

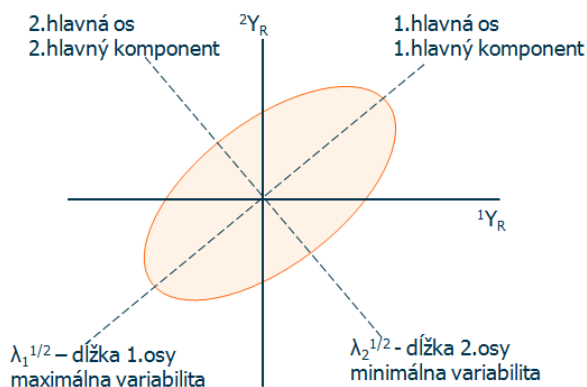
Všetky MANOVA matice,  $T$ ,  $B$  a  $W$ , sú z definície symetrické a pozitívne definitné, keď uvažujeme plnú hodnot' matic. Sú to kovariačné matice centrovaných vektorov, modelom predikovaných vektorov a reziduálnych vektorov, keď zanedbávame konštantu  $n$ . Možno si ich preto predstaviť ako elipsoidy v priestore premenných. Konkrétne matica  $W$  je zobrazená na obrázku 11 ako elipsa.

Minimálna variancia  $\mathbf{k}^T \mathbf{W} \mathbf{k}$  znamená, že každým smerom  $\mathbf{k}$  je elipsoid minimálny. Jeho obsah je minimálny. *Obsah* =  $c(\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_p)^{1/2}$ , kde  $c$  je konštanta, ktorá

závisí od dimenzie  $p$  a čísla  $\pi$ . Čísla  $\lambda_1^{1/2}, \dots, \lambda_p^{1/2}$  sú dĺžky osí elipsoidu. V štatistike majú interpretáciu ako smerodajné odchýlky hlavných komponentov. Ich štvorce, teda variancie, alebo presne v našom prípade sumy švorcov, sú vlastné čísla matice  $W$ . Matica  $W$  sa dá rozložiť na ortogonálnu transformáciu, teda rotáciu v prípade 2 dimenzií a ponáňahovanie v smere osí. Teda  $W=UAU^T$ , kde stĺpce matice  $U$  sú ortogonálne vlastné vektory matice  $W$  a matica  $A$  je diagonálna matica s vlastnými číslami  $\lambda_i$  matice  $W$  na diagonále. Preto MANOVA minimalizuje determinant matice  $W$ , ktorý je úmerný štvorcu obsahu elipsoidu prislúchajúceho matici  $W$ , keďže

$$\det(W) = \det(UAU^T) = \det(AU^TU) = \det(A) = \lambda_1\lambda_2\dots\lambda_p.$$

**Obrázok 11:** Zobrazenie pozitívne definitnej matice  $W$   
(Zdroj: vlastné spracovanie)



### 3.5 MANOVA štatistické rozdelenia

Ukázali sme, že celkovú maticu súčtov štvorcov a súčinov  $T$  možno rozdeliť na modelovú  $B$  a reziduálnu maticu  $W$ , t.j.  $T=B+W$ , kde determinant matice  $W$  je minimálny spomedzi determinantov reziduálnych matíc lineárnych odhadov stredných hodnôt. Opäť možno reportovať MANOVA tabuľku rozkladu matice  $T$  podobne ako v ANOVA prípade. A opäť pri testovaní nulovej hypotézy o rovnosti stredných hodnôt medzi skupinami možno vychádzať z takéhoto rozkladu. Na rozdiel od jednorozmerného prípadu však testovacia štatistika nie je založená na tangense, teda pomere odvesien, ale na pomere k prepone, teda  $\det(W)/\det(T)$ . Ak je reziduálna matica  $W$  malá vzhľadom k celkovej matici  $T$ , tak zamietame hypotézu o rovnosti stredných hodnôt. Podiel týchto determinantov má tzv. Wilksovo lambda rozdelenie a píšeme  $\det(W)/\det(B+W) \sim A(p, n-J, J-1)$ . Je pomerom determinantov dvoch Wishartových rozdelení. Matica  $W$  má Wishartove rozdelenie, ak suma štvorcov  $k'Wk$  má  $\chi^2$  rozdelenie pre každý smer  $k$ , značíme  $W \sim W_p(\Sigma, n-J)$ .

Wilksovo lambda vieme ďalej upraviť nasledovne:

$$\det(W)/\det(B+W) = \det(I + W^{-1}B)^{-1} = \prod_{i=1..p} 1/(1+\lambda_i),$$

kde  $\lambda_i$  sú vlastné hodnoty matice  $W^T B$ . Tu už vystupuje priamo pomer model verzus reziduá ako v prípade F-štatistiky.

Namiesto determinantu, teda obsahu, môžeme uvažovať celkovú variabilitu ako súčet variácií jednotlivých premenných. V tomto prípade je “veľkosť” kovariančnej matice jej stopa, teda súčet diagonálnych prvkov. Opäť zo spektrálneho rozkladu:

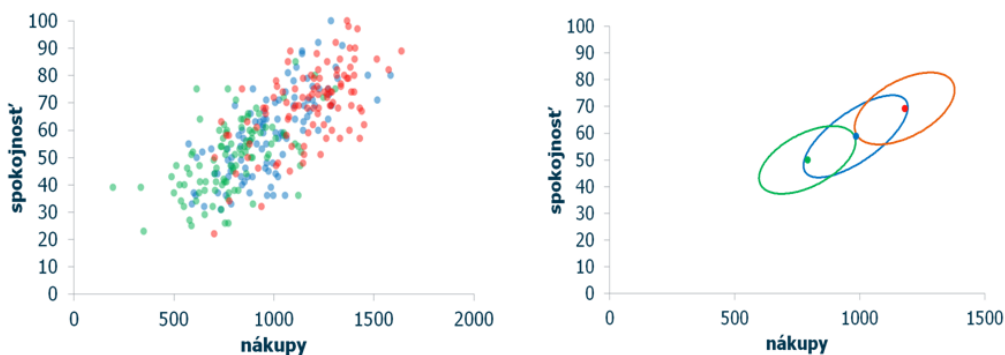
$$\text{Tr}(\Sigma) = \text{Tr}(U^T \text{diag}(\lambda) U) = \text{Tr}(\text{diag}(\lambda)) = \sum_{i=1..p} \lambda_i,$$

teda stopa je aj súčtom variácií hlavných komponentov. Ak teda nahradíme determinant stopov, tak dostávame ďalšiu možnosť testovacej štatistiky. V tomto prípade  $\text{tr}((I + W^T B)^{-1}) = \sum_{i=1..p} \lambda_i / (1 + \lambda_i)$ , prípadne sa používa priamo  $\text{tr}(W^T B) = \sum_{i=1..p} \lambda_i$ .

#### 4 VÝPOČET V MS EXCELI

V prípadovej štúdií z obchodného reťazca testujeme rovnosť stredných hodnôt spokojnosti a objemu nákupov pre 3 predajne na základe 100 respondentov v každej predajni. Na obrázku 12 sú zobrazené jednotlivé merania a prvé dva momenty po skupinách.

**Obrázok 12:** Jednotlivé pozorovania a prvé dva momenty pre predajne obchodného reťazca  
(Zdroj: vlastné spracovanie)



Z nameraných hodnôt vyrátame centrované dáta a pre každú predajňu jej priemerné hodnoty. Jednoducho dostávame predikované hodnoty a reziduálne hodnoty. Matice súm štvorcov a súčinov sa tiež priamočiaro zrátajú.

$T$  matica 2x2 celkového súčtu štvorcov a produktov, ktorú chceme modelom vysvetliť, má hodnoty

$$T = Y_C^T Y_C = (Y - \mathbf{I}_n(\bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_p))^T (Y - \mathbf{I}_n(\bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_p)) = \begin{matrix} 19646578 & 919903 \\ 919903 & 80024 \end{matrix}$$

$B$  matica  $2 \times 2$  vysvetlených modelom súčtov štvorcov a produktov, má hodnoty

$$B = (Y_M - I_n(\bar{y}, \bar{y}, \dots, \bar{y}))^T (Y_M - I_n(\bar{y}, \bar{y}, \dots, \bar{y})) = \begin{matrix} 7582518 & 374889 \\ 374889 & 18571 \end{matrix}$$

$W$  matica  $2 \times 2$  reziduálnych súčtov štvorcov a produktov, má hodnoty

$$W = Y_R' Y_R = (Y - Y_M)^T (Y - Y_M) = \begin{matrix} 12064060 & 545014 \\ 545014 & 61453 \end{matrix}$$

Teda ľahko overíme, že  $T = W + B$ .

Môžeme to zapísať aj do tabuľky zdrojov rozptylu, ktorej prvky sú matice:

Disperzia	Matica			d.f.
	$a_{11}$	$a_{12}$	$a_{22}$	
Vnútri supermarketov	12064060	545014	61453	2
Medzi supermarketami	7582518	374889	18571	297
Celková	19646578	919903	80024	299

Determinanty možno zrátať použitím funkcie *MDETERM*, dostávame:

$$\text{Det}(W) = 444\,327\,704\,452, \text{Det}(T) = 725\,974\,618\,315$$

a teda Wilksovo  $\Lambda = \text{Det}(W)/\text{Det}(T) = 0,612043$  je realizácia z  $A(2,297,2)$  pri platnosti nulovej hypotézy.

Prevedieme  $\Lambda$  na  $F$ -rozdelenie, ktoré možno v Exceli zrátať. Platí, že

$$(1 - \Lambda(2,297,2)^{1/2}) / \Lambda(2,297,2)^{1/2} \sim F(4,592) * 2/296.$$

Teda dostaneme  $F=41,17804691$  a pre kritickú hodnotu použijeme funkciu  $\text{FINV}(0.05,4,592)$ .  $F(4,592,0.05)=2,386985554$ , teda kritická hodnota je nízka v porovnaní s našou nameranou hodnotou.

Môžeme tiež zrátať  $p$ -hodnotu ako  $\text{FDIST}(41.18,4,592)$ , dostávame  $1.81763E-30$ , teda veľmi nízku hodnotu. Preto zamietame nulovú hypotézu a hovoríme, že supermarkety sú odlišné vzhľadom na spokojnosť a objem nákupov.

## Záver

Ukázali sme geometrickú interpretáciu základných štatistických pojmov. Priemer ako projekciu na diagonálu, varianciu ako štvorec dĺžky vektora, koreláciu ako kosínus, stupňe voľnosti ako počet dimenzií vektorových priestorov,  $F$ -test ako tangens uhla v pravouhlom tojuholníku vzniknutom pri ortogonálnej projekcii na priestor stredných hodnôt. Pre viacrozmerné analýzy sme ukázali geometrickú interpretáciu kovariančnej matice ako elipsoidu, determinantu ako objemu. Tieto isté geometrické predstavy možno ďalej aplikovať na:

- Testovanie lineárnych hypotéz o parametroch modelu. Jediný rozdiel v tomto prípade je, že priestor stredných hodnôt je limitovaný testovanou hypotézou. Zostrojenie pravouhlého trojuholníka a teda aj testovanie hypotéz má obdobnú geometriu ako sme tu prezentovali.

- Rozšírenie modelu na viac faktorov. Viac faktorov možno skombinovať do jedného a postupovať rovnako. Počet úrovní finálneho jedného faktora rastie geometricky rýchlo s počtom uvažovaných faktorov a preto aj počet stupňov voľnosti modelu rastie. Môže ľahko prekročiť počet pozorovaní a teda model nebude identifikovateľný. Preto sa opäť obmedzuje priestor stredných hodnôt, teda dimenzia modelu. Odhadujú sa najmä hlavné efekty faktorov, prípadne párové interakcie, ak je dost' pozorovaní.
- Lineárnu regresiu. Nemusíme byť obmedzení na kategoriálne premenné ako v prípade faktorov v analýze rozptylu.

V neposlednom rade prispeje takéto geometrické pochopenie aj k lepšiemu porozumeniu iných viacrozmerných techník, v ktorých sa vyskytujú matice ortogonálnych projekcií či determinanty pozitívne definitných matíc.

*Tento článok vznikol s príspevom grantovej agentúry VEGA v rámci projektu číslo 1/0092/15: Moderné prístupy k navrhovaniu komplexných štatistických prieskumov.*

### **Kľúčové slová**

MANOVA, ANOVA

### **Klasifikácia JEL**

C3

### **LITERATÚRA**

- [1] Lamoš, F. - Potocký, R. 1989. *Pravdepodobnosť a matematická štatistika*. Bratislava: Alfa, 1989. 344 s. ISBN 80-05-00115-0
- [2] Rao R. C. 1978. *Lineárne metódy štatistickej indukcie a jej aplikácie*. Praha: Academia, 1978. 666 s.
- [3] Härdle, W.K. - Simar, L. 2012. *Applied Multivariate Statistical Analysis*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2012. 516 s. ISBN 978-3-642-17229-8
- [4] Cox, T. F. - Cox, M. A. A. 2000. *Multidimensional Scaling*. Chapman and Hall/CRC, 2000. 328 s. ISBN 1-58488-094-5

### **RESUMÉ**

V článku prezentujeme geometrickú interpretáciu viacrozmernej analýzy rozptylu. Zdefinujeme priestor pozorovaní a ukážme geometrickú interpretáciu základných štatistických ukazovateľov. Priemer je interpretovaný ako súradnice ortogonálnej projekcie vektora pozorovaní na diagonálu, smerodajná odchýlka ako dĺžka vektora a korelácia ako kosínus uhla vektorov. ANOVA tabuľka rozkladu variancie je interpretovaná ako Pytagorova veta, F-test ako tangens v pravouhlom trojuholníku a počet stupňov voľnosti ako počet dimenzií priestoru, v ktorom sa vektor nachádza. Ďalej je definovaný priestor premenných, v ktorom je kovariančná matica interpretovaná ako



elipsoid a jej determinant ako objem. Ukázaný je MANOVA rozklad matice súčtov štvorcov a súčtu súčinov obdobný Pytagorovej vete. Minimálnosť determinantu reziduálnej matice súčtu štvorcov a súčtu súčinov je ukázaná. Výpočet MANOVA testu je prezentovaný na konkrétnom príklade testovania rozdielnosti výkonnosti predajní obchodného reťazca. Test je implementovaný v MS Exceli bez nutnosti použitia špeciálneho štatistického softvéru.

## **SUMMARY**

A geometrical interpretation of multivariate analysis of variance is presented in the article. Space of observations is defined and a geometric interpretation of basic statistics is shown. Average is interpreted as coordinates of the orthogonal projection of a vector of observations on the diagonal, standard deviation as the length of the vector and correlation as the cosine of an angle of two vectors. ANOVA table of the variance decomposition is interpreted as Pythagoras theorem, F-test as the tangent in a right-angled triangle and the number of degrees of freedom as the number of dimensions of a vector space. Then also the space of variables is defined, where the covariance matrix is interpreted as an ellipsoid and the determinant of the matrix as the volume of the ellipsoid. The decomposition of MANOVA sum of squares and cross products and the minimality of the residual sum of squares and cross product matrix are shown. The computation of MANOVA is presented using an example of testing a similarity of performance measures of retail chain outlets. The test is implemented in MS Excel, no special statistical software is needed.

## **Kontakt**

Mgr. Jozef Kušnier, Katedra štatistiky, Fakulta hospodárskej informatiky, Ekonomická univerzita v Bratislave, Dolnozemska cesta 1b, 852 35 Bratislava, email: kusnier.jozef@gmail.com

*Eva Mihaliková  
Darina Koreňová*

## **MODELOVÉ A ÚČTOVNÉ ZOBRAZENIE FINANCOVANIA ŠKOLSTVA V ZRIAĎOVATEĽSKEJ PÔSOBNOSTÍ OBCÍ**

### **Úvod**

Reformy prebiehajúce vo verejnej správe zasiahli aj proces financovania regionálneho školstva. Ako najefektívnejší sa javí systém viaczdrojového financovania, pričom základným finančným zdrojom sú prostriedky získané z príslušných rozpočtov. Ich výška je závislá od viacerých faktorov a to predovšetkým od počtu žiakov, výšky výnosu dane z príjmov v jednotlivých obciach a mestách, od počtu zamestnancov škôl, ich kvalifikácie a zaradenia, od materiálne – technického zabezpečenia škôl i nákladov na ich prevádzku.

Predkladaný príspevok v prvej časti poukazuje na legislatívnu úpravu financovania regionálneho školstva na Slovensku po presune niektorých kompetencií zo štátnych orgánov na samosprávu. Druhá časť príspevku je venovaná modelovému a účtovnému zobrazeniu financovania vybraného typu škôl v zriaďovateľskej pôsobnosti obcí.

### **1 CIEĽ A METÓDY**

Cieľom príspevku je analýza financovania regionálneho školstva z legislatívneho hľadiska a procesné a účtovné zobrazenie financovania základných škôl, ktorých zriaďovateľom je obec.

Uvedený cieľ je naplnený s využitím obsahovej analýzy platnej právnej úpravy Slovenskej republiky v oblasti školstva s osobitným zameraním na regionálnu úroveň. Identifikované právne predpisy sú vstupnými dátami pre určenie systému financovania regionálneho školstva a rovnako pre modelovanie systému procesov vo vybranej oblasti „Správy financovania školstva v zriaďovateľskej pôsobnosti obcí“.

Kľúčovou metódou je modelovanie procesov ako nástroj procesného riadenia<sup>1</sup>. Modelovanie chápeme ako nahrádzanie reálneho systému modelom (Mihaliková, 2011), ktorý je podkladom pre ďalšie skúmanie alebo priamo odhaľuje priestor a potrebu optimalizácie procesov.

Pre modelové zobrazenie financovania v regionálnom školstve je vytvorený globálny model procesov. Globálny model procesov je jedným zo štyroch modelov tvoriacich informačný model organizácie (poskytujúci prehľad o činnosti akejkoľvek organizácie súkromného či verejného sektora, a teda i nami analyzovaného prostredia

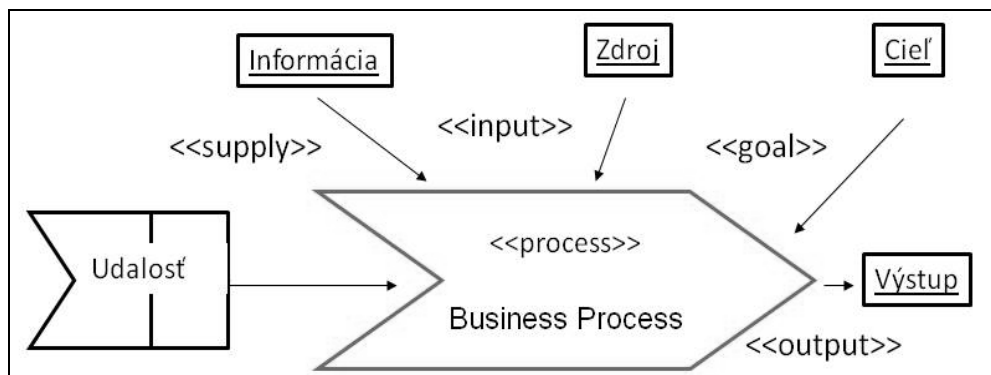
---

<sup>1</sup>Riadenie procesov je neustále uisťovanie sa, že procesy (ktoré vo všeobecnosti predstavujú logický sled krokov (Koreňová, Čepelová, 2016)) dosahujú maximum ich potenciálu. Zároveň dochádza k hľadaniu príležitostí pre ich permanentné zlepšovanie a následnú implementáciu týchto možností do praxe (Tuček, Zámečník, 2007).

obce). Informačný model organizácie je tvorený zo štyroch základných dimenzií: detailného modelu objektu, globálneho modelu objektov, detailného modelu procesu a spomínaného globálneho modelu procesov. Každá z nich predstavuje špecifický model s jedinečným spôsobom opisu. Modely sa líšia v dvoch zásadných aspektoch. Prvým je rozdiel v pozorovanom predmete, ktorý nám dáva odpoveď na otázku čo skúmame. Predmetom sú objekty (stavebné prvky systému) alebo procesy (činy, dianie v systéme). Druhým aspektom je spôsob pohľadu na skúmaný systém. Spôsob pohľadu je globálny (systém ako celok) a detailný (podrobné časti systému). (Řepa, 2012)<sup>2</sup>.

V príspevku je vizualizovaný globálny model systémov. K zostrojeniu modelu sa využíva Eriksson - Penkerova notácia, ktorá vznikla ako špecializácia diagramu tried z jazyka UML. Dôvodom výberu tejto dimenzie (globálneho modelu) je zobrazit' celý kontext procesného systému financovania regionálneho školstva. Získame tak statický pohľad na existujúce procesy rozdelené na kľúčové a podporné, vrátane ich vzájomných interakcií. A teda vytvoríme globálny, t.j. „úplný“ (nie v zmysle podrobnosti) pohľad na všetky procesy.

Eriksson definuje štyri základné elementy globálneho modelu, ktorými sú procesy, zdroje, pravidlá a ciele. Ich podobu zobrazuje a pre pochopenie globálneho modelu Správy financovania školstva v zriaďovateľskej pôsobnosti obcí ako legenda slúži Obrázok 1.



**Obrázok 1** Elementy modelu podnikového procesu podľa H. Erikssona

Zdroj: Řepa, 2012, s. 107-110

Ako informačné zdroje pre identifikáciu elementov modelu kľúčových a podporných procesov sme využili spomínanú obsahovú analýzu platnej právnej úpravy.

Poslednou použitou metódou je obsahová analýza opatrení MF SR a metodických postupov orientovaných na účtovanie transferov. Za transfery možno považovať finančné prostriedky získané od externých subjektov na financovanie bežných a kapitálových výdavkov v školstve. Vypracované modelové zobrazenie financovania tvorí vstup pre identifikáciu jednotlivých typov transferov používaných v základných školách.

<sup>2</sup> Bližšie pozri Řepa, 2012.

## 2 FINANCOVANIE REGIONÁLNEHO ŠKOLSTVA A JEHO LEGISLATÍVNA ÚPRAVA

Územná samospráva, ktorá je reprezentovaná obcami a vyššími územnými celkami (VÚC) získala po reformných zmenách súvisiacich s decentralizáciou dôležitú funkciu aj v oblasti školstva a jeho financovania. Jej základná úloha tu spočíva v zabezpečení preneseného výkonu štátnej správy v oblasti základných škôl (obce) a v oblasti stredných škôl (VÚC) a vytvárania podmienok na výchovu a vzdelávanie a plnenia povinnej školskej dochádzky. Obce môžu byť zároveň zriaďovateľmi niektorých škôl (základné umelecké školy, materské školy a jazykové školy) a školských zariadení (napr. školské kluby detí, centrá voľného času, školské strediská záujmovej činnosti a pod.) (Povinnosti obce v rámci nového školského zákona).

Reformné zmeny v oblasti školstva zasiahli tri základné zákony:

1. zákon NR SR č. 596/2003 Z. z. o štátnej správe v školstve a školskej samospráve, ktorý upravuje pôsobnosť, organizáciu a úlohy orgánov štátnej správy v školstve, obcí, samosprávnych krajov a orgánov školskej samosprávy a určuje ich pôsobnosť,
2. zákon NR SR č. 597/2003 Z. z. o financovaní základných škôl, stredných škôl a školských zariadení, ktorý upravuje financovanie regionálneho školstva,
3. zákon NR SR č. 564/2004 Z. z. o rozpočtovom určení výnosu dane z príjmov územnej samosprávy, ktorý upravuje rozpočtové určenie, termíny poukazovania, spôsob rozdeľovania a poukazovania výnosu dane z príjmov fyzických osôb do rozpočtov obcí a rozpočtov VÚC.

Uvedené zákony boli už viackrát novelizované a to za účelom zavedenia transparentného systému financovania regionálneho školstva a normatívo v na žiaka a efektívnejšieho využívania existujúcich kapacít i finančných zdrojov. Podľa legislatívnych úprav (od 1.1. 2013) sú z hľadiska financovania dominantné finančné prostriedky získané zo štátneho rozpočtu a z výnosu dane z príjmov územnej samosprávy. Zo štátneho rozpočtu sú financované (MŠVVaŠ SR):

1. z rozpočtovej kapitoly Ministerstva školstva, vedy, výskumu a športu SR:
  - školy, v ktorých sa vzdelávanie považuje za sústavnú prípravu na povolanie v zriaďovateľskej pôsobnosti VÚC,
2. z rozpočtovej kapitoly Ministerstva vnútra SR:
  - školy, v ktorých sa vzdelávanie považuje za sústavnú prípravu na povolanie v zriaďovateľskej pôsobnosti obce, cirkevného zriaďovateľa, súkromného zriaďovateľa a okresného úradu v sídle kraja,
  - materské školy pre deti so špeciálnymi výchovno-vzdelávacími potrebami v zriaďovateľskej pôsobnosti okresného úradu v sídle kraja,
  - školské zariadenia v zriaďovateľskej pôsobnosti okresného úradu v sídle kraja.
3. z výnosu dane z príjmov územnej samosprávy:
  - materské školy, základné umelecké školy, jazykové školy a školské zariadenia v zriaďovateľskej pôsobnosti obcí a VÚC od 1.1. 2005,
  - materské školy, základné umelecké školy, jazykové školy a školské zariadenia v zriaďovateľskej pôsobnosti cirkevných a súkromných zriaďovateľov od 1.1. 2007.

### 3 MODELOVÉ ZOBRAZENIE FINANCOVANIA ŠKOLSTVA V ZRIAĎOVATEĽSKEJ PÔSOBNOSTÍ OBCÍ

V príspevku sme identifikovali hlavné a podporné procesy v jednotlivých oblastiach Správy financovania školstva v zriaďovateľskej pôsobnosti obcí (viď Tab. 1). Kľúčové procesy sú označené kurzívou (Hlavným procesom je napríklad Riadenie financovania materskej školy. Príkladom podporného procesu je Riadenie financovania školského zariadenia.).

**Tab. 1** Kľúčové a podporné procesy oblasti riadenia financovania školstva v zriaďovateľskej pôsobnosti obcí

<i>Oblasť riadenia</i>	<i>Názov procesu</i>
Riadenie financovania školstva v zriaďovateľskej pôsobnosti obcí (ďalej označované ako FŠ – t. j. financovanie školstva)	<ul style="list-style-type: none"> <li>– <b><i>Riadenie financovania materskej školy</i></b></li> <li>– <b><i>Riadenie financovania základnej školy</i></b></li> <li>– Správa financovania základnej umeleckej školy</li> <li>– Riadenie financovania jazykovej školy</li> <li>– Riadenie financovania školského zariadenia (školská jedáleň)</li> </ul>

*Zdroj: Vlastné spracovanie*

Nadväzujúc na predchádzajúcu tabuľku (Tab. 1), v tej nasledujúcej (Tab. 2) ďalej uvádzame konkrétne inputy (orientované na finančné zdroje) a outputy (oblasti, ktoré sú uvedenými zdrojmi financované) jednotlivých procesov za oblasť Správy financovania školstva v zriaďovateľskej pôsobnosti obcí.

**Tab. 2** Vstupy a výstupy jednotlivých procesov v oblasti Riadenia financovania školstva v zriaďovateľskej pôsobnosti obcí

<i>INPUTY</i>	<i>Názov procesu</i>	<i>OUTPUTY</i>
<ul style="list-style-type: none"> <li>- <b>Dotácia z obce</b></li> <li>- Príspevok rodiča / zákonného zástupcu (ZZ)</li> <li>- Iné finančné zdroje</li> </ul>	<b><i>Riadenie financovania materskej školy</i></b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Predškolská výchova a vzdelávanie</li> <li>- Materiálno-technické vybavenie</li> <li>- Prevádzka školy</li> <li>- Mzdy</li> </ul>
<ul style="list-style-type: none"> <li>- <b>Dotácia zo štátneho rozpočtu</b></li> <li>- Dotácia z obce</li> <li>- Príspevok rodiča / ZZ</li> <li>- Iné finančné zdroje</li> </ul>	<b><i>Riadenie financovania základnej školy</i></b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Výchovno-vzdelávací proces</li> <li>- Materiálno-technické vybavenie</li> <li>- Prevádzka školy</li> <li>- Mzdy</li> <li>- Vzdelávacie poukazy</li> <li>- Modernizácia školy</li> <li>- Organizácia súťaží a pytagoriád</li> </ul>

<ul style="list-style-type: none"> <li>- <b>Dotácia z obce</b></li> <li>- Dotácia zo štátneho rozpočtu</li> <li>- Príspevok rodiča / ZZ</li> <li>- Iné finančné zdroje</li> </ul>	<p>Správa financovania základnej umeleckej školy</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Výchovno-vzdelávací proces</li> <li>- Materiálno-technické vybavenie</li> <li>- Prevádzka školy</li> <li>- Mzdy</li> <li>- Vzdelávacie poukazy</li> <li>- Modernizácia školy</li> <li>- Organizácia súťaží</li> </ul>
<ul style="list-style-type: none"> <li>- <b>Dotácia z obce</b></li> <li>- Príspevok rodiča / ZZ</li> <li>- Iné finančné zdroje</li> </ul>	<p>Riadenie financovania jazykovej školy</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Výchovno-vzdelávací proces</li> <li>- Materiálno-technické vybavenie</li> <li>- Prevádzka školy</li> <li>- Mzdy</li> <li>- Modernizácia školy</li> </ul>
<ul style="list-style-type: none"> <li>- <b>Dotácia z obce</b></li> <li>- Príspevok rodiča / ZZ</li> <li>- Iné finančné zdroje</li> </ul>	<p>Riadenie financovania školského zariadenia (školská jedáleň)</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Obedy</li> <li>- Prevádzka jedálne</li> <li>- Materiálno-technické vybavenie</li> <li>- Mzdy</li> </ul>

*Zdroj: Vlastné spracovanie*

Globálny model pre oblasť Správy financovania školstva v zriaďovateľskej pôsobnosti obcí (FŠ) obsahuje kľúčové procesy FŠ\_1 Riadenie financovania materskej školy, FŠ\_2 Riadenie financovania základnej školy a podporné procesy FŠ\_3 Správa financovania základnej umeleckej školy, FŠ\_4 Riadenie financovania jazykovej školy, FŠ\_5 Riadenie financovania školského zariadenia (školská jedáleň). Kľúčové a podporné procesy sú od seba odlíšené hrúbkou symbolu procesu a šípky v modely prezentujú ich vzájomné väzby. Príkladom úzkeho vzťahu je prepojenie FŠ\_1 Riadenie financovania materskej školy s FŠ\_2 Riadenie financovania základnej školy. Z tabuľky č. 2 prevzaté vstupy a výstupy, doplnené o udalosti (potreba procesu výchovy a predprimárneho vzdelávania detí, potreba zabezpečiť výchovno-vzdelávací proces a rozvoj základnej školy, potreba zabezpečenia procesu vyučovania cudzích jazykov a iné) a ciele procesov (poskytnúť základné všeobecné vzdelanie, rozvíjať umelecké vzdelávanie detí, rozvíjať cudzojazyčné schopnosti detí a pod.) sú graficky znázornené v Obr. 2.



Vytvoreným modelom sme identifikovali pre jednotlivé školy a školské zariadenia, ktoré sú v zriaďovateľskej pôsobnosti obcí, hlavné finančné zdroje. Odvíjajú sa od zákona o štátnej správe v školstve obce teda rozpisujú finančné prostriedky pridelené Ministerstvom školstva, vedy, výskumu a športu SR a Ministerstvom vnútra SR a to pre školy a školské zariadenia vo svojej zriaďovateľskej pôsobnosti. Na základe žiadosti poskytujú obce dotáciu aj pre súkromné a cirkevné školy a školské zariadenia z finančných prostriedkov poskytnutých obci na základe zákona č. 564/2004 Z. z. o rozpočtovom určení výnosu dane z príjmov územnej samosprávy a o zmene a doplnení niektorých zákonov v znení neskorších predpisov.

Na základe princípov viaczdrojového financovania škôl a školských zariadení obce určujú všeobecne záväzným nariadením *výšku dotácie na žiaka* školy a školského zariadenia vo svojej zriaďovateľskej pôsobnosti, ako aj pre súkromné a cirkevné školy a školského zariadenia, ktoré majú na území obce sídlo a to pre deti a žiakov do 15 rokov vek ale určujú aj *výšku príspevku rodiča* alebo zákonného zástupcu na čiastočnú úhradu nákladov za pobyt dieťaťa v materskej škole, v základnej umeleckej škole, na štúdium v jazykovej škole, na činnosť školského klubu detí, internátu alebo centra voľného času vo svojej zriaďovateľskej pôsobnosti. Následne vykonávajú finančnú kontrolu na úseku hospodárenia s finančnými prostriedkami pridelenými zo štátneho rozpočtu, z rozpočtu EÚ, s materiálnymi hodnotami a majetkom, ktoré má škola a školské zariadenie v správe a kontrolujú efektívnosť a účelnosť ich využitia (Rosičová, 2015, s.39). Základným informačným zdrojom pri tejto kontrole je účtovníctvo.

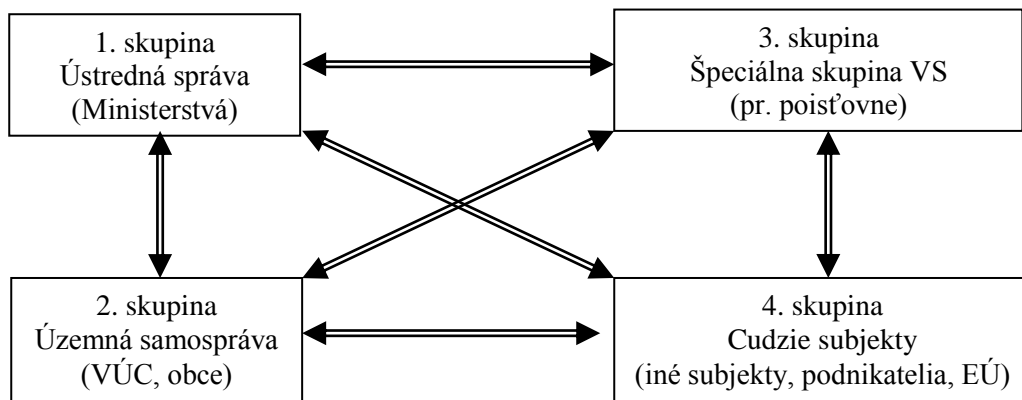
#### **4 ÚČTOVNÉ ZOBRAZENIE FINANCOVANIA ZÁKLADNÝCH ŠKÔL V ZRIAĎOVATEĽSKEJ PÔSOBNOSTI OBCÍ**

Účtovníctvo považujeme za vedu ale aj praktickú disciplínu zaoberajúcu sa zberom, zaznamenávaním, triedením, sumarizáciou, interpretáciou a odovzdávaním účtovných informácií všetkým jeho používateľom takým spôsobom, aby na základe nich mohli prijímať príslušné rozhodnutia (Soukupová a kol., 2004, s.14). Harmonizácia účtovníctva v európskom meradle si vyžiadala zmeny aj v systéme účtovníctva na Slovensku. V účtovníctve verejnej správy došlo k implementácii medzinárodných účtovných štandardov pre verejný sektor od 1. 1. 2008. Uvedená aplikácia IPSAS v SR ovplyvnila aj systém účtovania a vykazovania dotácií. Podľa § 19, Opatrenia MF SR, sa pre dotácie, príspevky, rozpočtové bežné výdavky, kapitálové výdavky, granty, dlhodobý hmotný majetok obstaraný za plnenie vo forme koncesie na stavebné práce a iné finančné operácie zaviedol pojem *transfer*. Transfer je z účtovného hľadiska chápaný širšie než podľa terminológie používanej rozpočtovou klasifikáciou, lebo je rozšírený o granty, t.j. o transfery od cudzích subjektov subjektom verejnej správy. (Farkaš a kol., 2007, s. 20). Možno povedať, že transfer slúži k vyjadreniu vzájomných vzťahov medzi účtovnými jednotkami rozpočtového, mimorozpočtového, peňažného aj nepeňažného charakteru (Kašiarová, Majorová, 2007, s. 9). Skupiny subjektov, ktoré vstupujú do týchto vzťahov vyjadruje nasledujúci obrázok.



Znázornené vzťahy medzi účtovnými jednotkami nachádzajúcimi sa v uvádzaných skupinách sa odrážajú aj v ich účtovaní. Vo všeobecnosti je ešte potrebné poznamenať, že každá účtovná jednotka, ktorá transfer poskytuje, eviduje náklad na transfer a naopak účtovná jednotka, ktorá transfer prijíma na krytie svojich výdavkov, eviduje výnos z transferu.

**Obrazok 3** Zobrazenie vzájomných vzťahov pri transferoch



Zdroj: Farkaš a kol., 2007, s. 21

V účtovníctve je uvedené určenie zdroja, z ktorého transfer pochádza potrebné rozšíriť aj o účel, na ktorý je transfer poskytnutý. Na základe toho rozlišujeme:

*Kapitálové transfery*, ktoré sú určené na financovanie dlhodobých, predovšetkým investičných potrieb a spravidla bývajú jednorazové. Využívajú sa na výstavbu, prístavbu, modernizáciu a rekonštrukciu školských objektov ako aj na riešenie havarijných stavov;

*Bežné transfery*, ktoré sa každoročne opakujú a slúžia na zabezpečenie miezd a plátov, a prevádzku školy.

Konkrétne spôsoby účtovania transferov rozoberieme v nasledujúcej časti príspevku a to pre základné školy, ktoré sú v zriaďovateľskej pôsobnosti obcí. Základná škola, ako rozpočtová organizácia, získava finančné prostriedky na krytie svojich bežných i kapitálových výdavkov predovšetkým zo štátneho rozpočtu. Obec vo vzťahu k základným školám vykonáva teda prenesený výkon štátnej správy. Finančné prostriedky sú základným školám pridelované z kapitoly ministerstva vnútra prostredníctvom krajského školského úradu podľa sídla zriaďovateľa (t. j. obce) v objeme určenom ministerstvom (§ 3, Zákon 597/2003 Z.z.). Pre obce to znamená, že zo štátneho rozpočtu je financovaný výchovno-vzdelávací proces a prevádzka základných škôl (normatívne financovanie). Okrem toho štát obciam poskytuje finančné prostriedky na záujmové vzdelávanie realizované školami a školskými zariadeniami prostredníctvom vzdelávacích poukazov (nenormatívne financovanie). Príjem uvádzaného transferu zo štátneho rozpočtu účtuje základná škola na výdavkovom rozpočtovom účte, z ktorého následne realizuje čerpanie, vid' Tab. 3.

**Tab. 3** Účtovanie transferu zo ŠR do RO (zo skupiny 1 do skupiny 2)

P.č.		Kapitálový transfer	Bežný transfer
1.	Prijatý transfer zo ŠR prostredníctvom zriaďovateľa	222 / 357 (AÚ)	222 / 357 (AÚ)
2.	Faktúra od dodávateľa	042 / 321	111 / 321
3.	Úhrada faktúry	321 / 222	321 / 222
4.	Zúčtovaný transfer prostredníctvom zriaďovateľa zo ŠR	357 / 384	-
5.	Evidencia majetku	022 / 042	112 / 111
6.	Účtovaný odpis DM	551 / 082	-
7.	Spotreba materiálu	-	501 / 112
8.	Zúčtovaný transfer do výnosov	384 / 694 (hodnota nákladu)	357 / 693 (hodnota nákladu)

Zdroj: Vlastné spracovanie podľa Urbanová, 2008

Ďalšou možnosťou ako získať finančné prostriedky pre základnú školu, je uchádzať sa o prostriedky od zriaďovateľa formou dotácie (Sýkora, 2016, s. 81), ktorých finančným zdrojom je najčastejšie výnos dane z príjmov územnej samosprávy. Spôsob účtovania transferu od zriaďovateľa je vyjadrený v Tab. 4.

**Tab. 4** Účtovanie transferu od zriaďovateľa v RO (skupina 2)

P.č.		Kapitálový transfer	Bežný transfer
1.	Prijatý transfer od zriaďovateľa	222 / 354 (AÚ)	222 / 354 (AÚ)
2.	Faktúra od dodávateľa	042 / 321	111 / 321
3.	Úhrada faktúry	321 / 222	321 / 222
4.	Zúčtovaný transfer od zriaďovateľa	354 / 355	-
5.	Evidencia majetku	022 / 042	112 / 111
6.	Účtovaný odpis DM	551 / 082	-
7.	Zúčtovaný transfer do výnosov	355 / 692 (hodnota nákladu)	354 / 691 (hodnota výdavku)
8.	Spotreba materiálu	-	501 / 112

Zdroj: Vlastné spracovanie podľa Urbanová, 2008

Posledným uvádzaným typom transferu je transfer získaný od iných (tzv. tretích) subjektov. V tejto súvislosti je potrebné poznamenať, že každý príjem, ktorý smeruje do rozpočtovej organizácie z prostredia mimo zriaďovateľa (t. j. od tretích, resp. cudzích subjektov) musí prejsť cez zriaďovateľa, ktorý následne tieto prostriedky transferuje na výdavkový rozpočtový účet organizácie (Sýkora, 2016, s. 83). Ukážka uvedeného spôsobu účtovania je v Tab. 5.

**Tab. 5** Účtovanie transferu od tretích osôb do RO (zo skupiny 4 do skupiny 2)

<i>P.č.</i>	<i>Prípád</i>	<i>Bežný transfer</i>	<i>Kapitálový transfer</i>
1.	<i>Prijatý transfer od podnikateľa na určitý účel</i>	221 / 372	221 / 372
-	Nutný odvod takto získaných prostriedkov zriaďovateľovi, ktorý to poukáže na výdavkový rozpočtový účet RO.		261 / 221 223 / 261 351 / 223 354 / 351 222 / 354
2.	Faktúra od dodávateľa	111 / 321	042 / 321
3.	Úhrada faktúry dodávateľovi	321 / 222	321 / 222
4.	<i>Zúčtovaný transfer od podnikateľa</i>	-	372 / 384
5.	Evidencia majetku	112 / 111	022 / 042
6.	Účtovaný odpis DM	-	551 / 082
7.	Spotreba materiálu	501/112	-
8.	<i>Zúčtovaný transfer do výnosov vo vecnej a časovej súvislosti s nákladmi</i>	372 / 697 (hodnota Ná)	384 / 698 (hodnota Ná)

Zdroj: *Vlastné spracovanie podľa Urbanová, 2008*

V súvislosti s účtovaním transferov môžeme konštatovať, že subjekt, ktorý transfer poskytuje, eviduje zníženie finančných prostriedkov a vznik pohľadávky voči subjektu, ktorému transfer poskytuje. Zároveň eviduje náklad na transfer, ktorý je v prípade vlastných transferov časovo rozlíšený a v prípade cudzích transferov je časovo nerozlíšený. Naopak subjekt, ktorý transfer prijíma, eviduje príjem finančných prostriedkov a vznik záväzku voči subjektu, ktorý transfer poskytol. Zároveň po použití transferu eviduje časovo rozlíšený výnos z transferu, ktorý sa zaznamenáva vo vecnej a časovej súvislosti s nákladmi, okrem vlastného bežného transferu. Ten je evidovaný do výnosov vo vecnej a časovej súvislosti s výdavkami a je považovaný za jediný transfer, ktorý môže ovplyvniť výsledok hospodárenia účtovnej jednotky. Základný odraz transferov v prípade ich zobrazenia u poskytovateľa i prijímateľa je vyjadrený v Tab. 6.

**Tab. 6** Zobrazenie transferu u prijímateľa a poskytovateľa

<i>Poskytovateľ transferu</i>	<i>Zobrazenie transferu u poskytovateľa</i>	<i>Typ transferu</i>	<i>Prijímateľ transferu</i>	<i>Zobrazenie transferu u prijímateľa</i>
Štátny rozpočet	Úbytok finančných prostriedkov Časovo nerozlíšený náklad na	Cudzí		Príjem finančných prostriedkov na výdavkovom rozpočtovom účte Časovo rozlíšený výnos z transferu

	transfer		Základná škola	
Zriaďovateľ - obec	Úbytok finančných prostriedkov Časovo rozlíšený náklad na transfer	Vlastný		
Tretie osoby - iné fyzické a právnické osoby, napr.: - podnikatelia - žiaci, rodičia - Európska únia	Úbytok finančných prostriedkov	Cudzí		Príjem finančných prostriedkov na <i>mimorozpočtovom</i> účte Časovo rozlíšený výnos z transferu

Zdroj: Vlastné spracovanie

Vychádzajúc z informácii prezentovaných v tabuľke možno poznamenať, že transfery po aplikácii IPSAS, ovplyvňujú v rámci účtovnej závierky, nielen súvahu, ale aj výkaz ziskov a strát a to prostredníctvom špecifických nákladových a výnosových účtov, ktoré s transfermi súvisia. V rozpočtovej organizácii ale transfery nemôžu spôsobiť vznik výsledku hospodárenia, okrem bežného transferu od zriaďovateľa. Zároveň je potrebné všetky transfery získané od zriaďovateľa s ním aj odsúhlasovať.

## Záver

Obec ako základná jednotka územnej samosprávy plní mnoho funkcií vyplývajúcich či už z jej originálnych alebo prenesených kompetencií, ktoré by mali byť efektívne vykonávané. Aby to bolo možné, odporúčame vykonať dôslednú analýzu všetkých samosprávnych procesov a ich následné zdokonalenie s prioritou optimalizovať najprv hlavné procesy, medzi ktoré patrí aj proces financovania škôl.

Základnou úlohou obcí v oblasti školstva je zaistiť potrebné priestorové a materiálne - technické zabezpečenie výchovno-vzdelávacieho procesu v školách a školských zariadeniach, ktorých je obec zriaďovateľom. Obec sa tak stáva nosným pilierom pri financovaní potrieb jednotlivých škôl, ktorých aktivity financuje v rámci:

- prenesených kompetencií na základe prostriedkov získaných zo štátneho rozpočtu a to v prípade základných škôl,
- a originálnych kompetencií na základe zákona o rozpočtovom určení výnosu dane z príjmov a nariadenia vlády o rozdelení tohto výnosu a to v prípade škôl a školských zariadení vo svojej zriaďovateľskej pôsobnosti, ako aj v pôsobnosti súkromných a cirkevných zriaďovateľov.

V príspevku sme pomocou procesne orientovaného modelu poukázali na možný spôsob identifikácie jednotlivých procesov v rámci financovania škôl a ich zabezpečenia. Dotácie a príspevky z obcí sa stali pre školy kľúčovým finančným vstupom. Za účelom modernizácie, škôl a tým aj zvyšovania úrovne celého vzdelávacieho procesu, preto odporúčame hľadať možnosti ich navyšovania.

Z účtovného hľadiska sme rozanalyzovali spôsob účtovania spomínaných dotácií v základných školách, ktoré v účtovníctve označujeme transfermi, a poukázali sme na ich zobrazenie v účtovnej závierke. Pri cudzích transferoch získaných mimo verejnej správy sme zistili potrebu ich účtovného zobrazenia aj u zriaďovateľa, čo možno považovať za kvantitatívne náročnejší proces, čo sa týka účtovných záznamov. Preto je možné z hľadiska optimalizácie uvažovať o eliminácii potreby evidovať prostriedky získané základnou školou, napríklad od podnikateľa, aj u zriaďovateľa.

Záverom možno povedať, že v predkladanom príspevku sme sa zaoberali aktuálnou a často diskutovanou problematikou financovania regionálneho školstva, identifikovali sme jednotlivé zdroje financovania a ich odraz v účtovníctve vybraného typu škôl. Prezentovaný spôsob modelového zobrazenia procesov považujeme za dôležitý prvý krok nevyhnutný pre hľadanie možností ich optimalizácie.

### **Kľúčové slová**

školstvo, model, financovanie, účtovníctvo

### **Klasifikácia JEL**

H76

### **Literatúra**

- [1] FARKAŠ, R. a kol. 2007. *Účtovníctvo štátu a samosprávy podľa princípov medzinárodných účtovných štandardov pre verejný sektor, časť 1.*, Bratislava: KPMG Slovensko, Price Waterhouse Coopers Slovensko.
- [2] KAŠIAROVÁ, L. – MAJEROVÁ, M. 2007. *Transfery podľa novej metodiky účtovania a vykazovania v štátnej správe a samospráve*. In: Verejná správa, č.5/2007.
- [3] *Kompetencie starostu ako zriaďovateľa ZŠ s MŠ*. Dostupné online: <http://www.epi.sk/priklad-z-praxe/kompetencie-starostu-ako-zriadovateľa-zs-s-ms.htm>
- [4] KOREŇOVÁ, D. – ČEPELOVÁ, A. 2016. *Factors influencing process management and effective operation of public administration organizations*. In: Actual Problems of Economics. Vol. 177, no. 3, p. 80-88. ISSN 1993-6788.
- [5] *Metodické usmernenie k postupu účtovania rozpočtových výdavkov v samospráve*. Dostupné online: [www.isamosprava.sk](http://www.isamosprava.sk)
- [6] MIHALIKOVÁ, E. a kol. 2011. *Finančná situácia a výkonnosť v samospráve*. Košice: UPJŠ. 110 s. ISBN 978-80-7097-898-6.
- [7] MIHALIKOVÁ, E. 2015. *Účtovníctvo vo verejnej správe so zameraním na rozpočtové organizácie*. Košice: UPJŠ v Košiciach. ISBN 978-80-8152-360-1.

- [8] MŠVVaŠ SR. Dostupné online: <https://www.minedu.sk/financovanie/>
- [9] *Opatrenie MF SR č. MF/16786/2007-31, ktorým sa ustanovujú podrobnosti postupov účtovania a rámcovej účtovej osnovy pre rozpočtové organizácie, príspevkové organizácie, štátne fondy, obce a vyššie územné celky, v znení neskorších predpisov.* Dostupné online: <http://www.finance.gov.sk/Default.aspx?CatID=9479>
- [10] *Povinnosti obce v rámci nového školského zákona.* Dostupné online: <http://www.zmoshp.sk/content/view/72/43/>
- [11] ROSIČOVÁ, J. 2015. *Financovanie školských zariadení na úrovni miestnej samosprávy.* Prešov: UNIVERSUM-EU, spol. s.r.o. ISBN 978-80-89046-91-1.
- [12] ŘEPA, V. 2012. *Procesně řízená organizace.* Praha: Grada Publishing, a.s., s. 304. ISBN 978-80-247-4128-4.
- [13] SOUKUPOVÁ, B. a kol. 2004. *Účtovníctvo.* Bratislava: Iura Edition, ISBN 80-8078-020-X.
- [14] SÝKORA, J. 2016. *Praktická príručka pre obce a ROPO s príkladmi účtovania a rozpočtovania.* Bratislava: Verlag dashofer. ISBN 978-80-8178-010-3.
- [15] TUČEK, D. – ZÁMEČNÍK, D. 2007. *Řízení a hodnocení výkonnosti podnikových procesů v praxi.* Zvolen: Technická univerzita vo Zvolene. ISBN 978-80-228-1796-7.
- [16] URBANOVÁ, T. 2008. *Účtovné súvzťažnosti v samospráve od 1.1.2008.* Martin: Združenie obcí regionálne vzdelávacie centrum. ISBN 978-80-060737-2-9.
- [17] *Zákon NR SR č. 564/2004 Z. z. o rozpočtovom určení výnosu dane z príjmov územnej samosprávy a o zmene a doplnení niektorých zákonov v znení neskorších predpisov.*
- [18] *Zákon NR SR č. 596/2003 Z. z. o štátnej správe v školstve a školskej samospráve a o zmene a doplnení niektorých zákonov v znení neskorších predpisov.*
- [19] *Zákon NR SR č. 597/2003 Z. z. o financovaní základných škôl, stredných škôl a školských zariadení v znení neskorších predpisov.*

## RESUMÉ

V každej spoločnosti neustále zohráva dôležitú úlohu výchova a vzdelávanie. Rozvoj a úroveň vzdelávania predovšetkým v súčasnej informačnej dobe, vo veľkej miere ovplyvňuje aj spôsob financovania a množstvo získaných finančných prostriedkov. Predkladaný príspevok poukazuje na systém financovania regionálneho školstva, pričom sa detailnejšie zameriava na školy a školské zariadenia, ktoré sú v zriaďovateľskej pôsobnosti obcí. Modelovo analyzuje procesy súvisiace s oblasťou financovania, poukazuje na zdroje financovania a spôsob ich účtovného zobrazenia v základných školách, ktoré sú v zriaďovateľskej pôsobnosti obcí.

## SUMMARY

Education and training plays an important role in every society. The development and level of education, especially in the current information age largely influences the financing and funds amount. The present contribution points out to regional education

funding system, with detailed focus on schools and school facilities that are in the competence of municipalities. Its analysis processes by model, related to financing, points out to sources of finance and their accounting aspects.

### **Kontakt**

Ing. Eva Mihaliková, PhD., Katedra ekonomiky a riadenia verejnej správy, Fakulta verejnej správy, Univerzita Pavla Jozefa Šafárika v Košiciach, Popradská 66, Košice 041 32, Slovenská republika, e-mail: eva.mihalikova1@upjs.sk, tel.: +421 55 234 5137

PhDr. Darina Koreňová, PhD., Katedra ekonomiky a riadenia verejnej správy, Fakulta verejnej správy, Univerzita Pavla Jozefa Šafárika v Košiciach, Popradská 66, Košice 041 32, Slovenská republika, e-mail: darina.korenova@upjs.sk, tel.: +421 55 234 5141

---

*Eva Rakovská*

## **MODELOVANIE ZNALOSTÍ V MANAŽÉRSKÝCH ÚLOHÁCH PROSTREDNÍCTVOM ONTOLÓGIÍ A WEBOVÝCH SLUŽIEB**

### **Úvod**

Koncom minulého storočia sa pojem znalostný manažment a znalostné spoločnosť dostala do povedomia nielen v odborných kruhoch, ale aj na verejnosti. Pojmy ako dáta, informácie či poznatky, znalosti a vedomosť sa diskutovali a dodnes diskutujú na rôznych odborných podujatiach a skupiny vedcov z viacerých vedných odborov zaujímajú k týmto pojmom rozdielne postoje a názory. V synonymickom slovníku slovenského jazyka sa čitateľ dozvie, že informácia je synonymum k správe, údaju a poznatku<sup>1</sup>. Často býva problémom správne sa orientovať v daných pojmoch a ich jednoznačná a striktná definícia v praxi nie je možná. Business Dictionary hovorí o informácii a jej vzťahu k dátam: „Informácia sú dáta, ktoré sú (1) poskytované včas a správne (2) sú špecifické a organizované pre nejaký účel (3) sú prezentované v kontexte, ktorý im dáva význam a vhodnosť a (4) môžu viesť k zvýšeniu pochopenia a k zníženiu neurčitosti.“ Takéto vymedzenie pojmu môže poskytnúť iba základný rámec pre vymedzenie ďalších pojmov potrebných pri modelovaní v manažérskych činnostiach a v hospodárskej informatike, ktorej úlohou je analyzovať podnikové procesy, navrhovať ich dátové modely, funkčné modely tak, aby ich bolo možné podporovať, riadiť alebo aj automatizovať prostredníctvom informačných technológií. Z toho dôvodu je potrebné pozrieť sa na vymedzenie pojmov dáta, informácie, fakty, poznatky detailnejšie.

Základným pojmom znalostného manažmentu sú pojmy poznatok, znalosť a vedomosť<sup>2</sup>, ktoré všetky vychádzajú z prirodzeného ľudského poznania, nadobúdaného v procese učenia sa, získavania skúseností, zručností s pomocou intuície a prirodzenej inteligencie. Pri vymedzení pojmu znalosť a jeho životného cyklu je nutné vychádzať z porovnávania základných informatických pojmov ako sú dáta, informácie a ich používania v každodennej praxi. V anglickom jazyku pojem „knowledge“ má viacero slovenských ekvivalentov, pričom najpoužívanejší je poznatok, ktorý v odbornom ponímaní najvýstižnejšie zachytili Piaček a Kravčík (PIA\_KRA1999) ako „kognitívny

---

<sup>1</sup> Podľa synonymického slovníka <http://slovník.azet.sk/synonyma/?q=znalos%C5%A5>

<sup>2</sup> Všetky pojmy možno v istom zmysle chápať rovnocenne. V anglickom origináli „knowledge“ má niekoľko slovenských prekladov. V odbornej informačnej spoločnosti sa ustálili pojmy poznatok, znalosť.



významový útvar, ktorý je výsledkom poznávacieho procesu, napr. v rámci vedeckého výskumu“ a podobne uvádzajú, že poznatok je z filozofického hľadiska spracovaná informácia. „Knowledge“ znamená tiež vedomosť, ktorá znamená „osvojené, t.j. pochopené a zapamätané fakty a vzťahy medzi nimi (v podobe pojmov, pravidiel, poučiek, zákonov, vzorcov, značiek a i.)“ (PIA\_KRA1999). Taktiež „knowledge“ je znalosť, ktorú môžeme vnímať ako „významový útvar tvorený systémom poznatkov; vzájomne previazaná (meniteľná, doplniteľná) štruktúra súvisiacich poznatkov, ktorú možno použiť v interakcii so svetom“. Dynamiku znalosti lepšie vystihli (KEL\_POP1988) „Znalosti sú viac než len statické zoznamy poznatkov. Znalosť niečoho znamená vlastniť jemu zodpovedajúcu reprezentáciu v podobe dostatočne verného a presného kognitívneho modelu vrátane spôsobilosti vykonávať s tým, čo je reprezentované, rôzne kognitívne operácie“. V odbornej informatickej obci sa ustálilo používanie pojmu znalosť, ktorá podľa vyššie uvedenej filozofickej definície má najbližšie k možnosti explicitného vyjadrovania ľudského poznania a je nutným predpokladom pre používanie informačných technológií na jeho spracovanie. Z vyššie uvedeného a najmä z vymedzenia znalosti v (KEL\_POP1988), (KEL2010) je vidieť, že znalosť ako systém nemôžeme vnímať ako statický systém, ale má svoju dynamiku. Modelovanie dynamiky systému znalostí nie je jednoduchá záležitosť. Príspevok sa bude zaoberať modelovaním znalostí pomocou ontológií a webových služieb, kde je zachytená prevažne statická časť modelu, pričom dynamika je pridávaná variabilitou a kombinovaním rôznych prístupov s uvedenými typmi modelovania. V oboch prípadoch teda ide hlavne o modelovanie entít, poznatkov a väzieb medzi nimi. V modelovaní pre potreby automatizovania znalostných procesov je tento prístup postačujúci. Nazeranie na poznatok ako kognitívny významový útvar umožňuje zamerať sa na javy a vzťahy medzi entitami. Tie tvoria jadro poznatku a vychádzajú zo sémantiky poznatku. A práve tu je vidieť odlišnosť od dátového modelovania, kde entity hrajú hlavnú rolu pri modelovaní a ich vzťahy sa odvíjajú len od spôsobu modelovania.

Poznatky ako fenomén prirodzenej ľudskej inteligencie sa podľa Poppera spájajú s kognitívnymi poznávacími prejavmi myslenia. Z toho dôvodu nie je jednoduché modelovať poznatky, ktoré sú charakterizovateľné svojimi špecifikami<sup>3</sup> ako napríklad

- diskretnými, symbolovými, či kvalitatívnymi atribútmi
- postupmi prehľadávania stavového priestoru a rozpoznávania objektov
- nemonotónnymi, t.j. predpokladajúcimi, skúšajúcimi, nahrádzajúcimi krokmi pri riešení úloh a najmä nezáväznými nedeterministickými krokmi

Všetky tieto charakteristiky poznatkov nezávisia od toho, či je ich nositeľom človek alebo či sú súčasťou informačného resp. znalostného systému. Ľudské uvažovanie kombinuje indukzívne a deduktívne odvodzovanie, porovnávanie prípadov, využívanie

---

<sup>3</sup> Prebraté z prednášok M. Poppera v rokoch 1997-2001

---

rozhodovacích stromov, heuristik, odhadov, očakávaní, plánovania a podobne a obsahuje v sebe neurčitosti či nepresnosti, subjektivitu poznania. Mnohé z týchto charakteristík je možné previesť na kvantitatívne modely (rozhodovacie modely, dynamické modely, fuzzy modelovanie a pod.) kde sa dá použiť niektorá z matematických metód, ale mnohé môžeme popísať iba kvalitatívne.

## 1 REPREZENTÁCIA ZNALOSTÍ A ODVODZOVANIA V ZNALOSTNÝCH SYSTÉMOCH

Reprezentácie poznatkov vychádzajúce z klasického vnímania umelej inteligencie (NEG2005), (NOR\_RUS2003) vychádzajú predovšetkým z hľadania a modelovania vzťahov medzi entitami a z troch základných atribútov poznatku: asociativita, deklaratívnosť a proceduralita, ktoré sú charakteristické aj pre ľudské poznanie a sú dobrým predpokladom k tomu, aby ich bolo možné použiť v procesoch, pracovných postupoch, odvodzovaní a uvažovaní. Klasická teória reprezentácie poznatkov vychádza práve z atribútov poznatku a jednotlivým atribútom priraduje konkrétne reprezentácie.

Deklaratívnosť však nepredstavuje iba vyjadriteľnosť v prirodzenom jazyku, ktorého počítačové spracovanie nie je stále jednoduché, ale i vyjadriteľnosť entít a vzťahov medzi nimi takou formou, aby zachytávala simuláciu ľudského myslenia alebo logických postupov, či pracovných činností a procesov a zároveň spĺňala podmienku Backus-Naurovej formy. Postupne sa od formálnej logiky, cez predikátovú logiku, prešlo k produkčným systémom postaveným na pravidlách (NEG2005), (NOR\_RUS2003). Vo všetkých typoch týchto reprezentácií ide prevažne o odvodzovanie, usudzovanie postavené na implikácii ( $A, B$  sú výroky, potom implikácia  $A \Rightarrow B$ ), teda na priamočiarom inferencovaní (dopredné alebo spätné reťazenie). Často je postup inferencovania zároveň aj monotónny, čím sa stáva ľahko počítačovo spracovateľný, má jasne vymedzený postup prehľadávania stavového priestoru, pričom tieto reprezentácie spĺňajú Backus-Naurovu formu bezkontextovej gramatiky. Ich nevýhodou je, že narábajú so symbolovými štruktúrami, kde napríklad formula (alebo jej konkrétna hodnota výrok) predstavuje akúsi atomickú nedeliteľnú časť. To znamená, že v nej nie je samostatne vymedzená entita a jav, resp. vzťah medzi entitami. Teda ak máme výrok „Študent študuje informatiku“ alebo „Nezamestnanosť stúpa“, tak pri symbolovej reprezentácii sú výroky vnímané ako jeden celok, jeden symbol a entity ako študent, informatika nie sú samostatne vymedzené. Predikátová logika poskytuje o čosi lepšie možnosti vymedzenia javu od entít a to práve používaním prefixového zápisu v termoch prostredníctvom predikátov (NOR\_RUS2003). Napríklad: „študuje(študent, informatika)“; „stúpa(nezamestnanosť)“ a dokonca aj pri matematických operáciách sa dá využiť prefixový zápis ak o operácii uvažujeme ako o vzťahu medzi číslami  $+(4, 5)$  alebo „sčítaj(4, 5)“. Implikácia v týchto formách reprezentácií predstavuje z hľadiska modelovania reality riešiacie postupy, ktoré sú postavené na časových, príčinných alebo definičných vzťahoch. Takéto postupy

prirodzeným spôsobom simulujú poznatky asertívneho typu, imitujú postupnosti úvah človeka, či priamočiaro odvodzujú nové fakty. Ide o spôsob odvodzovania, ktorý umožňuje prostredníctvom vhodne zvolených algoritmov prehľadávanie stavového priestoru aj sčítovanie vnímať ako vzťah, či poznatok. Na druhej strane najmä v pravidlovej reprezentácii poznatkov je možné používať tzv. nemonotónne odvodzovanie. Nemonotónne odvodzovanie na rozdiel od priamočiareho monotónneho umožňuje vytváranie nezáväzných riešení ich overovanie a možnosti vrátiť späť kroky riešiacoho postupu<sup>4</sup>. Spomenuté reprezentácie neposkytujú však vo svojej základnej podobe vhodné štruktúrovanie entít a vzťahov vyjadrujúcich hierarchické, či agregáčnne väzby.

V roku 1975 práve vyššie spomínané nedostatky odstránil Marvin Minsky, ktorý navrhol tzv. rámcovú reprezentáciu poznatkov ako predchodcu objektivej paradigmy v modelovaní IS a objektovo-orientovaného programovania. Rámcová reprezentácia vychádza zo sémantických sietí, ktoré kladú dôraz na asociativitu poznatku. Reprezentuje modelovanie troch základných vzťahov medzi entitami: asociativity, agregácie a hierarchickosti. Na rozdiel od objektového programovania, ktoré je postavené na triedach a na striktných pravidlách ako vytvárať funkcie (metódy zapúzdrené k triedam), poskytuje rámcová reprezentácia viacej voľnosti v modelovaní, funkcie môžu stáť samostatne, nie sú viazané na konkrétnu triedu a dajú sa kombinovať aj s pravidlami. Takto vytvárajú veľmi silný programovací rámec, kde sa prelína deklaratívna, objektová a aj procedurálna paradigma. Rámcová reprezentácia poskytuje zároveň funkčný, entitný a aj logický pohľad na riešenie úlohu a z každej paradigmy preberá dobré vlastnosti.

## 1.1 Modelovanie konceptov

V klasických reprezentáciách poznatkov na rozdiel od modelovania cez dáta zohráva rolu „jav“, teda väzba medzi entitami. Jav vytvára koncept danej situácie, o ktorej sa v danom momente v modelovanom systéme uvažuje alebo sa z neho odvodzujú nové fakty. Práve jav určuje koncept konkrétnej situácie, konkrétny fakt. Fakt je zároveň poznatkom, ktorý je pre systém vždy pravdivý.<sup>5</sup> Vhodný pohľad na vymedzenie pojmov dáta, informácia, fakt, poznatok z hľadiska modelovania konceptov poskytol už Beckmann (BUR2007) vo svojej hierarchii, kde uvažuje aj o vyššej organizovanosti smerom k podnikovej expertíze. Vo svojej hierarchii Beckmann popisuje prechod od dát ku podnikovej kompetencii zo všeobecného uhla pohľadu pri modelovaní. Táto hierarchia je nasledovná

- Dáta: texty, fakty, kódy, obrazy, zvuky  
(*priradenie hodnoty*)  
+ význam + štruktúra =

<sup>4</sup> Spracované na základe prednášok M.Poppera 1997-2001

<sup>5</sup> Všetko, čo informačný alebo znalostný systém prijíma zvonka je pre neho pravdivé.

- Informácie: organizované, štruktúrované, interpretované, sumarizované dáta  
(*cieľové priradenie hodnoty*)  
+ *abstrakcie* + *uvažovanie* + *vzťahy* + *použitelnosť* =
- Znalosti: prípady, pravidlá, procesy, modely  
(*relačno – cieľové priradenie hodnoty*)  
+ *selekcia* + *skúsenosti* + *princípy* + *učenie* + *obmedzenia* =
- Expertíza: rýchla a presná rada (pokyn), vysvetlenie a opodstatnenie výsledkov, úvah  
(*relačno – cieľové priradenie hodnoty istého (určitého) významu*)  
+ *integrácia* + *distribúcia* + *navigácia* =
- Kompetencia (schopnosť, nadanie): expertíza organizácie: znalostné zdroje, integrovaný výkon podporného systému, jadro kvalifikácie (kompetencie, spôsobilosti)

Modelovanie konceptov je jadrom nielen modelovania izolovaných javov vo faktoch popisujúcich napr. atribúty entít resp. v informáciách cez relačné vzťahy v relačných databázach, ale aj modelovaním potrebným pre zachytenie podnikových pravidiel, prípadov, procesov, teda podnikových znalostí (dokonca expertíz a kompetencií). Modelovaniu konceptov v 21. storočí výrazne pomáha aj rozvoj internetových technológií a sémantického webu. Práve sémantika udáva koncept javu (kto, čo, s čím, s kým, v akom čase vykonáva) a jej modelovanie môže byť vedené viacerými spôsobmi. Dva základné, pritom rôzne spôsoby sú: modelovanie prostredníctvom ontológií alebo prostredníctvom webových služieb. Každý z prístupov modelovania zachytáva sémantiku konceptu znalosti vo význame Beckmannovej hierarchie rozdielnym spôsobom.

### ***1. 1. 1 Ontologické modelovanie***

Rozvoj webových technológií priniesol aj tzv. metadátové rámce (XML Schéma, RDFS – RDF schéma, OWL – Ontology web language a iné), ktoré dávajú možnosť vyjadrenia ontológií na webe. Ontológie na webe sú základom sémantického webu často označovaného pojmom Web 3.0. Definícia ontológie sa v súvislosti s informatickými vedami prvýkrát objavila v roku 1993 a jej autorom bol T. Gruber „...ontológia je formálna, explicitná špecifikácia na zdieľanie konceptov“. Gruber detailnejšie popisuje „Ontológie nie sú limitované len na konzervatívne definície, teda definície v tradičnom logickom ponímaní, ktoré len predstavujú terminológiu a nepridávajú žiadne poznanie o svete“<sup>6</sup>. Všeobecne ontológie prinášajú väčšiu voľnosť v modelovaní rôznych prípadov, znalostí a podnikových prípadov. Ďalší autori špecifikujú ontológiu podobným spôsobom

---

<sup>6</sup> Citácie na jednom mieste možno nájsť v (NIET 2003)

---

• Russel, Norving – 1995 uvádza „Ontológia je formálnym popisom konceptov a vzťahov, ktoré existujú v komunite agentov.“

• Noy & McGuinness 2001 uvádza „Ontológia je formálna explicitná reprezentácia konceptov domény, vlastností každého konceptu popísaného charakteristikami a atribútmi poznaných konceptov ako slotov a obmedzení týchto slotov“.

• Fonseca et al. 2002 uvádza „Ontológia je teória, ktorá používa špecifický slovník na popis objektov, tried, vlastností a priradených (related) funkcií z určitého pohľadu.“<sup>7</sup>

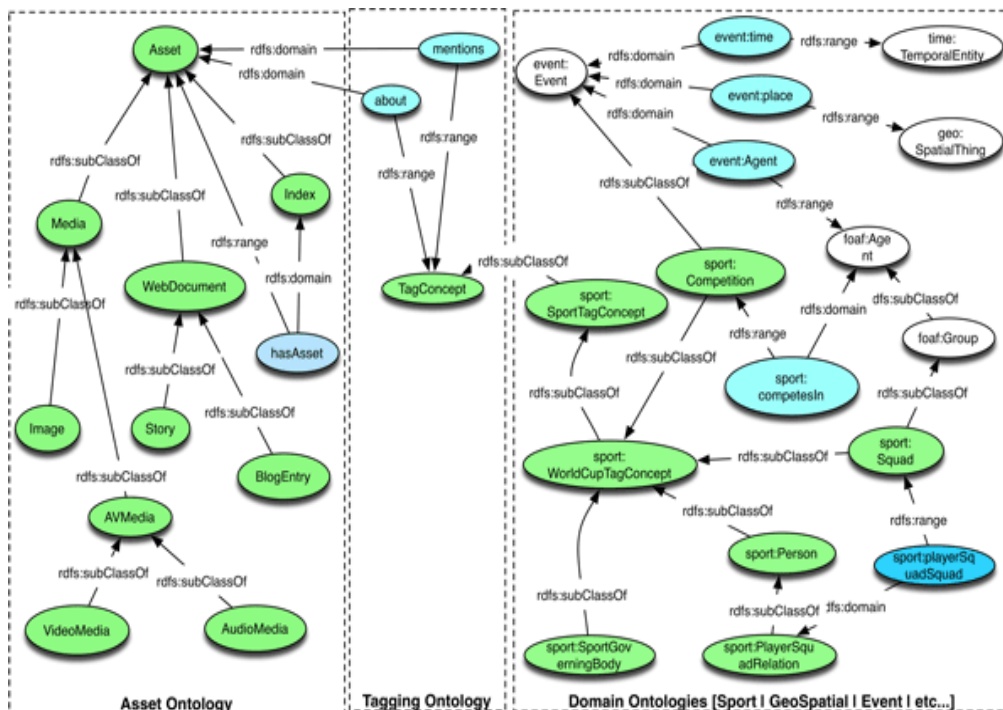
Ontológie sú teda nástrojom, ktorý je schopný zachytávať koncept znalostí a koncepty zlučovať do doménových oblastí (alebo doménové oblasti rozložiť na jednotlivé koncepty a ďalej na poznatky, ktoré zachytávajú entity a vzťahy v podnikových procesoch). Podľa (SVA2002) je možné členiť ontológie podľa historického vývoja alebo podľa miery formalizácie a predmetu konceptualizácie, pričom pre modelovanie konceptov v podnikovej a manažérskej praxi majú význam najmä doménové a úlohové ontológie (SVA2002). Ontológie vznikali v podnikovej praxi najprv transformáciou podnikových taxonómii, produktových klasifikácií, zdravotníckych údajov, relačných dátových schém a podobne. Postupne s rozvojom webových technológií a nástrojov a rozvojom e-business a e-commerce sa ontologické modely (často voľne dostupné na internete) používajú na publikovanie na internete Obr.1 alebo na marketing na webe pre jednotlivé produkty, na tvorbu rôznych šablón (pre vyhľadávače na webových stránkach, pre vyhľadávanie vzorov v podnikových databázach (RAK2013), pre párovanie ponuky a dopytu pri verejných zákazkách a podobne). Obr.1 zachytáva možnosti prepojenia všeobecnej schémy webového dokumentu tzv. Asset Ontology a konkrétnej doménovej oblasti, ktorou je šport, pomocou RDF schémy (RDFS) a popis vychádza priamo z modelovania RDFS (W3C2014). Asset Ontology udáva schému webového dokumentu, jeho indexovania a médií na webe ako obecnú schému publikovania založenú na folksonómii (THREAD2014), ktorá je podstatne voľnejšia ako taxonómia. Doménová ontológia, na druhej strane, popisuje konkrétnu oblasť, ktorá má byť publikovaná na webe a jej modelovanie prostredníctvom tried a ich vzťahov. Tagovacia ontológia vychádza zo sociálneho označovania na webe a vytvára tak koncept aj pre doménovú oblasť a aj pre obecnú triedu Asset (Aktívum). Podobne sa dajú vytvárať aj všeobecné ontológie napr. pre účtovné prípady a môžu slúžiť ako vzory pre konkrétne domény. Ontologické modelovanie ponúka dve základné úrovne modelov (SVA2013)

- „Ontology foreground models“, kde patria konceptuálne modely adaptované pre logické odvodzovanie a konceptuálne modely pre riadenie dát.
- „Ontology backgrounds models“, ktoré ponúkajú detailný rozklad jednotlivých úloh na koncepty.

---

<sup>7</sup>Citácie na jednom mieste možno nájsť v (NIET 2003)

**Obr. 1:** Príklad ontologického modelovania publikovania konkrétnej domény na webovom dokumente



Zdroj: prevzaté z (REY2012)

Ontológie sú užitočným nástrojom, ktorého filozofia vychádza z reprezentácií poznatkov umelej inteligencie, ale nie je proaktívnym prvkom tvorby sémantických modelov, pretože sú istým spôsobom podriadené notácii RDF, XML a menným priestorom, nad ktorými pracujú. Sú ale užitočným prvkom, vnášajúcim sémantiku a zrozumiteľnosť do sémantického webu a jeho používania.

### 1.1.2 Modelovanie prostredníctvom webových služieb

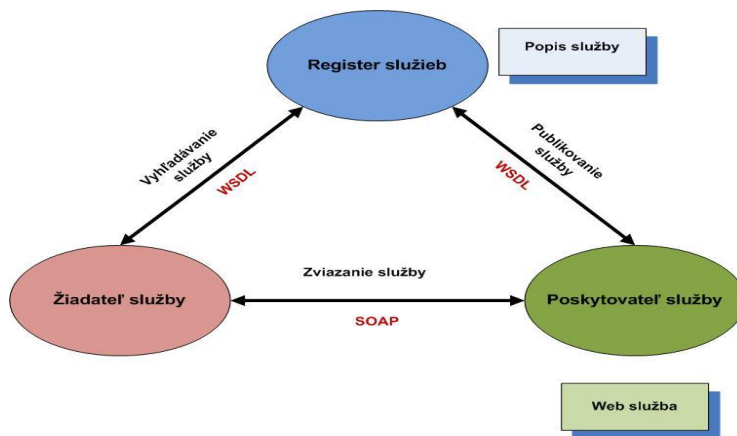
Modelovanie pomocou webových služieb má iný charakter než ontológie, ale koncepty medzi entitami a aj javmi navzájom sa dajú modelovať prostredníctvom tzv. orchestrácie a choreografie webových služieb.

Webové služby sú množina štandardov schopných podporiť integráciu („interoperable integration“) medzi heterogénnymi IT procesmi a systémami. Ide o webové aplikácie, ktoré sú celistvé, nezávislé a „self-describing“ (samopisujúce) a ktoré

poskytujú funkcionality pre všetky kategórie podnikových procesov. Webové služby sú teda nezávislé na technologických platformách a využívajú štandardy konzorcia W3C podobne ako ontológie. Webové služby volajú vzdialené procedúry (pomocou XML/RPC - Remote Procedure Call šablóna klient/server alebo SOAP) najčastejšie pomocou prenosu správ v jazyku XML cez protokol HTTP, pričom využívajú na definovanie typov dát štandardné XML schémy a na definovanie dát a mien operácií sa využívajú XML menné priestory („namespaces“) (W3C2014). Dajú sa využívať nielen pri servisne orientovanej architektúre (SOA), ale aj pri distribuovaných architektúrach. Technológiu prvotných webových služieb tvoria tri časti (IBM2002)

- protokol pre vzdialené volanie procedúr, zvaný SOAP (Simple Object Access Protocol)
- jazyk pre popis poskytovaných služieb, zvaný WSDL (Web Services Description Language) (rozhranie služby)
- mechanizmy pre nájdenie služieb, zvané UDDI (Universal Description, Discovery and Integration) a WSIL (web service specification for "discovery documents" developed in a joint effort by Microsoft and IBM).

**Obr.2:** Logický pohľad na web službu



Zdroj: Spracované na základe (IBM2002)

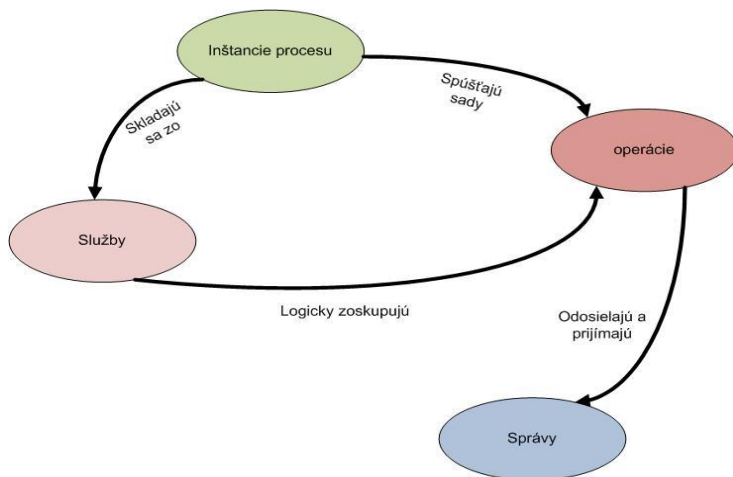
Na obrázku Obr. 2 je zachytený logický model webovej služby s príslušnými technológiami zabezpečujúcimi jednotlivé funkcie v rámci webovej služby (vyhľadanie, zviazania, publikovanie). Webové služby nie sú unifikované, a preto existuje pojem „Web service specification“ (WS-\*) (ERL2009), ktorý označuje rôznorodosť pri špecifikáciách asociovaných k jednotlivým webovým službám.

Využívanie webových služieb poskytuje možnosť tzv. servisnej orientácie aj pri budovaní IT architektúr v rámci organizácií. Servisne orientovaná architektúra nemá jednoznačnú definíciu, ale je postavená na vytvorení vrstvy služieb medzi aplikačnou vrstvou a vrstvou riadiacich procesov v informačných podnikových systémoch. Práve systém webových služieb poskytuje aj modulárny pohľad na logiku procesov (ERL2009). Základné logické časti systému webových služieb sú:

- správy SOAP (Simple Object Access Protocol), ktoré vytvárajú jednotky komunikácie
- operácie webových služieb, ktoré sa nazývajú jednotky práce
- služby, ktoré sú vlastne jednotkami spracovania logiky (kolekcie jednotiek práce)

Medzi operáciami, službami a správami je možné vidieť vzájomné vzťahy. Vzťahy určujú logiku práce a funkčný súvis, ktorý je vidieť na Obr. 3.

**Obr.3:** Súvis komponent SOA



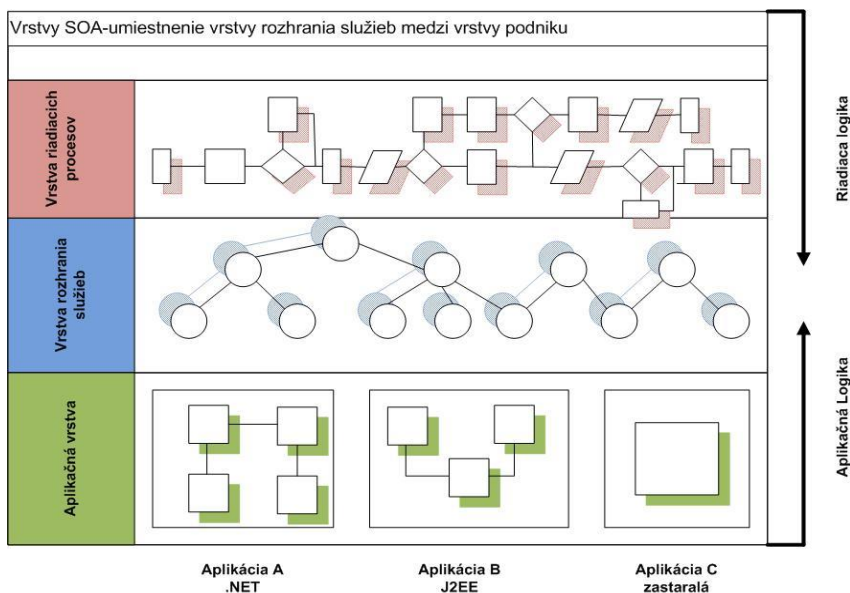
Zdroj: spracované podľa (ERL2009)

Prostredníctvom webových služieb sa dajú modelovať podnikové procesy na všetkých vrstvách SOA (vrstva riadenia procesov, vrstva rozhrania služieb, aplikačná vrstva), čím pokrývajú aj aplikačnú aj riadiacu logiku navrhovaného systému a vrstva služieb slúži ako medzičlánok na ich prepojenie. Obr.4 ukazuje tieto vzťahy v modelovaní aplikačnej a riadiacej logiky v podniku prostredníctvom SOA.



Výhodou servisne orientovanej architektúry je, že z pohľadu členenia na logické jednotky sú služby opätovne použiteľné, zdieľajú formálnu dohodu ohľadom interakcie, sú voľne viazané, abstrahujú logiku v pozadí, sú komponovateľné, autonómne, bezstavové a zisťiteľné (ERL2009). Všetky tieto vlastnosti webových služieb a SOA dávajú dobrý základ pre použitie v modelovaní znalostí, kde je potrebná znovupoužiteľnosť znalostí, jednoduché šírenie znalostí, jednoduché vytváranie nových modelov znalostí, ich kompozícia a možnosť ich ukladania.

**Obr.4 :** Umiestnenie vrstvy rozhrania služieb medzi vrstvami podniku, ktoré podporujú riadiacu a aplikačnú logiku



Zdroj: spracované podľa (ERL2009)

Tak ako bolo spomenuté, skladanie webových služieb určuje ich interaktivitu, teda určuje ich vzájomné vzťahy. V tomto ponímaní modelovanie konceptu znalostí je aj procesného (procedurálneho charakteru) a aj sémantického charakteru. Webové služby je možné skladat' pomocou rôznych štýlov spolupráce, pričom najvýznamnejšie sú (KNA2007)

- Orchestrácia. Orchestrácia je rôznymi autormi popisovaná z viacerých uhlov. Pre náš účel je najvhodnejší popis podľa Peltza „orchestrácia zahŕňa poradie vykonávania interakcií webových služieb, popisuje tok vykonateľného procesu a

---

môže zahŕňať ako interné, tak aj externé webové služby. Pri orchestrácii je proces vždy riadený jednou stranou. Interakcia pri orchestrácii nastáva na úrovni správ. Zahŕňajú biznis logiku, poradie vykonávania úloh a môžu pokryť aplikácie a organizovanie dlhotrvajúceho, transakčného a viacstupňového procesného modelu.<sup>8</sup> Teda orchestrácia nám popisuje procesný model v pozadí a popisuje komunikáciu služieb (a následnosť práce webových služieb). Prostredníctvom orchestrácie vytvárame syntax úlohy, ktorú riešime pomocou webových služieb.

- **Choreografia.** Choreografia popisuje interakcie, ktoré majú medzi sebou navzájom dve a viac aplikácií (pozostávajúcich zo služieb) pri dosahovaní spoločného cieľa a vzťahy medzi týmito interakciami. Logiku, ktorú vykonáva choreografia distribuuje poskytovateľ aplikačných služieb. Choreografia je viditeľná zo strany zákazníka a popisuje vonkajšie pozorovateľné správanie sa webových služieb. Choreografia poskytuje viditeľnú sémantiku úlohy riešenej webovými službami.

Hoci spôsoby riešenia úloh, ontológie a webové služby vychádzajú z úplne odlišných základov (myšlienka sémantického webu vs. procesné modelovanie) v praxi majú svoje nezastupiteľné miesto a ukazuje sa, že ich vzájomné dopĺňanie poskytuje dobré možnosti ako s nimi narábať aj pri znalostných úlohách v praxi. Každým z týchto spôsobov sa dajú modelovať znalostné procesy, ktoré sú potrebné pre manažérske rozhodovanie a sú postavené na heuristikách, odhadoch či skúsenostiach.

## 2 MANAŽÉRSKE ÚLOHY

Procesy riadenia podniku sa opierajú o rozhodovacie úlohy, pri ktorých sa často využívajú kvantitatívne metódy. Aj v kvantitatívnych metódach sú skryté poznatky a doplňujúce informácie potrebné na vyriešenie danej úlohy alebo dokončenie celého procesu. Tie však nie sú vždy a za každých okolností použiteľné, najmä v procesoch, ktoré vyžadujú odhady, kvalitatívne heuristiky, intuíciu a skúsenosti. Ide o procesy a úlohy, ktoré sú znalostne orientované a pri rýchlom rozhodovaní v strategickom, či taktickom manažmente sa dokonca v niektorých prípadoch ukazuje, že nie je možné použiť ani systémy na podporu rozhodovania a ani znalostné, či expertné systémy, ktoré nahradia rozhodovaciu činnosť človeka. Napriek tomu v mnohých prípadoch sa dajú použiť znalostné a automatizované systémy.

Podľa (SCHR2000) sa znalostné úlohy dajú klasifikovať do dvoch základných skupín. Ide o skupinu syntetických úloh Tab. 1 a skupinu analytických úloh Tab.2. Syntetické úlohy prevažne vychádzajú z dopredného reťazenia, a ich cieľom je

---

<sup>8</sup>Citácia z (KNA2007)

z jednotlivých komponent, faktov, konceptov, vlastností (napr. obmedzenia, preferencie) vytvoriť model.

**Tab. 1:** Prehľad syntetických typov úloh

Typ úlohy	Vstup	Výstup	Znalosti	Vlastnosti
<i>Navrhovanie</i>	Požiadavky	Opis artefaktu	Komponenty, obmedzenia, preferencie	Možnosť zahrnúť kreatívne navrhovanie komponentov
<i>Konfiguračné navrhovanie</i>	Požiadavky	Opis artefaktu	Komponenty, obmedzenia, preferencie	Podtyp navrhovania v ktorom sú všetky komponenty pred definované
<i>Priradovanie</i>	Dve sady objektov, požiadavky	Zobrazenie sada1 — sada2	Obmedzenia, preferencie	Zobrazenie má byť jednoduché
<i>Plánovanie</i>	Ciele, požiadavky	Akčný plán	Činnosti, obmedzenia, preferencie	Činnosti sú usporiadané v čase
<i>Rozvrhovanie</i>	Pracovné aktivity, zdroje, časový úsek, požiadavky	Rozvrh	Obmedzenia, preferencie	Časovo orientovaný charakter odlišný od priradovania
<i>Modelovanie</i>	Požiadavky	Vzor	Základné časti modelu, Šablóna modelu,	Možnosť zahrnúť kreatívne „syntézy“

Zdroj: preložené a spracované podľa (SCHR2000)

Analytické úlohy Tab.1 analyzujú vzniknutú situáciu, jav a na základe porovnávania atribútov, kritérií, noriem, vzorov správania sa systému a pod. hľadajú vhodné riešenie pre konkrétnu aktuálnu situáciu. Tab. 8 charakterizuje analytické úlohy. Klasifikácia znalostne orientovaných úloh v dvoch základných skupinách má vplyv na ďalšie modelovanie konkrétnej úlohy. Každá úloha má svoj inferenčný a doménový model (SCHR2000), ktoré následne určujú spolu s typom potrebných znalostí výber reprezentácie a riešenia

problému. Vždy ostáva otázkou, či pri modelovaní uprednostníme konceptuálny ontologický model alebo využijeme procesný model cez web služby. Oba princípy však dovoľujú modelovať nielen kvantitatívne vyjadriteľné ľudské poznanie, ale namodelovať spôsob uvažovania či postupy a procesy blízke ľudskej činnosti.

**Tab. 2** Prehľad analytických typov úloh

Typ úlohy	Vstup	Výstup	Znalosti	Vlastnosti
<i>Klasifikácia</i>	Vlastnosti objektu	Objektové triedy	Asociácia vlastnosť - trieda	Súbor tried je vopred deklarovateľný
<i>Diagnóza</i>	Príznaky/Sťažnosti	Chybná trieda	Model správania sa systému	Rozličné formy výstupu
<i>Hodnotenie</i>	Popis javu	Rozhodovacie triedy	Kritéria, normy	Hodnotenie je vykonané v konkrétnom čase
<i>Monitorovanie</i>	Systémové údaje	Nezrovnalosť tried	Obyčajné správanie systému	Systémy sa menia postupom času
<i>Predvídanie</i>	Systémové údaje	Stav systému	Model správania sa systému	Výstupom je popis systému niekedy v budúcnosti

Zdroj: preložené a spracované podľa (SCHR2000)

Napriek tomu, že v praxi sa stretávame skôr s úlohami, ktoré sú kombinované z hľadiska manažérskej praxe, narábajú aj s kvantitatívnymi aj s kvalitatívnymi heuristikami, kombinujú niekedy vzájomne analytické a syntetické úlohy (napr. priradovanie a rozvrhovanie) je zrejme, že vyššie uvedené možnosti modelovania poskytujú dostatočný priestor na výber vhodného modelovania manažérskych úloh.

---

## Záver

Tematika modelovania znalostných procesov, úloh a samotných znalostí je veľmi rozsiahla. Napriek tomu, že sa občas zdá, že je to téma, ktorá patrí do konca minulého storočia, opak je pravdou. V dnešnej dobe, kedy sú silné programovacie nástroje a v softvérovom inžinierstve prevládajú metódy agilného vývoja softvéru a v implementácii prevláda rapidne programovanie akoby do úzadia ustupovala práve analýza ako fáza tvorby softvéru. Pri znalostných projektoch, teda pri tvorbe znalostných a expertných systémov je práve časť analýzy doménovej oblasti a následne návrhu konceptov znalostí, expertíz, či kompetencií najdôležitejšou časťou projektu. Bez správnej analýzy a dobrého poznania možností modelovanie poznatkov na mikroúrovni (teda reprezentácie poznatkov a spôsobov narábania s nimi) alebo makroúrovni (analýza vzťahov v rámci podniku) nie je možné dosiahnuť kvalitný znalostný systém, ktorý v rámci podniku môže slúžiť nielen ako systém na podporu manažérskych činností, ale môže nahradiť aj rozhodnutia manažérov prostredníctvom automatizácie niektorých úloh (plánovania, predvídania, rozvrhovania, monitorovania a pod.). Tieto úlohy sa vyznačujú práve tým, že manažéri pri ich riešení využívajú tacitné znalosti (nevyslovené, skryté), ktoré sa nedajú kvantifikovať, pretože vychádzajú z pozorovaní a praktických skúseností. Navyše sú často iba vo forme „rules of the thumb“, teda pravidiel a vhodných rád, ktoré pochádzajú z praktických skúseností a nie z teórie. A to je dôvod, prečo je stále dôležité zaoberať sa aj kvalitatívnym typom modelovania znalostí.

Často aj na nové technológie, ktoré umožňujú modelovať a narábať s poznatkami rôzneho charakteru je dobré nazeráť ako na navzájom sa doplňujúce tak, ako píše Svátek a Vávra (SV\_VA2004) „Myšlienka sématického webu je zatiaľ stále skôr myšlienkou, preto je väčšia pozornosť venovaná zaisteniu syntaktickej a procesnej interoperability, ktorá môže priniesť praktické výsledky skôr. Ako zaujímavý postup v súčasnom stave, kedy nie je na obzore definitívne riešenie, sa javí kombinácia oboch, do istej miery komplementárnych vývojových vetiev, formou relatívne oddelených, kooperujúcich vrstiev.“

### **Kľúčové slová**

Poznatok, znalosť, modelovanie znalostí, ontológia, webová služba

### **Klasifikácia JEL**

O32

### **LITERATÚRA**

- [1] SCHREIBER, A. et al., *Knowledge Engineering and Management: the CommonKADS methodology*, ISBN 0-262-19300-0, 2000

- 
- [2] PIAČEK, J., KRAVČIK, M.: *FILIT 4.1*, Dostupné na (30.5.2016):  
<http://ii.fmph.uniba.sk/~filit/fvz/znalost.html>
- [3] KELEMEN, J., POPPER, M. *Expertné systémy*. 1988 Alfa, Bratislava. ISBN80-05-00051-0
- [4] AWAD, E.M., GHAZIRI, H.M., *Knowledge Management*. Pearson Education Inc., Prentice-Hall: 2004, ISBN 0-13-034820-1
- [5] BUREŠ, V., *Znalostní manažment a proces jeho zavádění*. Praha: Grada Publishing, 2007. ISBN 978-80-247-1978-8.
- [6] ERL, T.,: *Servisně orientovaná architektura*, Kompletní pruvodce, Computer Press, 2009, Brno, ISBN 978-80-251-1886-3
- [7] NIETO, M. A., M. *An Overview of Ontologies* , March 2003,  
Dostupné na: [http://www.starlab.vub.ac.be/teaching/ontologies\\_overview.pdf](http://www.starlab.vub.ac.be/teaching/ontologies_overview.pdf)  
(9.10.2009)
- [8] SVÁTEK, V., *Ontologie a WWW*. Dostupné na: <http://nb.vse.cz/~svatek/ontology-wwww.pdf> (5.5.2009)
- [9] IBM, *An overview of the Web Services Inspection Language*, Dostupné na:  
<https://www.ibm.com/developerworks/webservices/library/ws-wslover/>  
(15.9.2009)
- [10] NEGNEVITSKY, Michael (2005). *Artificial Intelligence: A Guide to Intelligent Systems*. Addison Wesley. ISBN 0-321-20466-2.
- [11] RUSSELL, Stuart J.; NORVIG, Peter (2003), *Artificial Intelligence: A Modern Approach* (2nd ed.), Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, ISBN 0-13-790395-2
- [12] SVÁTEK, V., *Reaktivní ontologické inženýrství*, Dostupné na (31.5.2016):  
<http://docplayer.cz/1368056-Reaktivni-ontologicke-inzenyrstvi-na-semantickem-webu.html>
- [13] KNAP, P. *Orchestrace a choreografie služeb*, Dostupné na (1.6.2016):  
[www.cssi.cz/cssi/system/files/all/00knap.pdf](http://www.cssi.cz/cssi/system/files/all/00knap.pdf)
- [14] SOWA, J.F., *Conceptual Graphs*. Dostupné na (1.6.2016):  
<http://www.jfsowa.com/cg/>
- [15] REYFIELD, J. „Sports Refresh: *Dynamic Semantic Publishing*, Dostupné (1.6.2016) na:  
[http://www.bbc.co.uk/blogs/bbcinternet/2012/04/sports\\_dynamic\\_semantic.html](http://www.bbc.co.uk/blogs/bbcinternet/2012/04/sports_dynamic_semantic.html)
- [16] RAKOVSKÁ, E., *Importance of domain ontologies in business informatics*, In *Trendy a inovácie v internetovej podpore podnikania a vzdelávania [elektronický zdroj]* Trends and innovations in e-business and education : proceedings : third international scientific videoconference of scientists and PhD. students or candidates, Bratislava: Vydavateľstvo EKONÓM, 2013. - ISBN 978-80-225-3769-8. - S. 36-41 CD-ROM

- 
- [17] SVÁTEK, V., VÁVRA, V., *Sémantická integrace webových služeb*, dostupné na (30.5.2016): <http://rainbow.vse.cz/si04fi.pdf>
- [18] RDF Schema 1.1, 25.2.2014, Dostupné na (30.5.2016): <https://www.w3.org/TR/rdf-schema/>
- [19] Threadwatch.org, Tags & Folksonomies - *What are they, and why should you care?* Dostupné na (30.5.2016): <http://www.threadwatch.org/node/1206>
- [20] KELEMEN, J., *Knowledge in Context*. Iura Edition, 2010. ISBN 978-80-807-8339-6

## RESUMÉ

Manažérske rozhodovacie úlohy sú často vnímané na Slovensku ako úlohy, pri ktorých je vhodné iba využitie klasických systémov na podporu rozhodovania. V praxi chýba povedomie využívania znalostných systémov ako systémov, ktoré môžu plne automatizovať niektoré úlohy alebo aj celé procesy, napriek tomu, že úlohy sú postavené na tacitných znalostiach, teda na takých poznatkoch a ich systémoch, ktoré sa dajú získať pozorovaním a skúsenosťou a nedajú sa kvantifikovať. Cieľom príspevku je ukázať podstatu modelovania znalostí a možnosti ich modelovania prostredníctvom dvoch zdanlivo odlišných prístupov-sémantického a procesného, pričom obidva prístupy sa navzájom môžu dopĺňať. V prvej časti príspevok analyzuje z informatického hľadiska, čo všetko sa z praktického hľadiska skrýva v pojmoch ako poznatok a znalosť a aké výhody a nevýhody poskytujú klasické reprezentácie poznatkov umelej inteligencie. V nadväznosti na tieto charakteristiky sa venuje ontologickému modelovaniu a modelovaniu prostredníctvom webových služieb, kde v oboch prípadoch je možné zachytiť ako aj syntax, tak aj sémantiku modelovaného javu, úlohy, procesu využívajúceho kvalitatívne heuristiky, odhady, skúsenosti či intuície ľudí.

## SUMMARY

Managerial decision tasks are often perceived in Slovakia as a tasks, where are used only appropriate conventional systems as Decision Support Systems. Here is an absence of awareness how to use Knowledge-based Systems for knowledge process automatization. Some of these tasks and processes are based not only on quantitative heuristics and measurable knowledge, but sometimes require the experience, observation and intuition. So they are based on qualitative heuristics and tacit knowledge. The aim of the article is to show the essence of knowledge modeling and the possibility of modeling by two seemingly diverse approaches - semantic approach and process approach. Both approaches can complement each other at modeling managerial processes and tasks. The first part of article analyzes all, what is hidden in terms as fact, information and knowledge from practical and informatic point of view. Then shows how to understand the advantages and disadvantages of classic Knowledge Representation of Artificial

Intelligence. Following these characteristics it is given to the ontological modeling and modeling through web services. In both cases can be captured as well as the syntax and semantics of the modeled phenomenon tasks process, which used qualitative heuristics estimates, experience and intuition of people.

### **Kontakt**

RNDr. Eva Rakovská, PhD. Katedra Aplikovanej Informatiky, Fakulta hospodárskej informatiky, Ekonomická Univerzita Bratislava, Dolnozemská cesta 1/b, 852 35 Bratislava, e-mail: rakovska@euba.sk



---

*Peter Schmidt*

## **BEZPEČNOSŤ A OCHRANA ÚDAJOV Z POHLĀDU CLOUD COMPUTINGU**

### **Úvod**

Bezpečnosť je pojem o ktorom si každý myslí, že vie čo to je. Ak sa však spýtame hocikoho na definíciu bezpečnosti spravidla odpoveď nie je jednoduchá, prípadne sa dotyčný snaží zovšeobecniť bezpečnostnú definíciu z jeho odbornosti. Táto situácia je zapríčinená hlavne tým, že definícií je pomerne veľa, ale všetky na vysvetlenie samotného pojmu využívajú opozitum bezpečnosti – hrozbu. Nakoľko apercpcia bezpečnosti je prítomná od začiatku histórie ľudstva, ide o pojem, ktorý sa interpretuje vždy „vzhľadom k niečomu“. Je logické, že si každá disciplína vytvorila svoj bezpečnostný pojem ako napr. „štátna bezpečnosť“, „bezpečnosť cestnej premávky“, „počítačová bezpečnosť“, „bezpečnosť a ochrana zdravia“ atď. Každý bezpečnostný pojem má svoju definíciu alebo definíciu podobnú charakteristiku, pričom sa často tieto definície ani len nepodobajú. [12].

Ako príklad, na ktorom si môžeme „bezpečnosť“ vysvetliť, si môžeme vybrať bežné pracovisko, ktoré tvorí komplexný systém so svojimi cieľmi. Na splnenie daných cieľov bola vytvorená organizačná štruktúra s príslušným kontrolným aparátom na všetky činnosti vykonávané na pracovisku. Takýto systém je bezpečný len vtedy, ak je schopný cez svoje vstupy a výstupy spolupracovať s okolitým svetom. Vo vnútri tohto systému, funguje podsystem, siahajúci až na najnižšiu úroveň, ktorý pracuje konsolidovane a vyrovnané. V prípade porúch sa aktivujú bezpečnostné protokoly ktoré zabránia vzniku väčších škôd.

Tieto všeobecné zásady by sme mali akceptovať vo všetkých sférach nášho života, či už sme doma, na ulici, alebo práve športujeme v parku. Prevažná väčšina ľudí si vôbec neuvedomuje, že najčastejšie úrazy, ktoré končia zranením sa udejú v domácnostiach alebo pri rôznych aktivitách vo voľnom čase. Je to hlavne preto, že médiá chrlia správy o nehodách a rôznych násilnostiach, čím u ľudí vytvárajú falošný pocit bezpečia v domácom prostredí. Stačí sa len spýtať ľudí, ktorí si dali namontovať bezpečnostné dvere, z akej pohnútky tak urobili. Najčastejší dôvod je samozrejme ten, že boli vykradnutí, prípadne k ich známym sa vlámali.

Kedy si používatelia PC kúpia antivírusový program? Až po tom, čo po vážnej infekcii prišli o údaje.

Kedy si používatelia PC začnú archivovať údaje? Až po tom, čo po zlyhaní pevného disku prišli o všetky údaje.

Kedy sa vedenie spoločnosti začne zaujímať o počítačovú bezpečnosť? Až keď im nejaký „hacker“ ukradol citlivé informácie z nezabezpečenej infraštruktúry.

---

Podobných otázok by sme ešte vedeli napísať veľa, ale na všetky by boli odpovede, ktoré sa vyznačujú tým, že akcia, ktorá sa má vykonať je už vlastne reakcia na nejakú mimoriadnu situáciu. Preto nezaškodí upozorniť na stále hroziace nebezpečenstvo a upriamiť pohľad na už známe, avšak často nepochopené pojmy.

## 1 OCHRANA ÚDAJOV

Pod ochranou údajov rozumieme zabránenie neoprávnenému prístupu k údajom súkromného, komerčného a nekomerčného charakteru, ako aj k údajom, ktoré podliehajú určitému stupňu utajenia podľa zákona.<sup>1</sup> Tieto údaje však pre oprávnené osoby musia byť, po úspešnej autorizácii a autentifikácii, vždy prístupné.

Na ochranu údajov sa používajú viaceré mechanizmy ako napríklad:

- Systém prístupových oprávnení a správne pridelenie konkrétnych oprávnení jednotlivým osobám.
- Systém kontroly prístupov v reálnom čase.
- Systém evidencie prístupov na základe kontroly prístupov.
- Zabezpečenie spoľahlivej prevádzky systému pri zachovaní integrity a konzistencie údajov.
- Zabezpečenie systematického, pravidelného zálohovania údajov.
- Implementácia kontrolného mechanizmu na včasné odhalenie softvérových a hardvérových porúch a útokov.
- Systém na rýchlu diagnostiku poškodených údajov a ich okamžité obnovenie zo zálohy.

Pri tvorbe systému ochrany údajov je vhodné vytvoriť viacúrovňovú štruktúru v závislosti od charakteru údajov. Takto sa dajú vytvoriť kategórie, ktoré budú obsahovať informácie súkromného či finančného charakteru, alebo sa dá zvoliť kritérium podľa NBÚ (Národný bezpečnostný úrad) kde sa údaje rozdeľujú do troch kategórií a to na dôverné, tajné a prísne tajné. Všetky údaje ktoré podliehajú ochrane sa musia riadiť zákonom č. 428/2002 Z. z. o ochrane osobných údajov, ako vyplýva zo zmien a doplnení vykonaných zákonom č. 602/2003 Z. z., zákonom č. 576/2004 Z. z. a zákonom č. 90/2005 Z. z.

Základ ochrany údajov spočíva v jednoznačnom vymedzení a definovaní oprávnení používateľov a ich jednoznačnom identifikovaní v procese prístupovania k údajom.

V podnikových informačných systémoch sú spravidla všetky počítače pripojené do lokálnej siete, kde sú údaje umiestnené na jednom alebo viacerých serveroch, ktoré obhospodarujú prichádzajúce požiadavky, v závislosti od oprávnení používateľa. Preto je dôležité, aby v podnikovom prostredí boli oprávnenia všetkých používateľov jednoznačne stanovené.

---

<sup>1</sup> Zákon č. 215/2004 Z. z. o ochrane utajovaných skutočností

Silným nástupom mobilných zariadení ako sú notebooky, netbooky, tablety či smartphony [4]. sa otvárajú nové možnosti na uchovávanie a prenos údajov, čo zároveň prináša aj ďalšie bezpečnostné riziká. Aj keď ich prínos v oblasti dostupnosti údajov je nesporný, zvýšené riziko najmä v dôsledku straty, alebo odcudzenia je neúmerne veľké. Pri používaní mobilných zariadení má politika správy údajov ešte väčší význam. Na všetky údaje, ktoré sa nachádzajú na pamäťovom médiu prenosného zariadenia sa musíme dívať ako potenciálne ľahko odcudziteľné a preto by sa na prenosných zariadeniach nemali nachádzať údaje, ktoré sú potenciálne zneužitelné a už vôbec nie také, ktoré by sme podľa zákona kvalifikovali ako tajné či prísne tajné.

## 2 BEZPEČNOSŤ ÚDAJOV

Bezpečnostné a ochranné aspekty musia tvoriť jednotný usporiadaný celok [2]. Každá organizácia, ktorá chce podstatne zvýšiť svoju informačnú bezpečnosť, si musí vytvoriť adekvátny názor na svoje informačné aktíva, zhodnotiť ich význam a zaujať postoj k ich ochrane. Aktíva z bezpečnostného pohľadu sa často delia na hardvérové, softvérové a know-how. Kvalitatívnym ohodnotením aktív sa určuje cena, alebo hodnota konkrétneho aktíva, pričom sa často používa aj hodnotenie vyjadrujúce možný dopad na organizáciu, napr.:

1. Žiadny vplyv na organizáciu.
2. Zanedbateľný vplyv na organizáciu.
3. Problémy či finančné straty.
4. Vážne problémy alebo významná finančná strata.
5. Existenčné problémy organizácie.

V tomto duchu je nutné navrhovať aj riešenie bezpečnosti údajov. Bezpečnosť údajov ovplyvňujú faktory ako je dôsledná identifikácia, autentifikácia a autorizácia používateľov. Rovnako dôležité je zabezpečenie dôveryhodnosti používaných dokumentov, čiže musí byť implementovaný mechanizmus zaisťujúci originalitu dokumentu.

Ďalším kľúčovým bodom pri práci s údajmi, najmä vo forme dokumentov, je ich prenos prostredníctvom komunikačných médií. Bežne vo svete sa používa na zabezpečenie takejto komunikácie asymetrické šifrovanie, ale to zatiaľ nie je na Slovensku veľmi rozšírené. Dokonca aj posielanie zaheslovaných dokumentov je len zriedkavé a to máme na mysli hlavne štátnu správu. Rovnako dôležité je myslieť aj na dokumenty, ktoré sa neposielajú, len sa nachádzajú na samotnom počítači či serveri. Ich bezpečnosť sa najčastejšie rieši firewallmi, čo nemusí byť dostačujúce.

Heslá sú samostatnou bezpečnostnou kategóriou. Spravidla platí, že sa buď neuplatňujú, alebo ak áno, tak nedôsledne. Pri správe hesiel, by sa mali dodržiavať určité pravidlá. Najmä pri prihlasovaní k určitej službe je to veľmi dôležité. Správa hesiel by mala byť jednotná a mala by požadovať splnenie určitých kritérií, ako napr. minimálnu dĺžku hesla, využitie rôznych alfanumerických znakov, dĺžku životnosti hesla či počet pokusov o prístup.

Bezpečnostné riziko predstavuje aj samotná neznalosť základných pojmov, resp. ich obsahovej náplne. Rôzni autori definujú pojmy rôzne a veľmi často sa stretávame s definíciami, ktoré vychádzajú z prvopočiatkov výpočtovej techniky. Uvedieme niekoľko príkladov definícií, ktoré by mali vyhovovať súčasnej dobe.

### **Integrita**

Integrita sa spravidla používa v spojení s informáciami, údajmi či programami na popísanie ich celistvosti a neporušenosti. Pod integritou údajov rozumieme fakt, že sa údaje nemôžu modifikovať bez zásahu oprávnenej osoby, či už osobne, alebo prostredníctvom softvérových nástrojov. V žiadnom prípade nesmie dôjsť k samovoľnej zmene týchto údajov. Toto základné bezpečnostné riziko sa týka aj spracovateľských programov, nakoľko porušenie integrity spracovateľského programu nemusí mať za následok viditeľnú nefunkčnosť, len nekorektne spracované údaje. Takúto nepríjemnú činnosť vykonávajú obvykle vírusy. Korektné údaje sú tie, ktoré majú zachovanú integritu, celistvosť a neporušenosť a správne popisujú skutkový stav.

### **Vírusy a iný potenciálne nebezpečný kód**

Sú také programy či kódy, ktoré boli vyvinuté ilegálne za účelom poškodenia čo najväčšieho množstva používateľov. Dokážu sa šíriť bez vedomia používateľa. Aby sa mohol vírus rozmnožovať, vkladá kópie svojho kódu do iných spustiteľných súborov alebo dokumentov. Nakoľko tieto programy svojím mechanizmom šírenia pripomínajú biologické vírusy, dostali po nich aj pomenovanie. Vírusy sa môžu rozmnožovať v rámci jedného počítača, ale prostredníctvom siete aj medzi viacerými počítačmi. Dávnejšie sa prenášali len pamäťovými médiami disketami, CD, v súčasnosti sa väčšina prenáša internetom a len malé percento USB pamäťovými médiami. Rozlišujeme niekoľko druhov počítačových vírusov: [11]

- vírusy
- červy (internetové, e-mailové)
- trójske kone
- n-árne infiltrácie
- trpaslíci
- škriatkovia
- bomby a míny
- špióni (spyware)
- vydieračské kódy (ransomware)
- kombinácia prostriedkov

Toto vymenovanie samozrejme nie je konečné ani kompletné, lebo sa stále vymýšľajú nové a nové spôsoby napadnutia a šírenia škodlivého kódu. V súčasnosti možno už nie vírusy tvoria najväčší problém, ale iný škodlivý softvér - malvér (ang. malware), pomocou ktorého sa dajú vykonávať na napadnutom počítači rôzne činnosti, od otravných spúšťaní reklám advérom (ang. adware), hijackermi, hoaxmi, až po krádež osobných údajov phishingom, či vybielenie

bankového účtu pharmingom.<sup>2</sup> Aby sa zabránilo a predišlo škodám spôsobeným škodlivým softvérom, je nutné dodržiavať nasledovné postupy:

- nepoužívať cudzie, neznáme pamäťové médiá,
- neotvárať neočakávané a podozrivé e-mails,
- pravidelne zálohovať údaje,
- USB kľúče vždy pred načítaním skontrolovať antivírusom,
- používať rezidentný antivírus,
- používať legálne, originálny software.

Nepodceňovanie vírusovej a malvérovej infiltrácie je asi najmocnejším nástrojom proti tejto bezpečnostnej hrozbe.

Počítačová bezpečnosť je oblasť informatiky, ktorá sa zaoberá odhaľovaním a eliminovaním bezpečnostných rizík spojených s používaním počítača a počítačovej siete. Cieľom počítačovej bezpečnosti je prostredníctvom nastavenia bezpečnostných politík zabezpečiť:

- ochranu pred neoprávneným manipulovaním so zariadeniami počítačového systému,
- ochranu pred neoprávnenou manipuláciou s údajmi,
- ochranu pred nelegálnou tvorbou kópií údajov,
- bezpečnú komunikáciu a prenos údajov,
- bezpečné uloženie údajov,
- integritu, neporušenosť a celistvosť údajov.

Koncepcia počítačovej bezpečnosti spočíva v troch krokoch:

1. **prevencia** - ochrana pred bezpečnostnými hrozbami,
2. **detekcia** - odhalenie neoprávnenej činnosti a slabých miest v systéme,
3. **náprava** - odstránenie slabých miest v systéme.

Vyššie spomenuté bezpečnostné riziká sa týkali viac-menej softvérovej bezpečnosti, aj keď je zrejmé, že softvérová a hardvérová bezpečnosť sa musia vnímať spoločne. Hardvérovú bezpečnosť by sme mohli rozdeliť do dvoch základných skupín a to:

- ochrana údajov pred stratou v dôsledku zlyhania hardvérových prostriedkov,
- ochrana pred odcudzením hardvérových prostriedkov,
- ochrana komunikačných liniek pred poškodením.

Strata údajov v dôsledku zlyhania hardvérových prostriedkov už v súčasnosti nepatrí medzi najväčšie riziká. Pozitívny vývoj situácie v tejto oblasti majú na svedomí ľahko dostupné vysokokapacitné pamäťové médiá, ktorých integrácia do počítačového systému nepredstavuje veľkú finančnú záťaž. Máme na mysli

---

<sup>2</sup> Phishingom sa rozumie podvodné vylákavanie citlivých informácií od používateľa, podstrčením falošnej webstránky. Ak sa použije pri internetbankingu tak hovoríme o pharmingu.

riešenia, ako je zrkadlenie diskov, zdvojenie diskov či tvorba RAID<sup>3</sup> polí. Samozrejme aj v tejto oblasti existujú nákladné riešenia ako je klastering<sup>4</sup>, či realizácia distribuovaného systému. Druhá cesta je využitie stále viac rozšírených cloudových riešení.

### 3 CLOUD COMPUTING A BEZPEČNOSŤ

Cloud computing (CC) patrí medzi technológie, ktoré sa už pravidelne využívajú. Nakoľko podstata cloudu spočíva v distribúcii zdrojov a dát, pričom ich konkrétne umiestnenie je pred používateľom skryté, veľa používateľov má obavy práve z pohľadu bezpečnosti. Používatelia, ktorí chcú mať plnú kontrolu nad svojimi dátami sa pre cloud rozhodujú ťažšie, práve preto, že nevedia, kde konkrétne sú ich dáta v rámci cloudu uložené a či sú patrične zabezpečené [13]. V niektorých oblastiach je však bezpečnosť údajov lepšie zabezpečená, ako v prípade tradičného spôsobu. [1]. Pre hackera je jednoduchšie dostať sa na lokálny počítač, ako na server veľkej spoločnosti (Amazon, Google, ...), ale aj v cloude existujú vážne bezpečnostné riziká spojené s nedodržiavaním zákonov, dostupnosťou či integritou dát. Je naozaj potrebné zvyšovať odolnosť proti zlyhaniu. Jedným z problémov býva, že zákazník nemá tušenie ani skoro žiadnu kontrolu nad tým, kde sa jeho údaje nachádzajú (v akej krajine, v ktorom dátovom centre, ...). V prípade citlivých informácií je dôležité, aby neboli premiešané s ostatnými, cudzími údajmi, ako je to na zdieľaných serveroch. Veľmi vážnym problémom, ktorý môže nastať, je ak sa na jednom fyzickom serveri okrem našich údajov (a stoviek ďalších) nachádzajú aj údaje súvisiacou s trestnou činnosťou, v dôsledku čoho môže dôjsť k zadržaniu servera orgánmi činnými v trestnom konaní. K takýmto prípadom dochádza pomerne často pri serveroch umiestnených na území USA. Takáto situácia môže nastať v prípade porušenia zákonov, podozrenia z porušovania autorských práv, prípadne podozrenia zo šírenia nelegálneho obsahu. Fungovanie cloudu vďaka distribúcii údajov nebýva ovplyvnené, avšak údaje sa dostanú k analytikom a ďalej sa spracovávajú, a citlivé informácie sa môžu objaviť vo vyšetrovacích spisoch, alebo sa môžu dostať aj do nepovolaných rúk. Zákon totiž nemôže chrániť údaje na cloude umiestnené na inom kontinente tak, ako v prípade cloudu umiestneného na Slovensku. Pravdou však ostáva, že ak sa vzdajú spoločnosti určitej kontroly nad svojimi údajmi, môžu výmenou za to získať omnoho hospodárnejšie náklady a tým sa stanú konkurencieschopnejší [9].

Aj keď je na pohľad tradičný spôsob bezpečnejší, nie je tomu vždy tak. Hlavným zdrojom úniku informácií, či porušenia bezpečnosti bývajú práve zamestnanci a používatelia počítačov. Toto ohrozuje hlavne tradičný spôsob

---

<sup>3</sup> RAID je skratka pre označenie redundantného ukladania údajov na viac nezávislých diskov

<sup>4</sup> Klaster (ang. Cluster) je skupina voľne viazaných a navzájom spolupracujúcich rovnakých počítačov.

---

poskytovania služieb. „Hoci veľké podniky sa zatiaľ nemôžu spoliehať na zabezpečenie implementované priamo v cloud computingu, malé spoločnosti môžu vďaka CC získať lepšiu ochranu.“ [5]. V prípade, že je kritická chyba v systéme (aplikácii), je jednoduchšie a rýchlejšie jej odstránenie v cloudovom riešení, ako v tradičnom. Technik aktualizáciou opraví chybu u všetkých zákazníkov naraz a v krátkom čase, kým pri tradičnom spôsobe musí technik aktualizovať aplikáciu na každom počítači.

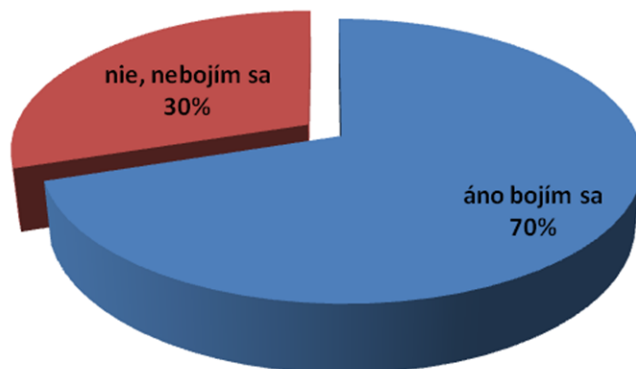
### 3.1 Mikroanketa

Cloud computing patrí medzi tie technológie, ktorých masívny rozmach sa očakáva v najbližších rokoch. Preto sme boli zvedaví na akceptáciu CC u mladých informatikov v zrkadle bezpečnostných rizík s ním spojených. Opýtali sme sa 100 študentov informatiky na druhom stupni VŠ štúdia na ich postoje ohľadne bezpečnosti na cloude.

Táto mikroanketa nemala za cieľ monitorovať názory mladej generácie na CC, ale poukázať na názory takých mladých ľudí, ktorých informatické znalosti sú hlbšie než je priemer. Ich postoje sú vyjadrené v nasledujúcich grafoch.

V prvej otázke sme boli zvedaví, ako respondenti pristupujú k poskytovaniu súkromných dát tretím stranám. Z obr. 1 je evidentné, že pri poskytovaní súkromných dát majú obavy, z čoho by sme mohli predpokladať, že budú aj opatrnejší a zväžia bezpečnostné riziká.

#### Zverenie súkromných dát tretej strane



**Obr. 1:** Zverenie súkromných údajov tretej strane

V druhej otázke nás zaujímali názory respondentov na bezpečnosť úložiska. Výsledok bol prekvapujúci a svedčil o nedôvere ku cloudovým riešeniam. Len 11% respondentov si myslí, že úložisko dátového centra je

bezpečnejšie než vlastné pamäťové médium. Pri tejto otázke by možno bolo zaujímavé zistiť, koľko respondentov už stratilo svoj USB kľúč.

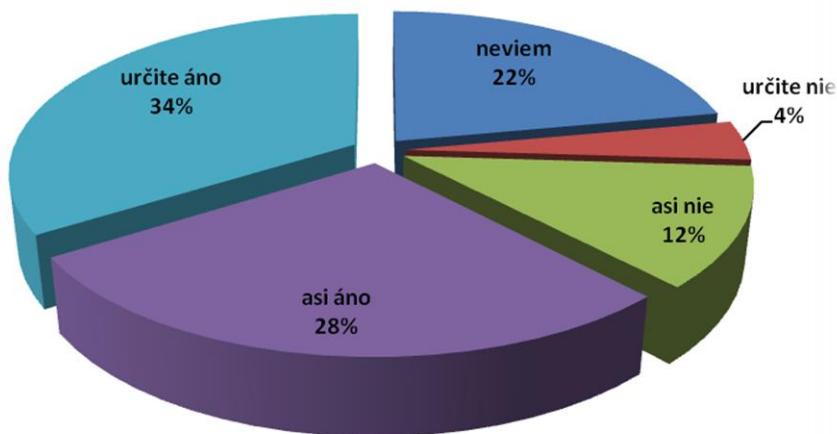


**Obr. 2:** Názory na bezpečnosť interného a externého úložiska

Pri tretej otázke už bol rozptýl názorov väčší, čo vidno aj z posledného grafu. Viac ako polovica opýtaných (62%) si myslí, že problémy s bezpečnosťou cloudových riešení je prekážkou pri nasadzovaní CC do praxe.



### Bezpečnosť CC je prekážkou pri jeho nasadzovaní ?



**Obr. 3:** Bezpečnosť ako bariéra pri nasadzovaní CC

Z uvedených grafov je evidentné, že mladí ľudia so znalosťami v oblasti informatiky, nepodceňujú možné bezpečnostné riziká pri využívaní cloudu, ak sú si vedomí, že cloud využívajú. Ich obavy z hľadiska technického zabezpečenia asi nie sú oprávnené, avšak z hľadiska možnosti úniku informácií sú pochopiteľné. Preto sa väčšina používateľov snaží uchovávať svoje údaje na lokálnych pamäťových médiách, čo pri nemalom počte stratených USB kľúčov asi nebude najlepšie riešenie. V prípade informácií zdieľaných na sociálnych sieťach by sme pravdepodobne dostali iné výsledky, nakoľko si používatelia vôbec neuvedomujú, že používajú cloudové riešenia.

## 4 ÚNIK INFORMÁCIÍ

Za posledné roky nastal pozitívny posun aj vo fyzickom zabezpečení serverových prostriedkov. Organizácie vynakladajú značné prostriedky na zabezpečenie vlastnej hardvérovej infraštruktúry. Ide hlavne o fyzickú bezpečnosť serverov organizácie, jednoznačným vyšpecifikovaním prístupových oprávnení k fyzickým prostriedkom a nepodceňovanie bezpečnostných rizík. Na druhej strane, už spomínaným mohutným nástupom mobilných zariadení, ktoré sú schopné uchovávať veľké množstvá údajov, fyzické odcudzenie servera už zďaleka nie je tak lákavé, ako odcudzenie samotných údajov na mobilnom zariadení. Máme na mysli údaje, ktoré sú dostupné aj zamestnancom na nižšom stupni hierarchického rebríčka organizácie, pritom pre organizáciu môžu mať strategický význam. Aj na Slovensku rezonovali aféry týkajúce sa úniku a

zverejnenia určitých informácií, ktoré sa týkali utajovaných skutočností, napr. z prostredia vojenského spravodajstva.

V oblasti priemyselnej výroby najmä v čase krízy rastie snaha o získanie určitých výhod aj nekalým spôsobom a rastie tak počet pokusov o odcudzenie informácií od konkurenčných spoločností. Tu si však treba uvedomiť jeden závažný fakt a to je ľudský faktor. Takmer všetky úniky informácií, ktoré sa vykonali fyzickým prenosom informácií na mobilné pamäťové médium, majú na svedomí vlastní zamestnanci organizácie. Na toto bezpečnostné riziko sa organizácia zameria až po prvom úniku informácií, pričom vzniknuté škody sú neporovnateľne vyššie ako náklady, ktoré by zabezpečili spokojnosť a lojalitu zamestnanca. Táto hrozba patrí medzi najväčšie, nakoľko k úniku informácií môže dôjsť aj keď sa využíva špičkový, dobre navrhnutý a zrealizovaný bezpečnostný systém. Nezanedbateľným bezpečnostným rizikom je zdieľanie fyzických úložísk viacerými subjektmi, pričom niektoré subjekty využívajú tieto systémy na nezákonnú činnosť. Odhalením tejto činnosti a následným konaním príslušných orgánov sa môžu stať naše údaje nechránené vo fyzickom aj právnom zmysle slova.

## Záver

Otázka informačnej bezpečnosti vyžaduje systémový prístup a nie „látanie bezpečnostných dier“ po incidente. Budovanie a certifikovanie systémov riadenia informačnej bezpečnosti v posledných rokoch dosiahol medzinárodné rozmery. Dôkazom je skutočnosť, že britský štandard BS 7799 [7] (uvedený ešte v roku 1995) bol s malými úpravami prevzatý do sústavy štandardov ISO/IEC. Systém manažmentu informačnej bezpečnosti, známy ako SMIB, je podľa BS 7799 časť celkového systému riadenia, založená na prístupe k rizikám organizácie, ktorej úlohou je implementovať, prevádzkovať, monitorovať, revidovať, udržiavať a zlepšovať informačnú bezpečnosť. Vo svetovom meradle je budovanie a certifikácia SMIB podľa ISO/IEC 17799 [8] bežnou vecou, avšak na Slovensku sa aj po rokoch stále len rozbíha. Celosvetovo uznávaných štandardov určených na budovanie systému riadenia bezpečnosti nie je veľa. Medzi najrozšírenejšie patrí ISO / IEC 27001 - Information Security Management Systems známy ako ISMS. Účelom tejto medzinárodnej normy je poskytovanie podpory pre vytvorenie, implementáciu, prevádzkovanie, monitorovanie, udržiavanie a zlepšovanie systému riadenia informačnej bezpečnosti, podobne ako pri SMIB. Odborníci na bezpečnosť už dlho vedia, že nestačí systém len zaviesť, ale sa oň treba neustále starať, rozvíjať a aktualizovať, aby bol pripravený na stále narastajúci počet bezpečnostných incidentov. V roku 2005 bol uvedený do platnosti štandard, zahŕňajúci tie najaktuálnejšie poznatky z oblasti komplexnej informačnej bezpečnosti - ISO 27001, ktorý je postavený na základoch BS 7799/ISO 17799. Jedným z najčastejšie používaným modelom v rámci ISMS je model PDCA. Je to skratka vytvorená zo začiatkových písmen slov Plan, Do, Check a Act, čiže plánuj, urob, kontroluj a konaj. Keďže ide o kontinuálny systém

riadenia informačnej bezpečnosti v organizácii, jednotlivé kroky zaručujú, že zavedenie systému nebude len jednorazovou činnosťou, ale súvislým kolobehom. Norma jasne popisuje, postup pri zavádzaní ISMS a taxatívne nariaďuje, ktoré ciele a bezpečnostné opatrenia musia byť dosiahnuté.

Niektoré organizácie majú dobre zvládnutú infraštruktúru informačnej bezpečnosti, avšak založenú zväčša na subjektive prístupov, úloh a zodpovedností. Organizáciám na Slovensku taktiež často chýba dostatočná motivácia, ktorá by posunula realizáciu informačnej bezpečnosti o krok vpred smerom k hierarchickému manažérskemu prístupu, čoho dôsledkom je „oneskorenie“ o 4 až 6 rokov oproti krajinám EÚ.

Organizácií, ktoré sa venujú ochrane a bezpečnosti informácií je veľa a priestor malý, preto spomenieme len jednu. Spoločnosť HP je jedným z lídrov v tomto segmente, o čom svedčí aj to, že rozšírila svoje portfólio bezpečnostných riešení, ktoré organizáciám umožňuje spravovať, transformovať a optimalizovať svoje bezpečnostné procesy a využívať ich proaktívnu ochranu [10]. Iniciatívy v oblasti cloudu, mobilných technológií a spravovania objemných dát pomáhajú organizáciám s riešením stále väčších technologických problémov. Súčasne pritom urýchľujú „adaptáciu“ týchto noviniek v ich IT prostrediach. Ponúkajú väčší priestor pre inovácie, rozšírené možnosti správy IT infraštruktúry a optimalizujú náklady.

Žiaľ, môžu vzniknúť aj bezpečnostné komplikácie týkajúce sa nesprávneho pochopenia bezpečnosti cloudových služieb a ťažkosti so správou objemných dát. Bežné reaktívne možnosti ochrany dát však v súčasnosti už zďaleka nestačia. Organizácie potrebujú inteligentné proaktívne technológie, ktoré spoja tradičné i hybridné modely poskytovania služieb a zároveň vyriešia nové problémy v IT sfére. Organizácie, ktoré pôsobia vo verejnom sektore, musia neustále „bojovať“ s rastúcim množstvom bezpečnostných hrozieb, stále zložitejšími nariadeniami a znižujúcimi sa rozpočtami. Vďaka riešeniu HP Security for Public Sector, ktoré združuje všetky dôležité bezpečnostné služby HP, môžu tieto organizácie dosiahnuť splnenie všetkých svojich náročných štandardov oveľa ľahšie.

Nakoľko je oblasť bezpečnosti a ochrany veľmi široká, nie je možné sa venovať na takomto malom priestore všetkým bezpečnostným rizikám. Snažili sme sa skôr poukázať na fakt, že inštalácia antivírusu a firewallu, z hľadiska bezpečnosti nie je zďaleka dostačujúce riešenie, ak nechceme prísť o svoje údaje. Uvedomenie si podstaty základných pojmov môže značne pomôcť v pochopení podstaty pojmov bezpečnosť a ochrana dát.

### **Kľúčové slová**

bezpečnosť, ochrana, Cloud computing, ISMS, SMIB

### **Klasifikácia JEL**

K22

---

## LITERATÚRA

- [1] SCHMIDT, P; KULTAN, J. 2012. Cloud computing v miestnej samospráve, In Ekonomické aspekty v územnej samospráve II [elektronický zdroj] : recenzovaný zborník príspevkov z vedeckej korešpondenčnej konferencie : Košice 2012, ISBN 978-80-7097-932-7. - S. 159-167.
- [2] KALUŽA F.: Manažérsky prístup v riešení informačnej bezpečnosti firmy. Security Revue - ISSN 1336-9717, [online]. [cit. 2012-25-09] <http://www.securityrevue.com/article/2006/06/manazersky-pristup-v-rieseni-informacnej-bezpecnosti-firmy/>
- [3] KRISTOVÁ, G., LÉVARDY, F. 1998. Bezpečnosť v elektronickom obchode. In Transformácia ekonomiky skúsenosti Slovenska a ďalších krajín Strednej Európy : medzinárodná vedecká konferencia, Bratislava 14.-16. 5. 1998. - Bratislava : Ekonóm, 1998. - ISBN 80-225-0991-4. - S. 186-189
- [4] KRAUSPE, K., PITTNER, J., SCHMIDT, P.. Apple data security and data theft, In Trends and Innovation in E-business, Education and Security = Zborník z konferencie, dňa 19.11.2014 : Proceedings, dňa 19.11.2014 / recenzenti: Miroslav Hudec, Jaroslav Kultán. - Bratislava : Ekonomická univerzita v Bratislave, 2014. - ISBN 978-80-225-3987-6. - pp. 60-67 CD-ROM.
- [5] SCHWARTZ, EPHRAIM: Cloud computing skrýva rad nebezpečenstiev. [online]. [cit. 2012-28-09] <http://www.itnews.sk/spravy/bezpecnost/2009-07-29/c123308-cloud-computing-skrывa-rad-nebezpecenstiev>
- [6] Zákon o ochrane osobných údajov č. 428/2002 Z. z.
- [7] BS 7799:2002: Britský štandard: Systémy riadenia informačnej bezpečnosti – Špecifikácia s radami na použitie
- [8] BS ISO/IEC 17799: 2000: Britský štandard: Informačné technológie – Kódex praxe riadenia informačnej bezpečnosti
- [9] EURACTIV : Cloud computing: Právny hľadisk pre EÚ (aktualizácia: 12.04.2011).[online]. [cit. 2012-18-09] [http://www.euractiv.sk/rozsirovanie/zoznam\\_liniek/cloud-computing-pravny-hlavolam-pre-eu-000279](http://www.euractiv.sk/rozsirovanie/zoznam_liniek/cloud-computing-pravny-hlavolam-pre-eu-000279)
- [10] Web stránka spoločnosti HP <http://www8.hp.com/us/en/hp-news/press-kit.htm>
- [11] Web stránka spoločnosti Kaspersky <http://usa.kaspersky.com/internet-security-center/threats/>
- [12] SZABO, L. 2012. WHAT IS THE SAFETY?, In Trendy a inovácie v internetovej podpore podnikania a vzdelávania. Medzinárodná vedecká internetová videokonferencia vedeckých pracovníkov a doktorandov. *Trendy a inovácie v internetovej podpore podnikania a vzdelávania : recenzovaný zborník [príspevkov] : II. medzinárodná vedecká internetová videokonferencia vedeckých pracovníkov a doktorandov : 7. november 2012, [virtuálne EU Bratislava]* [elektronický zdroj]. Zostavili Gabriela

Kristová, Peter Schmidt, Janette Brixová, Ján Pittner. [Bratislava : Vydavateľstvo EKONÓM, 2012]. CD-ROM [80 s.]. ISBN 978-80-225-3553-3.

- [13] SCHMIDT, P., RUBÓCZKI, E. 2016. Implementácia cloudových služieb v podnikovom prostredí z hľadiska bezpečnosti. In International scientific days 2016. The agri-food value chain: challenges for natural resources management and society : conference proceeding of reviewed articles : May 19-20, 2016 Nitra, Slovak Republic / Reviewers: Izabela Adamičková, Natália Turčeková. - Nitra : Slovak university of agriculture, 2016. - ISBN 978-80-552-1505-1. - S. 216-222.

## RESUMÉ

Cieľom tohto príspevku je poukázať na problematiku bezpečnosti a ochrany dát nielen z hľadiska informatickej vedy. Zaoberáme sa so súvislosťami s medzinárodnými normami a štandardmi. Ďalej špecifikujeme niektoré kľúčové definície, ako sú bezpečnosť dát, hardvérová a softvérová bezpečnosť, atď.. Na základe prieskumu uskutočneného v univerzitnom prostredí medzi študentami informatiky, sa snažíme poukázať na niektoré bezpečnostné riziká ako problém v prijatí cloudových technológií. Úspech novej technológie je v nemalej miere závislý od jej akceptácie budúcimi používateľmi. Preto je dôležité akceptovať názory budúcich používateľov v otázke bezpečnosti cloudových riešení. Tento článok sa zaoberá potenciálnymi hrozbami pre bezpečnosť a aktuálnymi variantmi bezpečnostných rizík. Príspevok nemá ambície pôsobiť ako istý návod, ale skôr chce poukázať na reálne ohrozenie.

## SUMMARY

The aim of this paper is to highlight the issue of safety and security not only in terms of computer science. We deal with the context of the international norms and standards. Further specifies some key definitions such as data security, hardware and software security, etc. Based on the survey conducted in the university among science students, we try to highlight some security risks as a problem in the adoption of cloud technologies. The success of the new technology is largely dependent on its acceptance of future users. Therefore, it is important to accept the views of future users to the security of cloud solutions. This article discusses potential threats to safety and security risks. Paper hasn't ambition to act as a sure guide, but rather seeks to demonstrate a real threat.

## Kontakt

Ing. Mgr. Peter Schmidt, PhD., Katedra aplikovanej informatiky, Fakulta hospodárskej informatiky, Ekonomická univerzita v Bratislave, Dolnozemská cesta 1, 852 35 Bratislava, e-mail: [peter.schmidt@euba.sk](mailto:peter.schmidt@euba.sk)

*Anna Strešňáková*

## **MODELOVANIE PRAVDEPODOBNOTI KRACHU POISŤOVNE V KONEČNOM ČASE**

### **Úvod**

Teória rizika v poisťovníctve sa venuje technikám modelovania a merania rizika spojeného s portfóliom poisťných kontraktov. Prvé prístupy pozostávali z modelovania rozdelenia celkovej škody v časovej perióde použitím klasického kolektívneho modelu rizika. Ďalšie prístupy vychádzali zo záujmu poisťovníkov - aktúarov o analýzu vývoja prebytku poisťnej spoločnosti vzhľadom na dlhšie časové obdobie. Vytvorené modely slúžia predovšetkým na posúdenie náhodných výkyvov v hodnote prebytku poisťovne v časovom intervale niekoľkých rokov.

Teória krachu poisťovne patrí do jednej z oblastí, ktorou sa zaoberá teória rizika a zaoberá sa analýzou modelu poisťných rezerv. Základným problémom je určenie pravdepodobnosti krachu poisťovne, čím sa rozumie skutočnosť, že poisťné rezervy by niekedy v budúcnosti mohli z určitej fixnej počiatkovej úrovne klesnúť pod nulovú hodnotu. Na určenie pravdepodobnosti krachu poisťovne sú rozpracované približné metódy určenia pravdepodobnosti krachu poisťovne v závislosti od počiatkových rezerv, výšky poisťného, rizikovej prirážky a rôznych typov rozdelenia výšky poisťných plnení.

Tým, že pravdepodobnosť krachu v konkrétnom čase je závislá od údajov v predchádzajúcom časovom okamihu, jednou z možností, ako v klasickom modeli prebytku v poisťovníctve vypočítať pravdepodobnosť krachu je využiť rekurentné algoritmy. Medzi prvými sa nimi zaoberali De Vylder a Goovaerts (1988) a Dickson a Waters (1991). Kľúčom pre algoritmus je, že rovina nahradená obdĺžnikovou mriežkou procesu prebytku so spojeným časom je aproximovaný procesom s diskretným časom, ktorého množina stavov je skupina rozložených bodov na osi premennej počet. Odvodenie pravdepodobnostných vlastností procesov aproximovaných diskretizáciou je jednoduchšie, ako odhad vlastností originálnych procesov. Jedným zo zjednodušujúcich prvkov je ten, že škálovanie vzhľadom na jednotku času môže byť také, že prijaté poisťné a tým pádom aj maximálny prírastok je rovný jednej.

Dickson a Waters (1999) odvodili rekurentný algoritmus na výpočet pravdepodobnosti krachu pre všeobecný model použitím diskretizácie, ktorú odvodili De Vylder a Goovaerts (1988) a Dickson a Waters (1991). Tento prístup má nedostatok v tom, že v každom fixnom intervale času maximálny prírastok prebytku je závislý nielen na intenzite prijímania poisťného, ale aj od počiatkovej úrovne rezerv na začiatku intervalu. Dôsledok týchto komplikácií je, že výsledný algoritmus je nielen náročný čo sa týka výpočtov, ale aj čo sa týka času na spracovanie.

Numerické hodnoty pravdepodobnosti krachu v konečnom čase pre všeobecný model môže byť vyčíslený aj použitím metód, ktoré odvodili Sundt a Teugels (1995) alebo De Vylder (1996).

Ďalší numerický algoritmus bol prezentovaný Dicksonom a Watersom (1999) a neskôr algoritmus upravili Brekelman a De Waegenaere (2001). Dve posledné autorky rozdelili časový horizont do malých rovnomerných intervalov a odvodili algoritmus na odhad dolnej a hornej hranice pre pravdepodobnosť krachu pričom predpokladali, že poisťné je prijímané vždy na začiatku, resp. na konci každého časového intervalu. Spriemerovaním týchto hraníc získali aproximáciu pravdepodobnosti krachu. Získané hodnoty boli rovnaké, ako nasimulované hodnoty pravdepodobnosti krachu.

Delbaen a Haezendonck (1987) použili techniku martingálov na získanie integrálnej rovnice na určenie pravdepodobnosti krachu. Vzťah, odvodený Sundtom a Teugelsom (1995), jednoduchším spôsobom vyjadril hornú hranicu pre pravdepodobnosť krachu či už v konečnom, či nekonečnom časovom horizonte. Tú istú techniku použili aj Boogaert a Crijns (1987), ale oni brali do úvahy aj záporné príjmy. V tomto zjednodušenom modeli rizika nie je potrebná podmienka čistého zisku a poisťovateľ pristúpi na možnosť straty, za podmienky zvýšenia konkurencieschopnosti poisťovne na trhu. Spomínaní autori získali hornú hranicu pravdepodobnosti krachu v konečnom aj nekonečnom časovom horizonte.

Ďalší komplikovaný, ale presný vzťah pre pravdepodobnosť krachu odvodili Knessl a Peters (1994) použitím Laplaceovej transformácie a rozvitím pomocou Bromwichovho vrstevnicového integrálu a zbiehajúcej sa hypergeometrickej funkcie. Knessl a Peters (1996) analyzovali asymptotické vlastnosti tohto presného výrazu a numerickým integrovaním získali aproximáciu pravdepodobnosti krachu v konečnom čase. Presný výsledok v špeciálnych prípadoch uviedol Albrecher s kolektívom (2001). Odvodili možnosť vyjadrenia doplnkovej pravdepodobnosti pomocou gamma postupnosti.

## 1 PROCES PREBYTKU A PRAVDEPODOBNOŠŤ KRACHU

Prebytkom poisťovne na konci časového úseku  $\langle 0, t \rangle$ ,  $t \in (0, \infty)$  rozumieme hodnotu počiatočného poisťného rezervného fondu, zvýšenú o prijaté poisťné v období  $\langle 0, t \rangle$  a zníženú o celkové poisťné plnenie v období  $\langle 0, t \rangle$ . Pričom  $t$  je časový okamih vyjadrený v príslušných časových jednotkách (obyčajne roky)

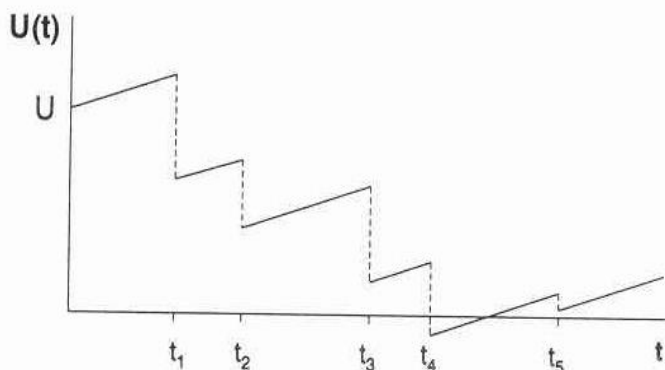
Základný model peňažných tokov poisťovne, resp. model prebytku poisťovne možno vyjadriť v tvare (odvodenie je možné pozrieť napríklad v Bühlmann (1970))

$$U(t) = U + c \cdot t - S(t) \quad (1)$$

kde

- $U(t)$  je prebytok poisťovne na konci časového úseku  $\langle 0, t \rangle$ ,

- $U = U(0)$  je hodnota rezervného poisťného fondu na začiatku sledovaného obdobia, teda prebytok poisťovne v čase  $t = 0$
- $c$  je konštantná miera intenzity prijímania poisťného v časovom intervale jednotkovej dĺžky,
- $S(t)$  je výška celkového poisťného plnenia v časovom intervale  $\langle 0, t \rangle$ ,



**Obr. 1** Proces prebytku poisťovne

Krachom poisťovne budeme rozumieť skutočnosť, že v určitom časovom okamihu prebytok poisťovne po prvý raz klesne na zápornú hodnotu.

Pravdepodobnosť krachu  $\Psi(U)$  v nekonečnom časovom horizonte pri hodnote  $U$  počiatočného rezervného fondu definujeme:

$$\Psi(U) = P(U(t) < 0 \text{ pre } t \in (0, \infty))$$

Pravdepodobnosť krachu v konečnom časovom okamihu  $\tau$  definujeme:

$$\Psi(U) = P(U(\tau) < 0 \text{ pre } \tau \in (0, t))$$

Pravdepodobnosť krachu v diskretnom čase a nekonečnom časovom horizonte definujeme s časovou jednotkou  $h$  a pre všetky  $n \in \mathbf{N}$

$$\Psi_h(U) = P(U(n \cdot h) < 0 \text{ pre } n = 1, 2, 3, \dots)$$

a pravdepodobnosť krachu v konečnom diskretnom časovom intervale:

$$\Psi_h(U, t) = P(U(n \cdot h) < 0 \text{ pre } n = 1, 2, \dots, t/h)$$

## 2 PRAVDEPODOBNOŠŤ KRACHU V KONEČNOM ČASOVOM HORIZONTE

Nech  $\{N(t) : t \in \mathbf{R}^+\}$  označuje náhodný proces, ktorý ráta počet poisťných plnení v poisťnom portfóliu poisťovne. Predpokladajme, že je to homogénny



Poissonov proces s intenzitou  $\lambda$ . Nech  $\{X_n : n \in \mathbf{N}\}$  je postupnosť nezávislých, identicky rozdelených náhodných premenných s funkciou hustoty  $f(x)$ , ktorá reprezentuje veľkosť poisťných plnení. Pokiaľ pripustíme, že úroková intenzita  $\delta$  je konštantná, potom výška  $n$ -tého poisťného plnenia nie je rovná  $X_n$ , ako v klasickej teórii rizika, ale  $e^{\delta T_n} X_n$ , pričom  $T_n$  ( $n \in \mathbf{N}$ ) znamená moment, v ktorom sa udiala  $n$ -tá poisťná udalosť. V časovom intervale  $\langle t, t + dt \rangle$  poisťovňa prijme poisťné vo výške  $c(t)dt$ , pričom  $c(t) = c \cdot e^{\delta t}$  a  $c = c(0) > 0$  je intenzita prijímania poisťného v čase  $t = 0$ . Okrem poisťného poisťovňa získava ešte úrok z rezerv s konštantnou úrokovou intenzitou  $\tilde{i}$  (ak platí, že  $\tilde{i} = \delta = 0$ , tak sa jedná o klasický model). Hodnota rezerv v čase  $t$ , označovaná ako  $U(t)$  spĺňa rovnicu

$$dU(t) = c \cdot e^{\delta t} dt + U(t) \cdot \tilde{i} \cdot dt - e^{\delta t} \cdot X_{N_t} dN_t,$$

Podrobnejšie model rozpracoval Bühlmann (1970). Nás zaujíma pravdepodobnosť, či poisťovňa prežije do času  $t$ , čiže, či je výška rezervy bude väčšia ako nula v každom časovom okamihu intervalu  $\langle 0, t \rangle$ :

$$\phi(x, t) = P\{U(s) \geq 0 \quad \forall 0 \leq s \leq t \mid U(0) = U\},$$

s vyjadruje akýkoľvek okamih v rámci časového intervalu  $\langle 0, t \rangle$ ,  $U(s)$  vyjadruje výšku rezervy v okamihu  $s$ , pričom  $U \geq 0$  znamená počiatočnú rezervu poisťovne. Nadväzne, pravdepodobnosť krachu je definovaná ako  $\psi(x, t) = 1 - \phi(x, t)$ .

Pre ľubovoľnú hodnotu času  $t$  platí nasledujúca integrálno diferenciálna rovnica pre pravdepodobnosť prežitia poisťovne v rámci konečného časového intervalu  $\langle 0, t \rangle$  s počiatočnou hodnotou rezerv  $U$  a pre ľubovoľnú funkciu hustoty výšky poisťných plnení  $f$ .

$$(c + iU) \frac{\partial \phi}{\partial U} - \frac{\partial \phi}{\partial t} - \lambda \cdot \phi + \lambda \int_0^U \phi(U - x, t) \cdot f(x) dx = 0 \quad (2)$$

s počiatočnou podmienkou, že  $\phi(U, 0) = 1$ , pričom  $i = \tilde{i} - \delta$  znamená reálnu konštantnú úrokovú intenzitu a predpokladá sa, že jej hodnota je kladná.

## 2.1 Rekurentné vzťahy pre pravdepodobnosť krachu

Rovnica (2) je všeobecnou rovnicou, ktorej riešenie má pomôcť pri špecifikovaní času krachu poisťovne pri známych počiatočných podmienkach – hodnotu začiatkovej rezervy či hustoty výšky poisťných plnení. Riešenie danej rovnice pomocou matematického aparátu je zložité a niekedy nepomôžu ani

softvérové balíky. Zaujímavá je preto otázka, aký nástroj nájsť, aby hľadanie riešenia rovnice bolo v časovo prijateľnom horizonte.

### 2.1.1 Vyjadrenie pravdepodobnosti prežitia pomocou gamma funkcií

Jednou z možností je využiť dostupné numerické metódy. Riešenie rovnice (2) budeme hľadať v tvare

$$\phi(U, t) = a_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \cdot P(n, \alpha U) \quad (3)$$

pričom  $a_n(t) \in \mathbb{R}$  sú koeficienty, pre  $n \in \mathbb{N}$  (koeficient  $\alpha \in \mathbb{R}$  je pridaný umelo vzhľadom na zjednodušenie odvodzovania nasledujúcich vzťahov).

Nech gamma funkcia je definovaná v tvare  $\Gamma(a) = \int_0^{\infty} x^{a-1} \cdot e^{-x} dx$

a neúplná gamma funkcia je daná vzťahom  $\Gamma(a, b) = \int_b^{\infty} x^{a-1} \cdot e^{-x} dx$  (pozri

Horáková 2015).

Potom  $P(n, \alpha U)$  je neúplná gamma funkcia v tvare

$$P(n, \alpha U) = \frac{1}{\Gamma(n)} \cdot \int_0^{\alpha U} x^{n-1} e^{-x} dx, \quad \alpha > 0, n > 0.$$

Predpokladajme, že distribučná funkcia výšky poisťných plnení  $F(x)$  sa dá tiež rozvinúť do radu pomocou tej istej neúplnej gamma funkcie

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \cdot P(n, \alpha x)$$

Pre kladné a celé hodnoty  $n$  sa neúplná gamma funkcia dá napísať pomocou nasledujúceho vzťahu  $j \in \mathbb{N}$

$$P(n, \alpha U) = 1 - e^{-\alpha U} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(\alpha U)^j}{j!}$$

a aby sme mohli zjednodušiť vzťah (2), potrebujeme vyjadriť deriváciu neúplnej gamma funkcie podľa premennej  $U$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial P(n, \alpha U)}{\partial U} &= \alpha \cdot e^{-\alpha U} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{(\alpha U)^j}{j!} - e^{-\alpha U} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial}{\partial U} \frac{(\alpha U)^j}{j!} = \\
&= \alpha \cdot e^{-\alpha U} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{(\alpha U)^j}{j!} - e^{-\alpha U} \sum_{j=1}^{n-1} j \cdot \alpha \frac{(\alpha U)^{j-1}}{j!} = \alpha \cdot e^{-\alpha U} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{(\alpha U)^j}{j!} - \\
&= \alpha \cdot e^{-\alpha U} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{(\alpha U)^{j-1}}{(j-1)!} = \alpha \cdot \left( \left( 1 - e^{-\alpha U} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{(\alpha U)^{j-1}}{(j-1)!} \right) - \left( 1 - e^{-\alpha U} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{(\alpha U)^j}{j!} \right) \right) = \\
&= \alpha (P(n-1, \alpha U) - P(n, \alpha U)) \quad n = 1, 2, 3, \dots
\end{aligned} \tag{4}$$

pričom  $P(0, \alpha U) = 1$  a využitím predchádzajúceho vzťahu získame súčin rezerv a derivácie neúplnej gamma funkcie v tvare

$$\begin{aligned}
U \frac{\partial P(n, \alpha U)}{\partial U} &= U \cdot \left( \alpha \cdot e^{-\alpha U} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{(\alpha U)^j}{j!} - \alpha \cdot e^{-\alpha U} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{(\alpha U)^{j-1}}{(j-1)!} \right) = \\
&= n \cdot e^{-\alpha U} \cdot \frac{(\alpha U)^n}{(n)!} = n (P(n, \alpha U) - P(n+1, \alpha U))
\end{aligned}$$

Využitím predchádzajúcich vzťahov rovnica (2) prejde do tvaru

$$\begin{aligned}
c \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \cdot \alpha \cdot (P(n-1, \alpha U) - P(n, \alpha U)) + i \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \cdot n \cdot (P(n, \alpha U) - P(n+1, \alpha U)) = \\
= a'_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty} a'_n(t) P(n, \alpha U) + \lambda \cdot a_0(t) + \lambda \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) P(n, \alpha U) - \\
- \lambda \int_0^U [a_0(t) \cdot P(n, \alpha(U-x))] \cdot \sum_{n=1}^{\infty} f_n dP(n, \alpha x)
\end{aligned} \tag{5}$$

Následnými úpravami vyjadříme rekurentné vzťahy pre koeficienty  $a_n(t)$

$$a_1(t) = \frac{1}{\alpha \cdot c} (a'_0(t) + \lambda \cdot a_0(t))$$

a pre  $n \in \mathbb{N}$

$$a_{n+1}(t) = \frac{1}{\alpha \cdot c} ((\lambda + \alpha c - in) \cdot a_n(t) + a'_n(t) + i \cdot (n-1) \cdot a_{n-1}(t) - \lambda \{a(t) * f\}) \tag{6}$$

pričom  $\{a(t) * f\} = a_0(t) \cdot f_n + a_1(t) \cdot f_{n-1} + \dots + a_{n-1}(t) \cdot f_1$  pre  $n \in \mathbb{N}$  je konvolúcia dvoch postupností  $a(t) = a_0(t), a_1(t), \dots$  a  $f = f_1, f_2, \dots$ . Nahradením  $U = 0$  vo vzorci (3) môže postupnosť koeficientov  $a_n(t)$  začať hodnotou

$$a_0(t) = \phi(0, t)$$

Pokiaľ rozvoj distribučnej funkcie výšky poistných plnení obsahuje len konečný počet členov, tak rovnicu (6) môžeme zjednodušiť do tvaru diferenciálnej rovnice (pre  $f_n = 0$  a pre  $n > S$ )

$$a_{n+1}(t) = \frac{1}{\alpha \cdot c} \left( (\lambda + \alpha c - in) \cdot a_n(t) + a'_n(t) + i \cdot (n-1) \cdot a_{n-1}(t) - \right. \\ \left. - \lambda \cdot (f_1 \cdot a_{n-1}(t) + f_2 \cdot a_{n-2}(t) + \dots + f_S \cdot a_{n-S}(t)) \right) \quad (7)$$

Pokiaľ sa výška poistných plnení riadi exponenciálnym rozdelením, tak funkcia hustoty má tvar  $f(x) = \beta \cdot e^{-\beta x}$  a  $S=1$ ,  $f_1=1$ , a takto dostaneme lineárny rekurentný vzorec druhého rádu

$$a_{n+1}(t) = \frac{1}{\beta \cdot c} \left( (\lambda + \beta \cdot c - in) \cdot a_n(t) + a'_n(t) + (i \cdot (n-1) - \lambda) \cdot a_{n-1}(t) \right) \quad (8)$$

### **2.2.2 Rekurentné vzťahy na aproximáciu pravdepodobnosti prežitia pre výšku poistných plnení riadiacich sa exponenciálnym rozdelením**

Vzťah (8) nám umožňuje objaviť existenciu jednoduchého riešenia rovnice (2) v závislosti od zvolených parametrov. Zameriame sa na prípad, keď sa výška poistných plnení riadi exponenciálnym rozdelením.

Nech sa výška poistných plnení riadi exponenciálnym rozdelením s parametrom  $\beta$  a nech parameter  $\lambda$  je zvolený tak, že je násobkom reálnej konštantnej úrokovej intenzity  $i$

$$\lambda = k \cdot i, (k \in \mathbf{N}) \quad (9)$$

Potom pravdepodobnosť prežitia v konečnom čase je daná vzťahom

$$\phi(U, t) = a_0(t) + \sum_{n=1}^k a_n(t) \cdot P(n, aU) \quad (10)$$

a je potrebný len jednoduchý algoritmus na výpočet  $a_n(t)$ , pričom vzťah (9) je nutná podmienka na vyjadrenie konečného vzťahu pre funkciu prežitia  $\phi(U, t)$

Možnosť, ako celý vzťah zjednodušiť a docieľiť, aby od určitého koeficientu  $n_0$  členy  $a_n(t)$  nadobudli nulovú hodnotu je, že sa zachováva vzťah  $i(n_0 - 1) - \lambda = 0$  (pravdaže vzhľadom na fakt, že  $0 < a_0(t) = \phi(0, t) \leq 1$ ).

Pri akceptovaní podmienky  $\lambda = k \cdot i, (k \in \mathbf{N})$  sa jednoduchým spôsobom obmedzí počet členov vo vzťahu (3) na konečný počet členov. (Každopádne, je možné pracovať aj so všetkými členmi rozvoja pre  $k \in \mathbf{N}$ .) My sa však pokúsime

dokázať, že pre fixné  $k \in \mathbf{N}$  je každý člen  $a_{k+j}(t) = 0, \forall j \geq 1$ . Táto podmienka vedie ku homogénnej diferenciálnej rovnici

$$\sum_{n=1}^k c_j \cdot a_0^{(j)}(t) = 0 \quad (11)$$

s konštantnými koeficientami  $c_j$ , pričom  $a_0^{(j)}(t)$  znamená  $j$ -tú deriváciu  $a_0(t)$ .

Intuitívne sa dá dokázať, že  $c_j > 0$  pre  $j \geq 0$  a  $c_0 = 0$ .

Ďalej predpokladajme, že korene  $-R_j, j = 0, 1, \dots, k+1$  charakteristickej rovnice diferenciálnej rovnice (11) sú jednoznačné. Potom

$$a_0(t) = \phi(0, t) = A_0 + \sum_{j=1}^{k+1} A_j \cdot e^{-R_j t} \quad (12)$$

V prípade, že  $\lambda = 1 \cdot i$ , odvodili Knessl a Peters (1994) presné riešenie a je rovnaké ako riešenie odvodené pomocou gamma funkcie v nasledujúcom tvare, pričom  $i$  znamená reálnu konštantnú úrokovú intenzitu

$$\phi(U, t) = 1 - \frac{i}{i + \beta \cdot c} \cdot e^{-\beta U} \cdot (1 - e^{-(i + \beta \cdot c)t}) \quad (13)$$

V prípade, že  $\lambda = 2 \cdot i$ , odvodí sa presné riešenie rovnice (2) pre funkciu hustoty  $f(x) = \beta \cdot e^{-\beta \cdot x}$  v tvare:

$$\begin{aligned} \phi(U, t) &= b_0(t) + (1 - e^{-\beta U}) \cdot b_1(t) + (1 - e^{-\beta U} - \beta \cdot U \cdot e^{-\beta U}) \cdot b_2(t) \quad (14) \\ b_0(t) &= \frac{\beta^2 \cdot c^2 \cdot D + e^{-R_1 t} (i^2 \cdot \beta \cdot c + D \cdot (i \cdot \beta \cdot c + i^2) - i^3) + e^{-R_2 t} (-i^2 \cdot \beta \cdot c + i^3 + D \cdot (i \cdot \beta \cdot c + i^2))}{D \cdot (\beta^2 \cdot c^2 + 2i \cdot \beta \cdot c + 2i^2)} \\ b_1(t) &= \frac{i(2 \cdot D \cdot \beta \cdot c - e^{-R_1 t} (-4 \cdot i^2 - i \cdot \beta \cdot c + D \cdot \beta \cdot c) - e^{-R_2 t} (4 \cdot i^2 + \beta \cdot c + D \cdot \beta \cdot c))}{D \cdot (\beta^2 \cdot c^2 + 2i \cdot \beta \cdot c + 2i^2)} \\ b_2(t) &= \frac{i^2 (e^{-R_1 t} \cdot (2 \cdot \beta \cdot c + 3i + D) - 2D + e^{-R_2 t} \cdot (-2\beta \cdot c - 3i + D))}{D \cdot (\beta^2 \cdot c^2 + 2i \cdot \beta \cdot c + 2i^2)} \end{aligned}$$

$$R_1(t) = \frac{2\beta \cdot c + 3i - D}{2}, \quad R_2(t) = \frac{2 \cdot \beta \cdot c + 3i + D}{2}, \quad D = \sqrt{i \cdot (4 \cdot \beta \cdot c + i)}$$

### 3 MODELOVANIE PRAVDEPODOBNOTI KRACHU

Na určenie pravdepodobnosti krachu pomocnou rekuretných vzorcov odvodených v predchádzajúcej kapitole sme použili softvér Mathcad 8. Používanie softvéru je poplatné. Prostredie tohto softvéru je užívateľsky veľmi prirodzené

a jednoduché. Zadávanie premenných a vzťahov medzi nimi prebieha v priradovaní hodnôt cez príslušné identifikátory na mieste kliknutia myšou. Pri spracovávaní údajov sme vstupné parametre zadali na začiatku nového súboru, pod nimi vzťah medzi nimi a vstupné údaje, ktoré sa menili, sme zadávali cez pole - ako vektory. Výsledky boli tým pádom spracované v druhom stĺpci pri zadaných vektoroch, takže vznikla hneď tabuľka vhodná na interpretáciu bez ďalšieho spracovania (viac v Strešňáková, 2006).

Určovali sme senzitivnosť celého modelu vzhľadom na konštantné vstupné parametre a meniacu sa hodnotu počiatkovej úrovne rezerv. Celý model vypočíta pravdepodobnosť krachu poisťovne v konkrétnom časovom okamihu.

**Tabuľka 1:** Pravdepodobnosť krachu pre parametre  $\beta = 1, \lambda = 1, c = 2, i = 1$

Čas	Pravdepodobnosť krachu pre $U=0$	Pravdepodobnosť krachu pre $U=10$	Pravdepodobnosť krachu pre $U=20$
0	0,0000000000000000	0,0000000000000000	0,0000000000000000
1	0,31673764387737900	0,000014379866785	0,000000000652845
2	0,33250708260777800	0,000015095798196	0,000000000685348
3	0,33329219673197100	0,000015131442322	0,000000000686966
4	0,33333128526254900	0,000015133216939	0,000000000687047
5	0,33333323136589300	0,000015133305292	0,000000000687051
6	0,33333332825667300	0,000015133309690	0,000000000687051
7	0,33333333308058100	0,000015133309909	0,000000000687051
8	0,33333333332075000	0,000015133309920	0,000000000687051
9	0,33333333332707000	0,000015133309921	0,000000000687051
10	0,33333333333302000	0,000015133309921	0,000000000687051

**Tabuľka 2:** Pravdepodobnosť krachu pre koeficienty  $\beta = 1, \lambda = 1, c = 2, i = 0,5$ .

Čas	Pravdepodobnosť krachu pre $U=0$	Pravdepodobnosť krachu pre $U=10$	Pravdepodobnosť krachu pre $U=20$
0	0	0	0
1	0,3413904253357800	0,00003960874854980200	0,00000000289281065768
2	0,3774553367424030	0,00005001777880708760	0,00000000376361375398
3	0,3833456323798540	0,00005195863727858180	0,00000000392770260760
4	0,3843881431805360	0,00005230817117563010	0,00000000395729149449
5	0,3845746687128940	0,00005237084874609720	0,00000000396259813851
6	0,3846080882712340	0,00005238208179014760	0,00000000396354915555

7	0,3846140770759680	0,00005238409483077070	0,00000000396371968581
8	0,3846151502975650	0,00005238445557864670	0,00000000396374999490
9	0,3846153426244080	0,00005238452022660040	0,00000000396375565703
10	0,3846153770903820	0,00005238453181188870	0,00000000396375676726

## Záver

Odhad pravdepodobnosti krachu poisťovne patrí medzi jednu z možností, kde sa dajú využiť numerické metódy riešenia integrálnych či diferenciálnych rovníc. V našom článku sme sa zamerali len na jednu z možností aplikácie rekurentných vzorcov aplikovaných na výšku poistných plnení riadiacich sa exponenciálnym rozdelením. Odvozené metódy nám poskytujú riešiť rovnice, ktorých spracovanie štandardným spôsobom by bolo zložité a v niektorých prípadoch až nemožné.

Pomocou numerických metód sme zistili senzitivnosť poisťovne na zvyšujúcu sa úroveň počiatkových rezerv. Model potvrdil, že so zvyšujúcou sa úrovňou počiatkových rezerv klesá pravdepodobnosť krachu poisťovne a pravdepodobnosť krachu stúpa s rastúcou hodnotou časového okamihu.

## Kľúčové slová

teória rizika, pravdepodobnosť krachu v konečnom čase, rekurentné vzorce,

## Klasifikácia JEL

G22

## LITERATÚRA

- [1] ALBRECHER, H. – TEUGELS, J. L. – TICHY, R. F. 2001. *On a gamma series expansion for the time-dependent probability of collective ruin*. Insurance: Mathematics and Economics, 29(3):345–355.
- [2] BOOGAERT, P. – CRIJNS, V. 1987. *Upperbounds on ruin probabilities in case of negative loadings and positive interest rates*. Insurance: Mathematics and Economics, Volume 6, Issue 3, , Pages 221-232, ISSN 0167-6687,
- [3] BREKELMANS, R. – De WAEGENAERE, A. 2001. *Approximating the finite-time ruin probability under interest force*. Insurance: Mathematics and Economics, 29(2):217–229.
- [4] BÜHLMANN, H. 1970. *Mathematical methods in Risk theory*. New York: Springer. ISBN 978-3-540-30711-2,
- [5] DELBAEN. F. – HAEZENDONCK, J. 1997. *Classical risk theory in an economic environment*. Insurance: Mathematics and Economics, 6:85-116.

- 
- [6] De VYLDER, F. – GOOVAERTS, M. 1988. *Recursive calculation of finite-time ruin probabilities*. Insurance: Mathematics and Economics, 7:1–7.
- [7] DICKSON, D. C. M. – WATERS, H. R. (1999). *Ruin probabilities with compounding assets*. Insurance: Mathematics and Economics, 25(1):49–62.
- [8] HORÁKOVÁ, G. – PÁLEŠ, M. – SLANINKA, F. 2015. *Teória rizika v poistení*. Bratislava: Wolters Kluwer, 420 s. ISBN 978-80-8168-273-5.
- [9] KNESSL, C. – PETERS, C. S. (1994). Exact and asymptotic solutions for the time-dependent problem of collective ruin. I. SIAM Journal on Applied Mathematics, 54(6):1745–1767.
- [10] KNESSL, C. – PETERS, C. S. (1996). Exact and asymptotic solutions for the time-dependent problem of collective ruin. II. SIAM Journal on Applied Mathematics, 56(5):1471–1521.
- [11] PANJER, H. H. – WILLMOT, G. E. 1992. *Insurance risk models*, Schaumburg: Society of Actuaries,
- [12] STREŠŇÁKOVÁ, A. 2006. *Numerické metódy odhadu pravdepodobnosti krachu poisťovne* : dizertačná práca. Bratislava, 130 s.
- [13] SUNDT, B. – TEUGELS, J. L. (1995). *Ruin estimates under interest force*. Insurance: Mathematics and Economics, 16:7-17.

## RESUMÉ

Teória krachu poisťovne je dôležitou súčasťou procesu života poisťovne. Pri určovaní pravdepodobnosti krachu sa používajú rôzne metódy, v závislosti od počiatkových podmienok. Od množstva vstupných parametrov potom závisí i náročnosť celého procesu a spracovania. V článku sme rozoberali možnosť určenia pravdepodobnosti krachu pomocou rekurentných algoritmov aplikovaných v modeli prebytku poisťovne. Pre špeciálne prípady, kedy sa výška poisťných udalostí riadi exponenciálny rozdelením. Skúmali sme senzitivitu modelu na výšku počiatkových rezerv poisťovne. Pravdepodobnosť krachu vzrastala v pribúdajúcim časom (výška poisťných udalostí znižovala výšku rezerv poisťovne) a so vzrastajúcou výškou počiatkovej rezervy sa pravdepodobnosť krachu znižovala. Rekurentné vzorce sú skvelým nástrojom v prípadoch, keď riešenie integrálne diferencálnych rovníc ani s pomocou softvérov nie je možné, poprípade je zdĺhavé.

## SUMMARY

The theory of the ruin of the insurance company is import part of the process of life insurance. In determining the probability of ruin, various methods are used, depending on the initial conditions. The amount of input parameters then depends inefficiency and processing. The article discussed the possibility of determining the probability of ruin by recursive algorithms applied to the model of excess insurance, for special cases, where the amount of insurance claims is governed by the exponential distribution. We investigated the sensitivity of the model to the amount of initial reserves of the company. Probability of ruin get bigger increase over time (amount of insurance claims reduce the amount of insurance reserves) and with increasing the amount of initial



margin is reduced probability of ruin. Recursive formulas are a great tool in cases where the solution of integral and differential equations even with the software is not possible or is lengthy.

### **Kontakt**

RNDr. Anna Strešňáková, PhD. Katedra matematiky a aktuárstva, Fakulta hospodárskej informatiky Ekonomickej univerzity v Bratislave, Dolnozemska 1/b, 852 35 Bratislava. 02/ 67 295 836, [anna.stresnakova@euba.sk](mailto:anna.stresnakova@euba.sk)

*Erik Šoltés*  
*Martin Gajdošík*

## **DOPAD REVÍZIE DEPRIVAČNÝCH POLOŽIEK NA HODNOTENIE MATERIÁLNEJ DEPRIVÁCIE SLOVENSKÝCH DOMÁCNOSTÍ NA ZÁKLADE DATABÁZY EU SILC 2014**

### **Úvod**

Materiálna deprivácia je jedným z aspektov posudzovaných pri monitorovaní sociálneho vylúčenia. Miera závažnej materiálnej deprivácie spolu s mierou rizika chudoby a mierou nízkej pracovnej intenzity tvorí agregovaný indikátor chudoby alebo sociálneho vylúčenia (ARPE – at risk of poverty or social exclusion). ARPE je základným indikátorom pri hodnotení pokroku EÚ ako aj jednotlivých členských krajín EÚ pri znižovaní počtu osôb v riziku chudoby a sociálneho vylúčenia. Indikátor sa používa na meranie cieľa stratégie Európa 2020 v sociálnej oblasti, v rámci ktorej si EÚ stanovila strategický cieľ od roku 2010 do roku 2020 vymaniť z rizika chudoby a sociálneho vylúčenia 20 miliónov ľudí. Ako bolo ukázané v (Guio a Maquet 2007), miera rizika chudoby zastiera veľké rozdiely v životných štandardoch medzi populáciami rôznych geografických území Európy a preto sa na základe miery rizika chudoby, v ktorej sa využívajú relatívne národné hranice rizika chudoby, javia rozdiely medzi štátmi EÚ oveľa menšie ako v skutočnosti sú (pozri (Israel a Spannagel 2013)). Keďže materiálna deprivácia poskytuje jasný obraz o sociálnom vylúčení, množstvo štúdií a analýz merania materiálnej deprivácie narastá. Pri písaní tohto článku sme boli inšpirovaní viacerými vedeckými prácami zaoberajúcimi sa materiálnou depriváciou ako napr. (Gerbery 2012), (Guio a Marlier 2013), (Israel a Spannagel 2013), (Stávková, Birčiaková a Turčíňková 2012), (Želinský 2012).

Pojem deprivácia sa vo všeobecnosti chápe ako pocit nedostatočného uspokojenia potrieb. Pod materiálnou depriváciou rozumieme nedostatok určitých predmetov alebo neúčast' na určitých aktivitách, ktoré sú v danej spoločnosti považované za bežné či nevyhnutné. Treba však zdôrazniť, že nejde o absenciu predmetov a neúčast' na aktivitách ako výsledok preferencií alebo životného štýlu, ale o vynútený nedostatok vyplývajúci z neschopnosti si dané predmety alebo aktivity dovoliť. Preto sa v štatistickom zisťovaní EU SILC (*EU-Statistics on Income and Living Conditions*), z ktorého vychádzajú naše analýzy, v prípade absencie predmetu alebo aktivity zisťuje aj dôvod absencie – či je vecou voľby alebo je spôsobená nedostatkom zdrojov.

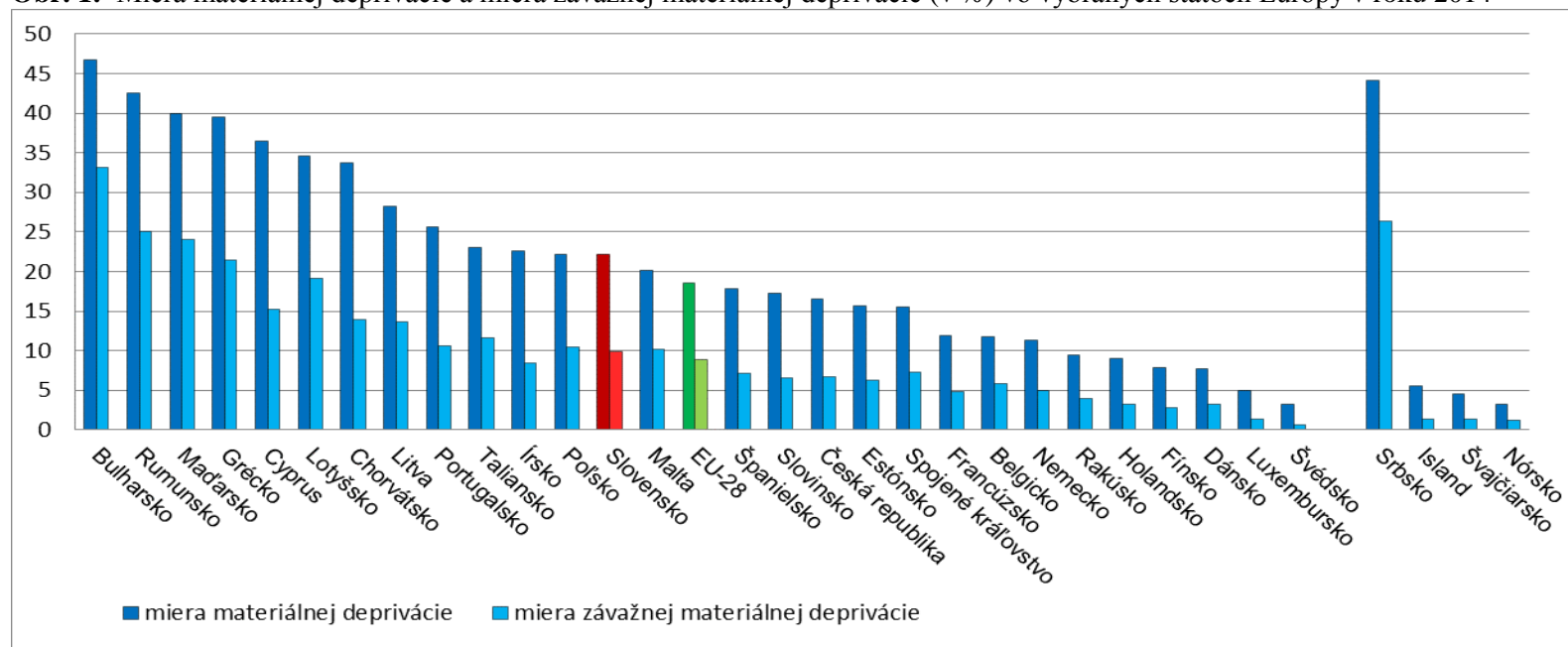
Vzhľadom na skutočnosť, že výpočet materiálnej deprivácie sa realizuje na základe jednotnej medzinárodne porovnateľnej metodiky, môžeme porovnávať situáciu na Slovensku s ostatnými krajinami EÚ, v ktorých sa realizuje štatistické zisťovanie EU SILC.

## 1 MATERIÁLNA DEPRIVÁCIA NA SLOVENSKU A V EÚ

Najvyšší podiel materiálne deprivovaných (aj závažne materiálne deprivovaných) osôb z krajín EÚ je dlhodobo v Bulharsku, Rumunsku a Maďarsku. V roku 2014 (obr. 1) bola v Maďarsku a Rumunsku takmer 1/4 obyvateľstva závažne materiálne deprivovaná a viac ako 2/5 obyvateľstva bolo materiálne deprivovaných. V Bulharsku v roku 2014 bola dokonca 1/3 populácie závažne materiálne deprivovaná a takmer polovica materiálne deprivovaná. Treba poznamenať, že uvedené krajiny zaznamenali v poslednom období zlepšenie sociálnej situácie z hľadiska materiálnej deprivácie. V Grécku a na Cypre evidujeme negatívny vývoj (pozri napr. [16] a [17]) a v roku 2014 sa tieto krajiny zaradili medzi krajiny s mierou materiálnej deprivácie nad 33 % a s mierou závažnej materiálnej deprivácie nad 15 %.

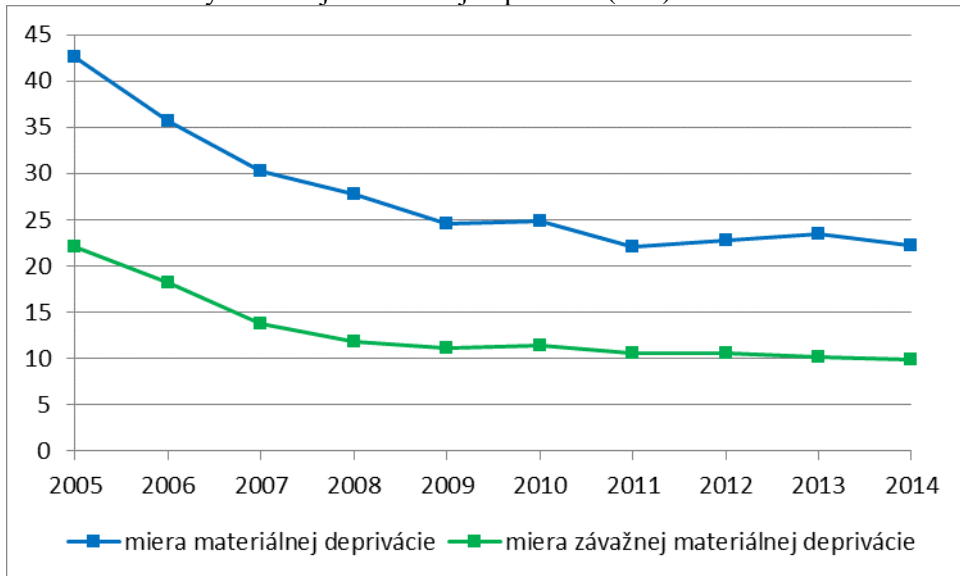
Naopak, najmenšiemu riziku materiálnej deprivácie čelia škandinávске štáty, štáty Beneluxu a z členských štátov EÚ aj Rakúsko, Nemecko a Francúzsko. V uvedených štátoch bola v roku 2014 miera materiálnej deprivácie pod 12 % a miera závažnej materiálnej deprivácie (s výnimkou Belgicka) pod 5 %. Z bývalého socialistického bloku bolo v roku 2014 najmenej materiálne deprivovaných osôb v Estónsku, Slovinsku a v Českej republike. Na Slovensku dosiahol podiel materiálne deprivovaných osôb hodnotu 22,2 % a podiel závažne materiálne deprivovaných osôb 9,9 %. Sú to mierne nadpriemerné hodnoty oproti priemeru EÚ 28, kde v roku 2014 evidujeme 18,5 % materiálne a 8,9 % závažne materiálne deprivovaných osôb. Na Slovensku bolo v roku 2014 porovnateľné sociálne vylúčenie z dôvodu finančnej záťaže a vynúteného nedostatku predmetov dlhodobej spotreby ako v Poľsku (miera materiálnej deprivácie: 22,2 %; miera závažnej materiálnej deprivácie: 10,4 %). Treba však zdôrazniť, že Poľsko v porovnaní so Slovenskom od roku 2005 výraznejšie redukovalo materiálnu depriváciu (miera materiálnej deprivácie v roku 2005: SK – 44,6 %, PL – 50,8 %; miera závažnej materiálnej deprivácie v roku 2005: SK – 22,1 %, PL – 33,8 %). Napriek pozitívnemu vývoju na Slovensku (obr. 2) je od roku 2009 tempo úbytku počtu materiálne a závažne materiálne deprivovaných osôb nízke.

**Obr. 1:** Miera materiálnej deprivácie a miera závažnej materiálnej deprivácie (v %) vo vybraných štátoch Európy v roku 2014



Zdroj: Eurostat, vlastné spracovanie

**Obr. 2:** Vývoj miery materiálnej deprivácie  
a miery závažnej materiálnej deprivácie (v %) na Slovensku



Zdroj: Eurostat, vlastné spracovanie

## 2 PÔVODNÝ KONCEPT VERZUS ALTERNATÍVNY KONCEPT MERANIA MATERIÁLNEJ DEPRIVÁCIE

V súčasnosti sa na posúdenie výskytu materiálnej deprivácie, resp. závažnej materiálnej deprivácie používa koncept, v ktorom sa sleduje 9 depriváčnych položiek patriacich do dimenzie finančnej záťaže a vlastníctva predmetov dlhodobej spotreby (Kováčová a Vlačuha 2015), (Eurostat 2015), a to:

1. nedoplatky spojené s hypotékou alebo nájomným, úhradou za energie alebo splácaním nákupov na splátky a iných pôžičiek (táto položka sa v zisťovaní EU SILC sleduje prostredníctvom 3 premenných: *HS011*, *HS021*, *HS031*<sup>1</sup>),
2. schopnosť dovoliť si raz za rok týždennú dovolenku mimo domu (*HS040*),
3. schopnosť dovoliť si každý druhý deň jedlo z mäsa, kurat'a, ryby alebo vegetariánsky ekvivalent (*HS050*),
4. schopnosť čeliť neočakávaným finančným výdavkom z vlastných zdrojov (*HS060*),
5. schopnosť vlastniť telefón (*HS070*),
6. schopnosť vlastniť farebný televízor (*HS080*),

<sup>1</sup> Označenie premenných používaných v zisťovaní EU SILC.

7. schopnosť vlastniť automatickú práčku (*HS100*),
8. schopnosť vlastniť osobný automobil (*HS110*),
9. schopnosť udržiavať v domácnosti adekvátne teplo (*HH050*).

V rámci prvej položky sa zisťujú samostatne nedoplatky v súvislosti s hypotékou alebo platbou nájomného (*HS011*), nedoplatky v súvislosti s účtami za dodávku energií (*HS020*) a nedoplatky so splácaním kúpy na splátky alebo iných pôžičiek (*HS030*). Aby sa táto položka považovala za absentujúcu, stačí ak domácnosť uvedie existenciu aspoň jedného druhu nedoplatku. Suma neočakávaných finančných výdavkov, s ktorou sú domácnosti konfrontované, je stanovená podľa metodiky EU SILC ako mesačná hodnota hranice rizika chudoby za obdobie predchádzajúceho roka. V zisťovaní EU SILC 2014 suma neočakávaných finančných výdavkov predstavovala 337 eur, t. j. hodnotu hranice chudoby za rok 2013.

Podľa tohto konceptu je *miera materiálnej deprivácie*, resp. *miera závažnej materiálnej deprivácie* definovaná ako podiel populácie (osôb alebo domácností), ktorá musí čeliť vynútenému nedostatku aspoň troch, resp. aspoň štyroch (v prípade závažnej materiálnej deprivácie) z uvedených deviatich depriváčnych položiek.

Ak sa bližšie pozrieme na uvedené depriváčne položky, je zrejmé, že vlastníctvo niektorých položiek ako napr. telefónu, farebného televízora alebo práčky v krajinách EÚ je veľmi vysoké. Podľa (Šoltés a Ulman 2015) bolo v roku 2012 na Slovensku menej ako 1% domácností, ktoré si nemohli dovoliť tieto technické zariadenia. Na druhej strane, v súčasnosti vieme o iných položkách, ktoré jednak lepšie odrážajú súčasné životné štandardy a jednak lepšie identifikujú sociálne vylúčené domácnosti alebo osoby. Z uvedeného dôvodu Guio, Gordon a Marlier (2012) navrhli robustný koncept merania materiálnej deprivácie použiteľný na národnej i medzinárodnej úrovni. Koncept bol zostavený na základe analýzy kompletného súboru ukazovateľov skúmaných v zisťovaní EU SILC 2009. Spolu bolo analyzovaných 50 položiek. Aby bola položka zaradená do konečného zoznamu depriváčnych položiek, využívaného pri výpočte indikátorov materiálnej deprivácie, musela spĺňať štyri kritériá: vhodnosť, validitu, spoľahlivosť (reliabilitu) a aditivitu (Guio, Gordon a Marlier 2012). Analýzy ukázali, že tri uvedené položky z pôvodného konceptu nespĺňali tieto kritériá, a teda nemali významný vplyv na podiel deprivovaných osôb vo väčšine členských krajín EÚ. Zvyšných šesť položiek (položky 1 až 4 a položky 8 a 9) bolo ponechaných v novom zozname. Uvedené kritériá spĺňalo aj sedem ďalších položiek, ktoré vyjadrujú schopnosť dovoliť si:

1. nahradiť opotrebované zariadenia a nábytok novými (*HD080*),
2. počítač a internetové pripojenie v domácnosti (*PD080*),
3. nahradiť obnosené oblečenie novým (nie secondhandovým) (*PD020*),
4. dva páry topánok vhodnej veľkosti (*PD030*),
5. aspoň jedenkrát mesačne stretnutie s priateľmi alebo rodinou za účelom posedenia pri jedle či pití (*PD050*),

6. pravidelnú účasť na voľnočasových aktivitách (*PD060*),
7. utrátiť každý týždeň menšiu sumu peňazí na seba (*PD070*).

Výsledkom analýz položiek podľa jednotlivých kritérií bolo vytvorenie uvedeného zoznamu 13 depriváčnych položiek (6 pôvodných a 7 nových položiek) pre celú populáciu a zoznamu 18 depriváčnych položiek pre monitorovanie materiálnej deprivácie detskej zložky obyvateľstva. V ďalších častiach článku sa zameriavame len na materiálnu depriváciu domácností, kde využijeme okrem pôvodného konceptu aj nový 13-položkový koncept.

Autori (Guio, Gordon a Marlier 2012) stanovili hranice materiálnej deprivácie, resp. závažnej materiálnej deprivácie tak, aby podiel deprivovaných osôb bol približne rovnaký ako pri použití ukazovateľov pôvodného konceptu. *Miera materiálnej deprivácie a miera závažnej materiálnej deprivácie* boli teda navrhnuté ako podiel osôb žijúcich v domácnostiach, ktoré čelia vynútenému nedostatku aspoň 5 položiek, resp. aspoň 7 položiek z navrhnutého 13-položkového zoznamu. V ďalších častiach článku budeme pre materiálnu depriváciu a pre závažnú materiálnu depriváciu meranú podľa nového (alternatívneho) konceptu používať aj označenia MD 5+ a MD 7+, zatiaľ čo materiálnu depriváciu a závažnú materiálnu depriváciu posudzovanú podľa pôvodného konceptu budeme označovať MD 3+ a MD4+.

### **3 ANALÝZA VPLYVU VYBRANÝCH FAKTOROV NA MATERIÁLNU DEPRIVÁCIU A ZÁVAŽNÚ MATERIÁLNU DEPRIVÁCIU SLOVENSKÝCH DOMÁCNOSTÍ MERANÚ PODĽA PÔVODNÉHO A ALTERNATÍVNEHO KONCEPTU**

V tejto časti článku posúdime mieru zhody v identifikácii výskytu materiálnej a závažnej materiálnej deprivácie slovenských domácností podľa oboch konceptov a zameriame sa na identifikáciu faktorov významne ovplyvňujúcich materiálnu depriváciu a na kvantifikáciu vplyvu týchto faktorov na riziko materiálnej a závažnej materiálnej deprivácie.

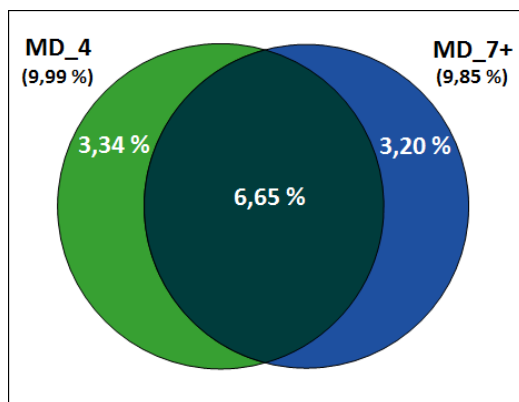
#### **3.1. Miera zhody v identifikácii materiálne deprivovaných domácností podľa pôvodného a alternatívneho konceptu**

Na základe databázy EU SILC 2014 sme odhadli mieru závažnej materiálnej deprivácie slovenských domácností (obr. 3) na porovnateľnej úrovni pri použití pôvodného konceptu (9,99 %) a pri použití alternatívneho konceptu (9,85 %). Obidvoma konceptmi bolo zhodne identifikovaných 6,65 p. b. Koncepty sa zhodujú v identifikácii deprivovaných domácností iba čiastočne, pretože približne 2/3 domácností, ktoré boli identifikované ako materiálne deprivované boli takto identifikované podľa oboch

konceptov a približne 1/3 domácností bola identifikovaná len jedným z aplikovaných konceptov. Podľa asociačnej tabuľky na obr. 3 vľavo vieme vyčísliť, že zhoda v identifikácii prítomnosti či neprítomnosti závažnej materiálnej deprivácie podľa oboch konceptov nastala v 93,46 % prípadov (86,81 % nedeprivovaných a 6,65 % deprivovaných domácností identifikovaných súčasne podľa oboch konceptov).

**Obr. 3:** Asociačná tabuľka a Vennov diagram závažne materiálne deprivovaných domácností identifikovaných podľa pôvodného (MD 4+) a alternatívneho konceptu (MD 7+)

MD 7+	MD 4+		
	0	1	Total
0	4 673	180	<b>4 853</b>
	86.81	3.34	
1	172	358	<b>530</b>
	3.20	6.65	
Total	<b>4 845</b>	<b>538</b>	<b>5 383</b>



Zdroj: EU SILC 2014, vlastné spracovanie v SAS Enterprise Guide 5.1

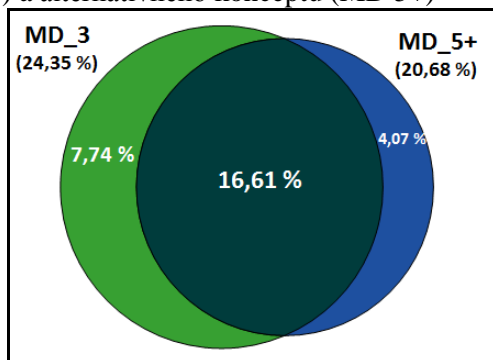
Rozdiely v miere materiálnej deprivácie pre slovenské domácnosti (obr. 4) vypočítanej podľa pôvodného konceptu (24,35 %) a podľa nového konceptu (20,68 %) boli väčšie. Napriek tejto skutočnosti, bola medzi pôvodným a alternatívnym konceptom v relatívnom vyjadrení väčšia zhoda pri identifikácii materiálne deprivovaných domácností. Z tých domácností, ktoré boli zaradené medzi materiálne deprivované domácnosti podľa pôvodného konceptu (MD3+) bolo 68 % klasifikovaných do kategórie materiálne deprivovaných aj podľa nového konceptu (MD5+) a naopak, z tých domácností, ktoré boli zaradené medzi materiálne deprivované domácnosti podľa nového konceptu (MD5+) bolo približne 80 % klasifikovaných do kategórie materiálne deprivovaných aj podľa pôvodného konceptu (MD3+).

Zhoda v identifikácii materiálne nedeprivovaných a materiálne deprivovaných domácností podľa uvedených konceptov nastala v 88,19 % prípadov, pričom súčasne podľa oboch konceptov bolo 71,58 % domácností klasifikovaných do skupiny nedeprivovaných domácností a 16,61 % domácností bolo klasifikovaných do skupiny deprivovaných domácností.



**Obr. 4:** Asociačná tabuľka a Vennov diagram materiálne derivovaných domácností identifikovaných podľa pôvodného (MD 3+) a alternatívneho konceptu (MD 5+)

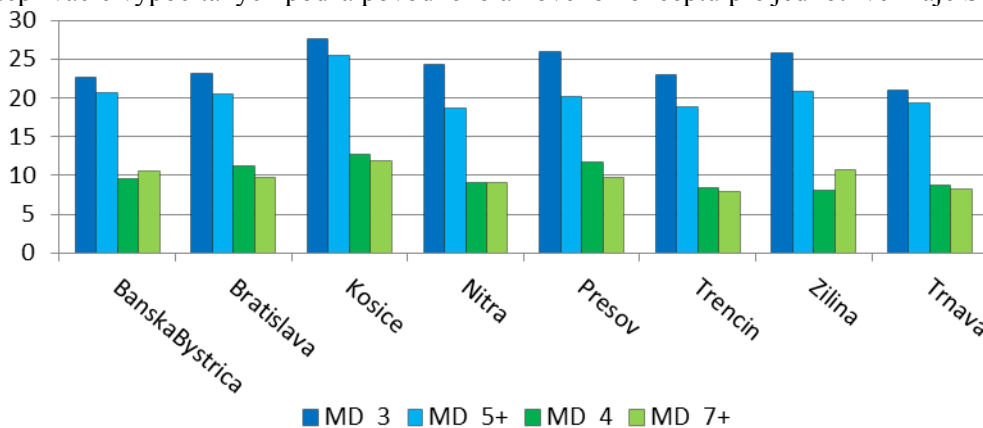
MD 5+	MD 3+		
	0	1	Total
0	3 853	417	<b>4 270</b>
	71.58	7.74	
1	219	894	<b>1 113</b>
	4.07	16.61	
<b>Total</b>	<b>4 072</b>	<b>1 311</b>	<b>5 383</b>



Zdroj: EU SILC 2014, vlastné spracovanie v SAS Enterprise Guide 5.1

Na základe štatistického testu zhody podielov sme zistili, že nemôžeme zamietnuť ( $p = 0,4040$ ) hypotézu o zhode miery materiálnej deprivácie pre referenčný rok 2013 (údaje z databázy EU SILC 2014) charakterizovanej pôvodným a alternatívnym konceptom. Avšak miera závažnej materiálnej deprivácie definovaná podľa alternatívneho konceptu bola signifikantne nižšia ( $p < 0,0001$ ) ako miera závažnej materiálnej deprivácie vymedzená pôvodným konceptom. Tieto závery by sa zrejme potvrdili nielen na celoštátnej úrovni (NUTS1), ale vo väčšine prípadov aj na úrovni NUTS3, čo naznačuje porovnanie uvedených mier medzi krajinami SR (obr. 5).

**Obr. 5:** Porovnanie miery materiálnej deprivácie a miery závažnej materiálnej deprivácie vypočítaných podľa pôvodného a nového konceptu pre jednotlivé kraje SR



Zdroj: EU SILC 2014, vlastné výpočty a spracovanie

V sledovanom období bol najvyšší podiel materiálne deprivovaných a závažne materiálne deprivovaných domácností v Košickom kraji, kde bola významne najvyššia predovšetkým miera materiálnej deprivácie vypočítaná podľa nového konceptu (25,51 % v Košickom kraji a pod 21 % v ostatných krajoch). Kraj s najnižším podielom sociálne vylúčených domácností z dôvodu materiálnej deprivácie sa nedá jednoznačne určiť, pretože sa to mení v závislosti od toho, či sledujeme materiálnu depriváciu alebo závažnú materiálnu depriváciu a od použitého konceptu.

### **3.2. Porovnanie vplyvu vybraných faktorov na materiálnu depriváciu slovenských domácností meranú podľa pôvodného a podľa alternatívneho konceptu s využitím logistickej regresie**

Vhodným nástrojom na overenie štatistickej významnosti vplyvu určitých faktorov na materiálnu depriváciu je logistická regresia. Zaradenie domácností do kategórie materiálne, resp. závažne materiálne deprivovaných domácností identifikujú premenné MD3+ (pre pôvodný koncept) a MD5+ (pre alternatívny koncept), resp. MD4+ a MD7+, ktoré boli v predchádzajúcej časti článku zadané ako binárne premenné (hodnotu 1 nadobúdajú v prípade, ak sa podľa použitého konceptu jedná o materiálne, resp. závažne materiálne deprivovanú domácnosť, inak nadobúdajú hodnotu 0). Tieto premenné v našej analýze vstupovali do logitovej funkcie ako vysvetľované premenné. Z množiny dostupných premenných z databázy EU SILC 2014 sme na základe vlastných skúseností a analýz iných autorov (napr. (Kováčová a Vlačuha 2015), (Šoltés a Ulman 2015) a (Petrová 2015)) vybrali tie faktory, o ktorých sme predpokladali, že ovplyvňujú riziko materiálnej, resp. závažnej materiálnej deprivácie slovenských domácností. Jednalo sa o tieto faktory:

- faktory vzťahujúce sa k osobe na čele domácnosti:
  - ekonomická aktivita (*EAS – Economic Activity Status*),
  - najvyššie dokončené vzdelanie (*Education*),
  - rodinný stav (*Marital status*)
  - všeobecné zdravie (*Health*)
  - vek (*Age*)
- faktory vzťahujúce sa na domácnosť:
  - typ domácnosti (*HT – Household Type*),
  - kraj (*Region*), v ktorom domácnosť žije,
  - stupeň urbanizácie (*Urbanisation*) územia, na ktorom domácnosť žije,

Opis faktorov (s výnimkou faktora *Kraj (Region)*), u ktorých sa potvrdila štatistická významnosť vplyvu na materiálnu depriváciu, spolu s opisom z nich vytvorených umelých premenných uvádzame v tab. 1.

**Tab. 1:** Opis vstupných vysvetľujúcich premenných

Pôvodné premenné (EU SILC) – hodnoty a opis <sup>2</sup>		Názvy nových umelých premenných	
<b>RB210 – Status základnej ekonomickej aktivity</b>		<b>EAS</b>	
1	pracujúci	at Work	<b>R</b>
2	nezamestnaný	Unemployed	
3	starobný dôchodca, osoba v predčasnom dôchodku	Retired	
4	iná neaktívna osoba	Inactive_person	
<b>PE040 – Najvyšší dosiahnutý stupeň vzdelania (ISCED)</b>		<b>EDUCATION</b>	
0	Nižšie ako primárne vzdelanie	Less_than_Secondary	
1	Primárne vzdelanie		
2	Nižšie sekundárne vzdelanie		
3	Vyššie sekundárne vzdelanie	Upper_Secondary	
4	Post-sekundárne vzdelanie (nie terciárne)	Post_Secondary	
5	Krátky cyklus terciárneho vzdelania	Tertiary_1	
6	Bakalárske vzdelanie		
7	Magisterské vzdelanie alebo jeho ekvivalent	Tertiary_2_3	<b>R</b>
8	Doktorandské vzdelanie alebo jeho ekvivalent		
<b>HT – Typ domácnosti</b>		<b>HT</b>	
5	Jednočlenná domácnosť	1Adult	
6	Domácnosť 2 dospelých, obaja vo veku do 65 r.	2Adult_0Ch	
7	Domácnosť 2 dospelých, aspoň 1 vo veku 65+	2A_1R	<b>R</b>
8	Iné domácnosti bez závislých detí	Other_0Ch	
9	Domácnosť 1 rodiča aspoň s 1 závislým dieťaťom	1A_at_least_1Ch	
10	Domácnosť 2 dospelých s 1 závislým dieťaťom	2A_1Ch	
11	Domácnosť 2 dospelých s 2 závislými deťmi	2A_2Ch	
12	Domácnosť 2 dospelých s 3+ závislými deťmi	2A_at_least_3Ch	
13	Iné domácnosti so závislými deťmi	Other_with_Ch	

<sup>2</sup> Pre správnu interpretáciu výsledkov je potrebné vziať do úvahy úplné opisy premenných ktoré sú uvedené na internetovej stránke: <http://ec.europa.eu/eurostat/web/income-and-living-conditions/methodology/list-variables>

(pokračovanie Tab. 1)

Pôvodné premenné (EU SILC) – hodnoty a opis		Názvy nových umelých premenných	
<b>PB190 – Rodinný stav</b>		<b>MARITAL STATUS</b>	
1	slobodný/á	Never_married	
2	ženatý/vydatá	Married	<b>R</b>
4	vdovec/vdova	Widowed	
5	rozvedený/á	Divorced	
<b>PH010 – Všeobecné zdravie</b>		<b>HEALTH</b>	
1	Veľmi dobré	Good	<b>R</b>
2	Dobré		
3	Priemerné	Fair	
4	Zlé	Bad	
5	Veľmi zlé		
<b>DB100 – Stupeň urbanizácie</b>		<b>URBANISATION</b>	
1	Územie s hustým osídlením	Dense	<b>R</b>
2	Územie s priemerne hustým osídlením	Intermediate	
3	Územie s riedkym osídlením	Sparse	
<b>PX010, RX010 – Vek</b>		<b>AGE</b>	
num	Vek na konci príjmového referenčného obdobia - osoby na čele domácnosti		

Zdroj: EU SILC 2014, vlastné spracovanie

Na hladine významnosti 0,05 sa nepotvrdilo, že vek osoby na čele domácnosti a stupeň urbanizácie územia, na ktorom domácnosť žije, mali v referenčnom období významný vplyv na riziko materiálnej deprivácie alebo závažnej materiálnej deprivácie. 5 faktorov, ktorých opis sme urobili v tab. 1, signifikantne determinovalo riziko materiálnej aj závažnej materiálnej deprivácie, čo sa potvrdilo pri použití pôvodného aj alternatívneho konceptu (tab. 2). Regionálne disparity vo výskyte materiálnej deprivácie sa potvrdili v prípade použitia oboch konceptov, zatiaľ čo regionálne rozdiely vo výskyte závažnej materiálnej deprivácie na úrovni NUTS3 (kraje) boli preukázateľné len v prípade použitia pôvodného konceptu. Na základe výsledkov v tab. 2 do modelov logistickej regresie vstupovalo 6 relevantných faktorov s výnimkou modelu pre závažnú materiálnu depriváciu definovanú podľa alternatívneho konceptu, v ktorom sa nepreukázala relevantnosť faktora *Kraj*.

**Tab. 2:** Overenie štatistickej významnosti vplyvu uvažovaných faktorov na materiálnu depriváciu a závažnú materiálnu depriváciu slovenských domácností meranú podľa pôvodného a nového konceptu

Effect	DF	Materiálna deprivácia				Závažná materiálna deprivácia			
		pôvodný koncept MD 3+		nový koncept MD 5+		pôvodný koncept MD 4+		nový koncept MD 7+	
		Wald Chi-Square	Pr > ChiSq	Wald Chi-Square	Pr > ChiSq	Wald Chi-Square	Pr > ChiSq	Wald Chi-Square	Pr > ChiSq
<b>EAS</b>	3	164.61	<.0001	221.97	<.0001	200.04	<.0001	266.32	<.0001
<b>EDUCATION</b>	4	111.22	<.0001	103.93	<.0001	68.09	<.0001	69.69	<.0001
<b>MARITAL_STATUS</b>	3	64.67	<.0001	91.35	<.0001	72.18	<.0001	46.86	<.0001
<b>HT</b>	8	68.98	<.0001	46.55	<.0001	42.02	<.0001	34.43	<.0001
<b>HEALTH</b>	2	47.26	<.0001	42.49	<.0001	31.78	<.0001	28.95	<.0001
<b>REGION</b>	7	15.85	0.0265	14.42	0.0441	18.76	0.0090	9.05	0.2493
<b>URBANISATION</b>	2	3.90	0.1420	0.91	0.6345	0.08	0.9611	0.71	0.7011
<b>AGE</b>	1	0.04	0.8460	0.29	0.5918	0.01	0.9377	2.24	0.1348

Zdroj: EU SILC 2014, vlastné spracovanie na základe analýz v SAS Enterprise Guide 5.1

**Tab. 3:** Bodové odhady pomerov šancí pre logistické modely materiálnej a závažnej  
materiálnej deprivácie posudzovaných podľa pôvodného a nového konceptu

Parameter		Materiálna deprivácia		Závažná materiálna deprivácia	
		pôvodný koncept MD 3+	nový koncept MD 5+	pôvodný koncept MD 4+	nový koncept MD 7+
EAS	Unemployed vs at_Work	8,420	12,794	11,320	17,101
	Inactive vs at_Work	1,533	1,942	2,010	2,498
	Retired vs at_Work	1,120**	1,265	1,181**	1,367*
EDUCATION	Less_Sec vs Tertiary_2_3	5,083	5,697	6,775	6,240
	Upper_Sec vs Tertiary_2_3	2,774	2,946	3,043	2,650
	Post_Sec vs Tertiary_2_3	1,366**	1,446**	1,448**	1,382**
	Tertiary_1 vs Tertiary_2_3	1,681*	1,925	2,195*	2,249*
MARITAL STATUS	Divorced vs Married	2,486	3,078	3,192	2,881
	Never_Married vs Married	2,030	1,955	3,147	2,126
	Widowed vs Married	1,324	1,226**	1,192**	1,110**
HOUSEHOLD TYPE	2A_least_3Ch vs 2A_1R	2,973	2,651	4,763	4,820
	1A_least_1Ch vs 2A_1R	2,360	2,254	1,914	3,023
	2A_1Ch vs 2A_1R	1,393*	1,477	1,896	2,162
	Other_with_Ch vs 2A_1R	1,341*	1,331*	1,534*	1,870
	1Adult vs 2A_1R	1,498	1,325*	1,238**	1,312**
	2A_2Ch vs 2A_1R	1,061**	1,007**	1,357**	1,480**
	2A_0Ch vs 2A_1R	1,071**	0,918**	1,143**	1,276**
	Other_0Ch vs 2A_1R	0,765*	0,847**	0,879**	1,013**
HEALTH	Bad vs Good	2,145	2,116	2,402	2,231
	Fair vs Good	1,380	1,538	1,423	1,434
REGION	Bratislava vs Trnava	1,373	1,325*	1,677	–
	Kosice vs Trnava	1,374	1,366	1,407*	–
	Presov vs Trnava	1,376	1,056**	1,443*	–
	Zilina vs Trnava	1,367	1,153**	0,913**	–
	Trencin vs Trnava	1,221**	1,061**	1,067**	–
	Nitra vs Trnava	1,197**	0,924**	1,052**	–
	BanskaBystrica vs Trnava	0,982**	0,952**	0,890**	–

Zdroj: EU SILC 2014, vlastné spracovanie na základe analýz v SAS Enterprise Guide 5.1

Vysvetlivky k tab. 3:

\* nesignifikantné na hladine významnosti 0,05, ale signifikantné na hladine významnosti 0,1

\*\*nesignifikantné na hladine významnosti 0,1

Vzhľadom na cieľ tejto časti článku kvantifikovať vplyv jednotlivých relevantných faktorov na riziko materiálnej deprivácie, zameriame sa len na odhady pomerov šancí (odds ratio) získané z logistickej regresie (bližšie pozri napr.: (Allison 2012), (Rublíková, Labudová, Sandtnerová 2009)) a odhadnuté modely nebudeme využívať na predikciu. Bodové odhady pomerov šancí sú uvedené v tab. 3, pričom referenčná kategória pre príslušný faktor je v tab. 1 označená písmenom R. Pre faktor *Region*, sme zvolili ako referenčnú kategóriu Trnavský kraj, ktorý podľa odhadov mier materiálnej deprivácie (obr. 5) patril medzi kraje s najnižším rizikom materiálnej a závažnej materiálnej deprivácie.

Riziko materiálnej deprivácie je najväčšou mierou determinované ekonomickou aktivitou. Na základe logistických regresných modelov sme odhadli, že za predpokladu fixovania ostatných faktorov je riziko materiálnej deprivácie (závažnej materiálnej deprivácie) domácností, na ktorých čele stojí nezamestnaná osoba, až 8,4, resp. 12,8-násobne vyššie (11,3, resp. 17,1-násobne vyššie) ako v domácnostiach so zamestnaným prednostom. Domácnosti s nezamestnanou osobou alebo s inak neaktívnou osobou majú pochopiteľne vyššie riziko materiálnej deprivácie ako tomu je v domácnostiach so zamestnanou osobou na čele. Je zaujímavé, že podľa pôvodného konceptu domácností, na čele ktorých stojí starobný dôchodca alebo osoba v predčasnom dôchodku, nemali na hladine významnosti 0,1 štatisticky významne odlišné riziko materiálnej a závažnej materiálnej deprivácie ako domácnosti so zamestnaným prednostom, kým alternatívny koncept poukázal na signifikantne vyššie riziko. Všeobecne podľa alternatívneho konceptu je hrozba materiálnej a závažnej materiálnej deprivácie v domácnostiach, kde prednosta nemá status „zamestnaný“ vyššia ako ukazuje pôvodný koncept. Riziko závažnej materiálnej deprivácie v domácnostiach, kde prednosta nemá status „zamestnaný“ v porovnaní s domácnosťami so zamestnanou osobou na jej čele je vyššie ako v prípade materiálnej deprivácie, čo naznačuje, že v domácnostiach, kde prednosta nemá status „zamestnaný“ je nielen výskyt materiálnej deprivácie vyšší ale aj závažnosť tohto sociálneho javu je vyššia.

Druhým najvýznamnejším faktorom ovplyvňujúcim ohrozenie domácností materiálno depriváciou je vzdelanie osoby na čele domácnosti, a to aj za predpokladu, že porovnáваме domácnosti, kde prednosta má rovnakú ekonomickú aktivitu a aj ostatné uvažované faktory ostávajú nemenné. Je pochopiteľné, že so zvyšujúcim vzdelaním sa riziko materiálnej deprivácie znižuje a na základe výsledkov našich analýz v prípade závažnej materiálnej deprivácie je to ešte výraznejšie. Domácnosti, na ktorých čele je osoba s nižším ako sekundárnym vzdelaním mali v referenčnom období 5,1-násobne (podľa pôvodného konceptu), resp. 5,7-násobne (podľa alternatívneho konceptu) vyššie riziko materiálnej deprivácie a 6,8-násobne (podľa pôvodného konceptu), resp. 6,2-násobne (podľa alternatívneho konceptu) vyššie riziko závažnej materiálnej deprivácie ako tomu bolo v najmenej rizikovej skupine, teda v domácnostiach, kde osoba na jej čele mala terciárne vzdelanie 2. alebo 3. stupňa. Je pozoruhodné, že riziko materiálnej deprivácie

a ešte výraznejšie riziko závažnej materiálnej deprivácie v domácnostiach, kde prednosta má bakalársky stupeň vzdelania, je vyššie ako v domácnostiach s post-sekundárne vzdelanou osobou na jej čele. Dokonca sa na hladine významnosti 0,1 nepotvrdil signifikantný rozdiel v riziku analyzovaných sociálnych javov medzi domácnosťami, v ktorých osoba na čele má post-sekundárne vzdelanie a domácnosťami, v ktorých osoba na čele má vysokoškolské vzdelanie 2. alebo 3. stupňa. K takémuto záveru sme dospeli aj na základe modelov pre pôvodný aj pre alternatívny koncept a podľa uvedeného môžeme usudzovať, že bakalársky stupeň štúdia poskytuje absolventom teoretické poznatky a zručnosti, ktoré sú pravdepodobne potrebné pre 2. stupeň vysokoškolského štúdia, ale tieto poznatky a zručnosti nie sú natoľko komplexné, aby vytvárali výraznú konkurenčnú výhodu na trhu práce.

Z hľadiska rodinného stavu sú najohrozenejšie domácnosti s rozvedenou osobou na jej čele a domácnosti, na ktorých čele stojí osoba, ktorá nie je a počas svojho života ani nebola v manželskom zväzku. Riziko materiálnej a závažnej materiálnej deprivácie takýchto domácností je niekde na úrovni 2 až 3-násobku rizika domácností, ktoré majú na čele vydatú, resp. ženatú osobu.

V súlade s viacerými štúdiami, ktoré potvrdili, že z hľadiska rizika chudoby a sociálneho vylúčenia sú najohrozenejšie domácnosti s 1 dospelým a minimálne 1 závislým dieťaťom a domácnosti s 2 dospelými a minimálne 3 závislými deťmi, naše analýzy ukázali, že aj z hľadiska materiálnej deprivácie ako aj z hľadiska závažnej materiálnej deprivácie sa jedná o najrizikovejšie typy domácností. O niečo nižšie riziko, ale stále štatisticky významne vyššie ako najmenej rizikové typy domácností, mali domácnosti 2 dospelých s 1 závislým dieťaťom. Tieto závery vyplynuli z analýz realizovaných pre oba koncepty. Za podmienky *ceteris paribus* je teda najrizikovejším typom domácnosti domácnosť s 2 dospelými a minimálne 3 závislými deťmi, kde riziko materiálnej deprivácie bolo takmer 3-násobne vyššie a riziko závažnej materiálnej deprivácie takmer 5-násobne vyššie ako v domácnostiach s 2 dospelými, z ktorých aspoň jeden mal v referenčnom období viac ako 65 rokov. Tento typ domácnosti spolu s ostatnými bezdetnými domácnosťami a domácnosťami 2 dospelých a 2 závislých detí patrí medzi domácnosti s najmenšou hrozbou materiálnej deprivácie (medzi týmito domácnosťami vo väčšine prípadov nebol štatisticky významný rozdiel v riziku materiálnej a závažnej materiálnej deprivácie).

Dôležitým atribútom je zdravie osôb domácnosti ale aj samotnej osoby na jej čele. Všetky modely potvrdili, že zhoršujúce zdravie osoby na čele domácnosti zvyšuje hrozbu materiálnej, resp. závažnej materiálnej deprivácie.

Z pohľadu regionálnych disparít je zaujímavé, že najväčšia hrozba materiálnej deprivácie je v Bratislavskom a v Košickom kraji, čo môže byť spôsobené aj drahšími nehnuteľnosťami v hlavnom meste a v metropole východného Slovenska, čo pravdepodobne spôsobuje častejšie problémy so splácaním hypoték (prvá depriváčna položka) ako v ostatných častiach Slovenska. Už samotné porovnanie odhadov mier



materiálnej deprivácie medzi krajinami SR (obr. 5) poukázalo na zvýšenú hrozbu materiálnej deprivácie v Košickom kraji. Toto porovnanie však nenaznačovalo signifikantne vyššie riziko v Bratislavskom kraji. Tu si ale musíme uvedomiť, že pomery šanci odhadnuté na základe logistického regresného modelu vychádzajú z predpokladu konštantnosti ostatných faktorov zahrnutých do modelu. V skutočnosti tento predpoklad nie je splnený, pretože v Bratislavskom kraji je najnižšia miera nezamestnanosti a pravdepodobne najväčší podiel vysokoškolsky vzdelaných osôb, čím sa pri veľkej skupine domácností z Bratislavského kraja zvýšené riziko materiálnej deprivácie prirodzene eliminuje vďaka pozitívnym hodnotám prvých 2 faktorov (*EAS* a *Education*).

## Záver

Zmena konceptu merania materiálnej deprivácie a s ňou spojené zmeny hraníc pre materiálnu a závažnú materiálnu depriváciu spôsobili, že sa do značnej miery (20 % až 33 %) identifikuje ako materiálne alebo závažne materiálne deprivovaná iná skupina osôb a domácností. Je nespochybniteľné, že alternatívny koncept zahŕňa položky, ktoré lepšie odrážajú súčasné životné štandardy a lepšie identifikujú sociálne vylúčené domácnosti, ale treba si uvedomiť, že pre zachovanie kontinuity a porovnateľnosti charakteristík materiálnej deprivácie (nielen miery materiálnej a miery závažnej materiálnej deprivácie, ale aj hĺbky deprivácie) bude v budúcnosti vhodné paralelne používať oba koncepty.

Analýzy, ktoré vychádzali z logistickej regresie v prípade materiálnej deprivácie a v prípade závažnej materiálnej deprivácie identifikovali rovnaké rizikové skupiny domácností z hľadiska uvažovaných faktorov, a to takmer totožne pri oboch konceptoch. Faktory, ktoré signifikantne determinujú riziko materiálnej a závažnej materiálnej deprivácie sú: ekonomická aktivita, vzdelanie, rodinný stav a zdravie osoby na čele domácnosti ako aj typ domácnosti. Regionálne disparity v materiálnej deprivácii neboli výrazné a v prípade závažnej materiálnej deprivácie hodnotenej podľa alternatívneho konceptu sa nepreukázali signifikantné rozdiely medzi krajinami.

Naše analýzy potvrdili, že riziko hodnotených sociálnych javov je v najväčšej miere ovplyvnené ekonomickou aktivitou a najrizikovejšou skupinou sú domácnosti s nezamestnanou osobou na čele. Čím je vzdelanie prednostu domácnosti vyššie, riziko materiálnej deprivácie signifikantne klesá. Z hľadiska rodinného stavu sú najviac ohrozené domácnosti s rozvedenou osobou na jej čele alebo s osobou, ktorá nikdy nežila v manželskom zväzku. Zhoršovanie zdravotného stavu zvyšuje hrozbu materiálnej deprivácie. Z pohľadu typu domácnosti musia najväčšiemu riziku materiálnej deprivácie čeliť domácnosti s 2 dospelými a minimálne 3 závislými deťmi a domácnosti s 1 dospelým a minimálne 1 závislým dieťaťom. Naše výpočty ukázali, že najvyššia miera materiálnej deprivácie a miera závažnej materiálnej deprivácie v roku 2013 (údaje z EU SILC 2014) boli v Košickom kraji. Za predpokladu fixovania ostatných relevantných faktorov majú najväčšiu hrozbu materiálnej deprivácie domácnosti z Bratislavského a Košického kraja.

## **Kľúčové slová**

materiálna deprivácia, závažná materiálna deprivácia, alternatívny koncept materiálnej deprivácie, sociálne vylúčenie, EU SILC, logistická regresia

## **Klasifikácia JEL**

C51; C52; R29

**Príspevok bol spracovaný v rámci riešenia grantovej úlohy VEGA 1/0548/16 *Pokrok SR pri naplňaní stratégie EURÓPA 2020 v oblasti znižovania chudoby a sociálneho vylúčenia***

## **LITERATÚRA**

- [1] ALLISON, P. D. (2012) *Logistic Regression Using SAS®: Theory and Application*, 2<sup>nd</sup> Edition, SAS Institute Inc., Cary, NC, USA. 339 s. ISBN 978-1-59994-641-2.
- [2] EUROSTAT. (2015). *Material deprivation and low work intensity statistics*. (Rep.). Dostupné na internete: [http://ec.europa.eu/eurostat/statistics-explained/index.php/Material\\_deprivation\\_and\\_low\\_work\\_intensity\\_statistics#Low\\_work\\_intensity](http://ec.europa.eu/eurostat/statistics-explained/index.php/Material_deprivation_and_low_work_intensity_statistics#Low_work_intensity) (prístup k 25. 4. 2016)
- [3] GERBERY, D. (2012). *Vybrané aspekty materiálnej deprivácie*. Bratislava: Inštitút pre výskum práce a rodiny. 43 s. Dostupné na internete: [http://www.ceit.sk/IVPR/images/IVPR/vyskum/2012/Gerberby/gerberby\\_2266.pdf](http://www.ceit.sk/IVPR/images/IVPR/vyskum/2012/Gerberby/gerberby_2266.pdf) (prístup k 20. 3. 2016)
- [4] GUIO, A. C. – GORDON, D – MARLIER, E. (2012). *Measuring material deprivation in the EU*. Luxemburg: Eurostat Methodologies and Working papers. 178 s. ISBN 978-92-79-25571-7. Dostupné na internete: <http://ec.europa.eu/eurostat/documents/3888793/5853037/KS-RA-12-018-EN.PDF/390c5677-90a6-4dc9-b972-82d589df77c2> (prístup k 25. 4. 2016)
- [5] GUIO A. C. – MAQUET, E. (2007). *Material deprivation and poor housing*. [in:] *Comparative EU Statistics on income and living conditions: Issues and challenges*. EU Methodologies and working papers. Luxembourg: Publications Office of the European Union. Dostupné na internete: [http://stat.fi/eusilc/guio\\_maquet.pdf](http://stat.fi/eusilc/guio_maquet.pdf) (prístup k 29. 4. 2016)
- [6] GUIO, A. C. – MARLIER, E. (2013). *Alternative vs. Current measures of material deprivation at EU level: What differences does it make?* [online]. Improve (Poverty, Social Policy and Innovation), Working Paper No. 2013-29, 40 s. Dostupné na internete: <http://improve-research.eu/?wpdmact=process&did=MzQuaG90bGluaw==> (prístup k 10. 5. 2016)

- [7] ISRAEL, S. – SPANNAGEL, D. (2013). *Material Deprivation – an Analysis of cross-country Differences and European Convergence*. FP7 project ‘Combating Poverty in Europe: Re-organising Active Inclusion through Participatory and Integrated Modes of Multilevel Governance’. Work Package 3 – Poverty and its socio-economic structure in Europe. Dostupné na internete: [http://cope-research.eu/wp-content/uploads/2013/05/Material\\_Deprivation.pdf](http://cope-research.eu/wp-content/uploads/2013/05/Material_Deprivation.pdf) (prístup k 28. 4. 2016)
- [8] KOVÁČOVÁ, Y. – VLAČUHA, R. (2015). *EU SILC 2014 Zisťovanie o príjmoch a životných podmienkach domácností v SR*. Bratislava: Štatistický úrad Slovenskej republiky. 85 s. ISBN 978-80-8121-379-3. Dostupné na internete: [ftp://193.87.31.84/0206313/Prijmy\\_2014.pdf](ftp://193.87.31.84/0206313/Prijmy_2014.pdf) (prístup k 25. 4. 2016)
- [9] LABUDO VÁ, V. – VOJTKOVÁ, M. – LINDA, B. (2010). *Application of multidimensional methods to measure poverty*. E & M Ekonomie a Management, 13(1), 6-22.
- [10] PETROVÁ, Z. (2015). *Faktory ovplyvňujúce materiálnu depriváciu na Slovensku*. Diplomová práca. Bratislava: FHI, Ekonomická univerzita v Bratislave. 75 s.
- [11] RUBLÍKOVÁ, E. – LABUDO VÁ, V. – SANDTNEROVÁ, S. (2009). *Analýza kategoriálnych údajov*. 1. vyd. Bratislava: Ekonóm, 2009. 174 s. ISBN 978-80-225-2710-1.
- [12] STÁVKOVÁ J. – BIRČIAKOVÁ N. – TURČÍNKOVÁ J. (2012): *Material Deprivation in Selected EU Countries According to EU-SILC Income Statistics* [in:] Journal of Competitiveness, 4(2), 145-160. Dostupné na internete: <http://www.cjournal.cz/files/101.pdf> (prístup k 26. 4. 2016)
- [13] ŠOLTÉS, E. – ULMAN, P. (2015) *Material deprivation in Poland and Slovakia - a comparative analysis* [in:] Zeszyty naukowe = Cracow review of economics and management. - Kraków: Uniwersytet Ekonomiczny w Krakowie, 11(947), 19-36. ISSN 1898-6447.
- [14] ŽELINSKÝ, T. (2012). *Changes in Relative Material Deprivation in Regions of Slovakia and the Czech Republic*. *Panoeconomicus*, 59(3), 335-353. Dostupné na internete: <http://www.doiserbia.nb.rs/img/doi/1452-595X/2012/1452-595X1203335Z.pdf> (prístup k 25. 4. 2016)
- [15] <http://ec.europa.eu/eurostat/web/income-and-living-conditions/methodology/list-variables> (prístup k 18. 5. 2016)
- [16] [http://ec.europa.eu/eurostat/statistics-explained/index.php/Material\\_deprivation\\_statistics\\_-\\_early\\_results](http://ec.europa.eu/eurostat/statistics-explained/index.php/Material_deprivation_statistics_-_early_results) (prístup k 7. 9. 2016)

[17] <http://ec.europa.eu/eurostat/tgm/table.do?tab=table&init=1&language=en&pcode=tessi080&plugin=1> (prístup k 7. 9. 2016)

## RESUMÉ

Cieľom článku je skúmať rozdiely medzi mierami materiálnej deprivácie meraných prostredníctvom pôvodného konceptu a alternatívneho konceptu navrhnutého v rámci revízie stratégie Európa 2020. Článok sa zameriava na identifikáciu faktorov, ktoré ovplyvňujú materiálnu depriváciu a závažnú materiálnu depriváciu slovenských domácností a na kvantifikáciu vplyvu týchto faktorov. Špeciálna pozornosť je venovaná porovnaniu zistení vyplývajúcich zo súčasného a alternatívneho konceptu merania materiálnej deprivácie.

Na základe logistickej regresie použitej na databáze EU SILC 2014 sme zistili, že materiálna deprivácia ako aj závažná materiálna deprivácia závisia od typu domácnosti a faktorov vzťahujúcich sa na hlavu domácnosti ako sú status ekonomickej aktivity, vzdelanie, rodinný stav a zdravie. Regionálne disparity boli potvrdené len čiastočne.

Záveru plynúce zo súčasného a alternatívneho konceptu boli vo veľkej miere podobné. Vo viacerých prípadoch alternatívny koncept ukázal, že najrizikovejšie kategórie domácností (v členení podľa statusu ekonomickej aktivity, vzdelania a typu domácnosti) sú viac ohrozené materiálnou depriváciou a závažnou materiálnou depriváciou ako to bolo preukázané analýzami založenými na súčasnom koncepte.

## SUMMARY

The goal of the article is to investigate differences between the rates of material deprivation measured by means of the current concept and the alternative concept designed in the revision of Europe 2020 strategy. The article focuses on the identification of factors that impact the material deprivation and severe material deprivation of Slovak households and the quantification of the influence of these factors. A special attention is paid to comparing findings resulting from the current and the alternative concept measuring of material deprivation.

Based on the logistic regression used on the EU SILC 2014 data we discovered that material deprivation as well as severe material deprivation significantly depend on household type and factors related to the household head such as economic activity status, educational attainment, marital status and health. Regional disparities were confirmed only partially.

Conclusions resulting from the current concept and the alternative concept were rather similar. In several cases the alternative concept showed that the most risky categories of households (broken down by economic activity status, education and household type) are more threatened by material deprivation and severe material deprivation than it has been proven by analyses based on the current concept.

### **Kontakt**

doc. Mgr. Erik Šoltés, PhD., Katedra štatistiky, Fakulta hospodárskej informatiky,  
Ekonomická univerzita v Bratislave, Dolnozemska cesta 1, 852 35 Bratislava, tel.: (421 2)  
672 95 717, e-mail: [erik.soltes@euba.sk](mailto:erik.soltes@euba.sk)

Ing. Martin Gajdošík, tel.: 0948 250 192, e-mail: [martingajdosik@yahoo.com](mailto:martingajdosik@yahoo.com)

Zsolt Simonka

## **BUKOR, J. – CSIBA, P. – FEHÉR, Z. – GUNČAGA, J. – JARUSKA, L. – VELICHOVÁ, D.: *GEOGEBRA V PRAXI*<sup>1</sup>**

Publikácia je venovaná softvéru GeoGebra - interaktívnej aplikácii písanej v Java, ktorej tvorcom je Markus Hohenwarter z University of Salzburg. Projekt začal v roku 2001 na menovanej univerzite, vývoj pokračoval na Florida Atlantic University, neskôr na Florida State University, až sa premiestnil do Linz a hlavným vývojárom sa stal Michael Borchers. Odvtedy GeoGebra získala viac medzinárodných ocenení a niekoľko rokov sa s obľubou používa vo vyučovaní matematiky na celom svete. Je teda zrejme, prečo si kolektív autorov vybral práve tento nástroj ako predmet záujmu spoločnej práce. Ide o unikátny, bezplatný matematický softvér dostupný od verzie 2.6 aj v slovenskom jazyku.

Začiatok práce je venovaný spomínanému softvéru GeoGebra, kde autori popisujú počiatky jeho vzniku ako geometricko-algebraického nástroja (z čoho i pomenovanie pochádza) s neskorším rozšírením vo vyšších verziách o ďalšie možnosti použitia i zobrazenia vo vyučovaní matematiky.

Ďalšia časť publikácie je členená do troch kapitol, tvoriacich tri navzájom samostatné, ale ucelené celky so spoločným „menovateľom“ GeoGebra a jej využitie v rôznych častiach vyučovania matematiky.

V prvej z nich nazvanej „Dynamické modelovanie v matematike a jej aplikáciách“ autorka zdôrazňuje jednak dôležitosť dynamického prepojenia rôznych reprezentácií matematických pojmov v snahe dosiahnuť vyššiu kvalitu predstavivosti u študentov a zároveň poukazuje na prínos intenzívneho využívania IKT vedúcemu k prudkému nárastu množstva kognitívnych nástrojov a možností ich aplikácií vo vyučovacom procese. Ďalej stručne ale názorne poukazuje na najväčšiu výhodu softvéru GeoGebra - dvojakú grafickú reprezentáciu všetkých objektov: geometricko-syntetická a algebraicko-analytická. Poukazuje na najsilnejší nástroj softvéru – dynamické konštrukcie a zároveň ich aj demonštruje na rôznych príkladoch, ako napr. modelovanie interpolačných a aproximačných kriviek, ktorých teória tvorí dôležitú časť geometrického jadra počítačovej grafiky a geometrického modelovania s podporou CAD systémov.

Druhá časť práce je súbor prác štyroch autorov s názvom „Aplikácia GeoGebry v rôznych oblastiach“, v úvode ktorej stručne popisujú didaktické ciele používania IKT a charakterizujú softvér GeoGebra ako prostriedok IKT. Ďalej sa venujú využitiu GeoGebry pri klasickej a univerzálnej (s extra parametrom a bez extra parametra) konštrukcii Apolloniovej kružnice, ktorú vhodne metodicky (aj čo do syntaxe GeoGebry dostatočne názorne) popisujú, vytvárajúc tak predpoklad vzniku vhodnej novej metodickéj pomôcky vo vyučovaní danej problematiky.

V ďalšej časti kapitoly autori poukazujú na náročnosť tvorby interaktívnych učebných materiálov s využitím rôznych nástrojov GeoGebry. Na úvod demonštrujú

---

<sup>1</sup> Komárno: Univerzita J. Selyeho, 2013, ISBN 978-80-8122-067-8

tvorbu Lissajousových kriviek známych z fyziky harmonických kmitavých pohybov, ďalej sa venujú trojuholníkovej nerovnosti a konštrukcii trojuholníka (vytvorením dynamického modelu – interaktívnou konštrukciou – využitím množiny bodov danej vlastnosti – kružnice). Záverom podkapitoly sú metodické úvahy a tipy k tvorbe učebných materiálov pre nižší stupeň škôl (2. stupeň ZŠ). Návody na tvorbu interaktívnych pracovných listov možno považovať za naozaj prínosnú časť tejto kapitoly.

Veľmi zaujímavou je podkapitola 2.5 demonštrujúca vizualizačné prednosti GeoGebry na matematických príkladoch, riešenie ktorých je občas na prvý pohľad nie zrejmé ani čo do postupu ich manuálnej realizácie, nie to ešte do výsledkov. Ich grafické riešenie, a nie v poslednom rade len ich samotné grafické zobrazenie, sú prednosti, ktoré GeoGebru posúvajú ďaleko pred iný softvér podobného charakteru. Kapitulu završuje využitie GeoGebry vo vyučovaní základných typov rozdelení v teórii pravdepodobnosti náhodnej premennej a vo vyučovaní fyziky, ktorých nielen vizuálne spracovanie, ale spracovanie aj z metodologického hľadiska je dôstojným ukončením tejto kapitoly.

Samotné vytvorené aplety sú nielen motivačné prvky vedúce učiteľov k tvorbe apletov nech už akéhokolvek charakteru, ale ich priame efektívne využitie vo vyučovacom procese je nediskutabilné. Konceptia a prínos týchto podkapitol upevňujú vedecko-pedagogickú hodnotu publikácie.

Tretia – posledná (nie menej významná) časť práce už v samotných úvodných podkapitolách svedčia o úprimnej zanietenosti autora ako pedagóga v oblasti využitia IKT vo vyučovaní.

Úvodom autor charakterizuje faktory ovplyvňujúce používanie IKT vo vyučovaní a poukazuje na existenciu slovenskej Wiki stránky GeoGebry, ktorej sám autor je správcom.

V ďalšej – nosnej časti kapitoly sa autor venuje metóde generovaných problémov vo vyučovaní matematiky, ktorú ilustruje riešením rovnice  $f(x) = f^{-1}(x)$  pre prípady lineárnej, kvadratickej, lineárnej lomenej, exponenciálnej a logaritmickkej funkcie, ktorých manuálne riešenia v závislosti od parametrov sú tiež precízne rozpracované. S takýmto spracovaním uvedenej problematiky sa stretávam vôbec prvýkrát v domácej literatúre (nehovoriac o jeho spracovaní v GeoGebre) a sú prínosom vo vyučovaní analýzy elementárnych funkcií reálnej premennej.

Uvedené aplety svojou názornosťou potvrdzujú ich metodickú hodnotu a zároveň poukazujú na výhody softvéru pri zobrazovaní grafov funkcií jednej reálnej premennej, ktorých transformácie v závislosti od hodnoty parametrov sú stále väčším nedostatkom vo vedomostiach študentov so záujmom o vysokoškolské štúdium.

Autor ďalej uvádza niekoľko zaujímavých študentských prác vytvorených v GeoGebre a venuje sa problematike modelovania, a to nielen v oblasti matematiky, ale aj určitej časti reálneho sveta. Poukazuje na možné motivácie žiakov a zdôrazňuje dôležitosť žiaka ako aktívneho činiteľa vyučovacieho procesu.

Publikácia GeoGebra v praxi s prihliadnutím na nové trendy vo vyučovaní založené na implementácii IKT do vyučovacieho procesu vhodne aspoň čiastočne vyplní medzeru v dostupnej literatúre v rôznych oblastiach vzdelávania využitím IKT na rôznych stupňoch škôl.

Publikácia vyšla v Komárne na Univerzite J. Selyeho, v roku 2013 na CD-ROM.

**Kontakt**

PaedDr. Zsolt Simonka, PhD., Katedra matematiky, Fakulta hospodárskej informatiky, Ekonomická univerzita v Bratislave, Dolnozemska cesta 1/b, 852 35 Bratislava, tel.: +421 2/672 95 808, e-mail: zsolt.simonka@euba.sk



---

*Jozef Fecenko*

## **AKO MÔŽU SKÚSENOSTI ZO ŠTÚDIA AKTUÁRSTVA VO VEĽKEJ BRITÁNII POMÔCŤ ZLEPŠIŤ AKTUÁRSKE VZDELÁVANIE NA FHI EU V BRATISLAVE**

Dňa 16. júna 2016 pozval vedúci Katedry matematiky a aktuárstva Fakulty hospodárskej informatiky Ekonomickej univerzity v Bratislave členov katedry na workshop s názvom *Ako môžu skúsenosti z Veľkej Británie pomôcť zlepšiť aktuárske vzdelávanie* na katedre za účasti absolventky študijného programu *Actuarial Science of University of Leicester* vo Veľkej Británii MSc. Moniky Cingelovej. Menovaná je absolventkou bakalárskeho štúdia Fakulty matematiky, fyziky a informatiky v študijnom programe *Ekonomická a finančná matematika* a následne absolvovala predmetné ročné magisterské štúdium na univerzite v Leicesteri. Táto univerzita patrí medzi prestížne univerzity, ktoré poskytujú aktuárske vzdelávanie vo Veľkej Británii.

Prednáška bola rozdelená do troch hlavných oblastí: história založenia univerzity a jej význam v univerzitnom vzdelávaní vo Veľkej Británii; samotné štúdium a študijný program *Actuarial Science* a obsahová náplň jednotlivých predmetov s diskusiou. V spomínanom študijnom programe študujú najmä zahraniční študenti z celého sveta, pričom pre väčšinu z nich je štúdium spolplatené v rôznych úrovniach. Spomínaná prestížnosť štúdia zaručuje aj intenzívna spolupráca fakulty s profesijnou organizáciou *Institute and Faculty of Actuaries*, ktorá uznáva v rámci predmetov vlastného realizovaného vzdelávania (*Core Technical Subjects*) niektoré absolvované skúšky. Prednášajúca spomenula viaceré odlišné aj spoločné znaky študentského života (príprava na štúdium a vážnosť štúdia, práca študentov počas štúdia, ...) i organizácie štúdia (skúškové obdobie, realizácia samotného skúšania, možnosti ukončenia štúdia, ...). *University of Leicester* je okrem iného význačná špičkovo vybavenou knižnicou a informačnými zdrojmi a študenti všetkých študijných programov väčšinu času trávajú práve štúdiom v tejto knižnici. V rámci plnenia študijných predpokladov sa veľký dôraz kladie na samoštúdium, pričom k tomuto sú študenti vedení aj zadávaním samostatných domácich projektov. Univerzita rovnako predpokladá samoštúdium študentov v rámci IT techník (v tomto prípade najmä open-source systém jazyk R, s využitím ktorého absolventka vypracovala viacero projektov). Prednášajúca zdôrazňovala aj potrebu neustáleho kontinuálneho vzdelávania absolventov aktuárstva aj po skončení štúdia.

Z predstavenia študijného programu *Actuarial Science* na spomínanej univerzite vyplynulo, že tento vykazuje značné spoločné obsahové znaky so študijným programom *Aktuárstvo* na FHI EU v Bratislave, dokonca v niektorých oblastiach je akademická

---

výučba v tomto študijnom programe na Slovensku podrobnejšia. Vzhľadom na prístup pedagógov Katedry matematiky a aktuárstva (KMA) FHI EU v Bratislave vysvetľovať látku podrobne a venovať značnú nadprácu v rámci pedagogického procesu, študenti často dostanú väčšiu pridanú hodnotu. Je však na nich ako s danými informáciami naložia. Podobne ako spolupracuje *University of Leicester* s IFoA, spolupracuje aj KMA so *Slovenskou spoločnosťou aktúarov* a poisťovňami z praxe (najmä s *Zurich Insurance Company*). Problémom však je dlhodobý nezáujem absolventov stredných škôl o študijné programy orientované na štúdium kvantitatívnych vied v ekonómii a teda aj aktuárstva a to aj napriek skutočnosti, že zamestnanosť absolventov študijného programu *Aktuárstvo* je takmer 100 percentná.

Lektorka workshopu, toho času už zamestnankyňa spoločnosti *Zurich Insurance Company* s vysunutým pracoviskom v Londýne, predstavila zaujímavým spôsobom študijný program Actuarial Science na Univerzite v Leicestri vo Veľkej Británii. Získané poznatky, prezentované aj konkrétnymi ukážkami výstupov počas štúdia, odborne obohatili členov katedry, čo sa potvrdilo aj na bohatej diskusii v záverečnej časti workshopu. V súlade so získanými poznatkami možno konštatovať správnu orientáciu študijného programu Aktuárstvo na FHI EU v Bratislave.

### **Kľúčové slová**

aktuárstvo, aktuárske vzdelávanie, kvantitatívne metódy v ekonómii

### **Klasifikácia JEL**

C51; C52; R29

**Workshop bol organizovaný a tento príspevok vypracovaný v rámci riešenia grantovej úlohy VEGA č. 1/0806/14 – Kalkulácia SCR na krytie rizík neživotného poistenia v súlade s potrebami praxe.**

### **LITERATÚRA**

- [1] Cingelová. M. (2016). Prednáška na tému workshopu. Katedra matematiky a aktuárstva FHI EU v Bratislave.
- [2] <http://www.aktuar.sk> (prístup 30.06.2016).
- [3] <http://www.fhi.sk> (prístup 30.06.2016).
- [4] <http://www.thecompleteuniversityguide.co.uk/leicester> (prístup 30.06.2016).
- [5] <https://le.ac.uk/> (prístup 30.06.2016).
- [6] <https://www.actuaries.org.uk/> (prístup 30.06.2016).
- [7] <https://www.zurich.com/> (prístup 30.06.2016).

## **RESUMÉ**

Príspevok informatívneho charakteru prezentuje workshop Katedry matematiky a aktuárstva FHI EU v Bratislave, na ktorom prednášala absolventka University of Leicester študijného programu Aktuárstvo. Prednáška sa zamerala na hlavné atribúty výučby, náplň nosných predmetov a rovnako na ukončenie štúdia v predmetnom študijnom programe.

## **SUMMARY**

The contribution of an informative character presents the workshop of the Department of Mathematics and Actuarial Science FEI UE in Bratislava where lectured graduate of the University of Leicester study program of the same name Actuarial Science. The lecture focused on the main attributes of teaching, supporting content items as well as the completion of studies in the relevant study program.

## **Kontakt**

doc. RNDr. Jozef Fecenko, CSc. Katedra matematiky a aktuárstva, Fakulta hospodárskej informatiky, Ekonomická univerzita v Bratislave, Dolnozemská cesta 1, 852 35 Bratislava, tel.: (+421 2) 672 95 814, 839, 840, e-mail: [jozef.fecenko@euba.sk](mailto:jozef.fecenko@euba.sk)

---

### *Externí recenzenti*

RNDr. Iveta Dirgová Luptáková, PhD.

Ing. Richard Farkaš, PhD.

Ing. Pavel Gašpar, PhD.

doc. RNDr. Dušan Holý, CSc.

prof. RNDr. Jozef Hvorecký, CSc.

doc. Ing. Mojmír Kokles, PhD.

RNDr. Aleš Kozubík, PhD.

doc. Ing. Silvia Megyesiová, PhD.

Ing. Jaromír Novák, PhD.

Ing. Branislav Novotný

prof. Ing. Rudolf Palenčár, CSc.

Mgr. Jarmila Schmidtová, PhD.

Dipl.-Ing. Zoltán Szedlák

## POKYNY PRE AUTOROV

### **Rozsah:**

- vedecké state a diskusie 10 až 15 strán. Základnou požiadavkou je originalita príspevku a komplexnosť jeho spracovania. Prijímame príspevky v slovenskom, českom a anglickom jazyku (uprednostňujú sa príspevky v anglickom jazyku);
- informácie maximálne 2 strany;
- recenzie maximálne 2 strany.

### **Forma:**

Použijete textový editor MS WORD, verzia 2 000 a vyššia. Šablóna pre písanie článkov je na webovej stránke:

<http://fhi.sk/sk/casopis/Ekonomika-a-informatika.html>

a v elektronickom systéme na stránke:

<http://ei.fhi.sk/index.php/EAI>

Príspevky predkladajú autori elektronicky vo formáte .doc/.docx do systému na stránke <http://ei.fhi.sk/index.php/EAI>. Príspevky sú recenzované. Redakčná rada zabezpečí interné a externé posúdenie textu príspevku. Autor príspevku je povinný zapracovať pripomienky z posudkov najneskôr do 2 týždňov od doručenia e-mailov so žiadosťou o vykonanie oponentských posudkov v elektronickom systéme časopisu a zaslať príspevok so zapracovanými pripomienkami vo formáte .doc/.docx prostredníctvom elektronického systému časopisu *Ekonomika a informatika*. Konečné rozhodnutie o publikovaní príspevku urobí redakčná rada časopisu. Autor pred zverejnením príslušného čísla časopisu *Ekonomika a informatika* odsúhlasí formátovanie elektronickej verzie článku. Fakulta hospodárskej informatiky si vyhradzuje právo zverejniť príspevky schválené redakčnou radou v elektronickej forme časopisu *Ekonomika a informatika*.

**Autorské honoráre** sa neplatia. Predložením príspevku do elektronického systému vedeckého časopisu *Ekonomika a informatika* dáva autor príspevku vydavateľovi právo, aby bezplatne publikoval text príspevku v časopise *Ekonomika a informatika* v elektronickej forme vo formáte .pdf.

## **EKONOMIKA A INFORMATIKA**

Vedecký časopis Fakulty hospodárskej informatiky Ekonomickej univerzity v Bratislave a občianskeho združenia Slovenská spoločnosť pre hospodársku informatiku.

Poslaním vedeckého časopisu je publikovať teoretické a aplikačné poznatky získané v ekonomickom výskume a hospodárskej praxi z oblastí hospodárskej informatiky, účtovníctva a audítorstva, ekonometrie a operačného výskumu, aplikovanej štatistiky a aktuárstva, s akcentom na aktuálne otázky harmonizácie, integrácie a kompatibility s európskou a svetovou metodológiou a praxou.

Uverejňuje vedecké state a diskusie, recenzie a informácie o dizertačných a habilitačných prácach, inauguračných prednáškach a vedeckých podujatiach v slovenskom, českom alebo anglickom jazyku, ktoré sú výsledkom vedeckovýskumnej činnosti autorov, vedeckých aktivít doktorandov, medzinárodnej výskumnej a pedagogickej spolupráce a ich aplikácie v ekonomickej praxi.

## **ECONOMICS AND INFORMATICS**

A scientific journal of the Faculty of Economic Informatics of University of Economics in Bratislava and the Slovak Economic Informatics Association.

Mission of the scientific journal is to publish theoretical and application knowledge acquired in economic research and practice in the areas of economic informatics, accounting and auditing, applied statistics, actuarial science, econometrics and operations research, with emphasis on the current issues of harmonization, integration and compatibility with the European and global methodology and practice.

The journal publishes scientific articles and paper discussions, reviews and information on doctoral and habilitation theses, inauguration lectures and scientific events in Slovak, Czech or English language, which are results of scientific and research activity of authors, scientific activities of doctoral students, international research and educational cooperation and their application in the economic practice.

## **EKONOMIKA A INFORMATIKA**

**Vydáva:** Fakulta hospodárskej informatiky Ekonomickej univerzity v Bratislave a Slovenská spoločnosť pre hospodársku informatiku

**Vychádza:** 2x ročne